「正弦函數自卷積恆等式」的迴響

許閎揚
彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在科學教育月刊[1]，陳建燁老師以完全齊次多項式與拉格朗日插值法做出數學式

$$\sin\alpha\sin(n\beta)+\sin 2\alpha\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin(n\alpha)\sin\beta$$

$$=\frac{\sin(n+1)\alpha\cdot\sin\beta-\sin(n+1)\beta\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\text{ 。}$$

我們發現藉由歐拉公式與旋轉矩陣的運算也可以推導出這個數學式。此外，我們還可以推導出正弦與餘弦的卷積與餘弦的自卷積公式。

貳、本文

我們推導正弦函數的自卷積

$$\sin\alpha\sin(n\beta)+\sin 2\alpha\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin(n\alpha)\sin\beta$$

$$=\frac{\sin(n+1)\alpha\cdot\sin\beta-\sin(n+1)\beta\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

使用的主要工具為複變函數中的歐拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ，它是一個同時蘊含正弦、餘弦函數的數學式。這個式子有一個重要的推論為棣美弗定理：$\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$，讀者可在參考資料[2]中找到關於它的介紹。

在推導本文結果前，我們需要下面兩個引理。

引理 **1**： $e^{i\alpha}x^n+e^{2i\alpha}x^{n-1}+\cdots+e^{ni\alpha}x=\dfrac{e^{i\alpha}\left(x^{n+1}-e^{ni\alpha}x\right)}{x-e^{i\alpha}}$ 。

證明:

利用等比級數公式，得

$$e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}\cdot\frac{1}{x}+e^{3i\alpha}\cdot\frac{1}{x^2}\cdots+e^{ni\alpha}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}=\frac{e^{i\alpha}\left(1-e^{ni\alpha}\cdot\frac{1}{x^n}\right)}{1-e^{i\alpha}\cdot\frac{1}{x}} \tag{1}$$

將(1)式等號兩邊同乘 x^n，得

$$e^{i\alpha}x^n+e^{2i\alpha}x^{n-1}+\cdots+e^{ni\alpha}x=\frac{e^{i\alpha}\left(x^{n+1}-e^{ni\alpha}x\right)}{x-e^{i\alpha}} \tag{2}$$

，得證。

引理 2: 若 $Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，則 $Q^n=\begin{bmatrix}\cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{bmatrix}$，$n\geq 1$。

證明: 讀者可用數學歸納法證明。

引理 2 的 Q 矩陣即為旋轉矩陣，讀者可在一般線性代數教科書中找到關於它的介紹。現在我們利用這兩個引理來證明本文的主要結果。

定理[1]: $\sin\alpha\sin(n\beta)+\sin 2\alpha\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin(n\alpha)\sin\beta$

$$=\frac{\sin(n+1)\alpha\cdot\sin\beta-\sin(n+1)\beta\sin\alpha}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\text{。}$$

證明:

令 $Q=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$，將 Q 代入(2)式，得

$$e^{i\alpha}Q^n+e^{2i\alpha}Q^{n-1}+\cdots+e^{ni\alpha}Q=\left(Q-e^{i\alpha}I\right)^{-1}\left[e^{i\alpha}\left(Q^{n+1}-e^{ni\alpha}Q\right)\right] \tag{3}$$

利用引理 2，(3)式等號左邊矩陣(1,1)元與(2,1)元分別為

$$e^{i\alpha}\cos n\beta+e^{2i\alpha}\cos(n-1)\beta+\cdots+e^{ni\alpha}\cos\beta \tag{4}$$

與

$$e^{i\alpha}\sin n\beta+e^{2i\alpha}\sin(n-1)\beta+\cdots+e^{ni\alpha}\sin\beta \tag{5}$$

(4)式的實部為

$$\cos\alpha\cdot\cos n\beta+\cos 2\alpha\cdot\cos(n-1)\beta+\cdots+\cos n\alpha\cdot\cos\beta \tag{6}$$

虛部為

$$\sin\alpha\cdot\cos n\beta+\sin 2\alpha\cdot\cos(n-1)\beta+\cdots+\sin n\alpha\cdot\cos\beta\text{。} \tag{7}$$

(5)式的實部為

$$\cos\alpha\cdot\sin n\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin(n-1)\beta+\cdots+\cos n\alpha\cdot\sin\beta \tag{8}$$

虛部為

$$\sin\alpha\cdot\sin n\beta+\sin 2\alpha\cdot\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin n\alpha\cdot\sin\beta \tag{9}$$

現在我們計算(3)式等號右邊:

首先，

$$Q-e^{i\alpha}I=\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=>\left(Q-e^{i\alpha}I\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{\left(\cos\beta-e^{i\alpha}\right)^2+\sin^2\beta}\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+\cos 2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+i\left(\sin 2\alpha-2\sin\alpha\cos\beta\right)}\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+i\left(2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\beta\right)}\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\cos\alpha\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)+i\left[2\sin\alpha\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)\right]}\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)e^{i\alpha}}\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{e^{-i\alpha}}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix} \tag{10}$$

將(10)代入(3)式等號右邊，得

$$\left(Q-e^{i\alpha}I\right)^{-1}\left[e^{i\alpha}\left(Q^{n+1}-e^{ni\alpha}Q\right)\right]$$

$$=\frac{e^{-i\alpha}}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\begin{bmatrix}\cos\beta-e^{i\alpha} & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta-e^{i\alpha}\end{bmatrix}\times e^{i\alpha}\begin{bmatrix}\cos(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\cos\beta & e^{ni\alpha}\sin\beta-\sin(n+1)\beta\\ \sin(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\sin\beta & \cos(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\cos\beta\end{bmatrix} \tag{11}$$

(11)式矩陣的(2,1)元為

$$\frac{1}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\left\{-\sin\beta\cdot\left[\cos(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\cos\beta\right]+\left(\cos\beta-e^{i\alpha}\right)\left[\sin(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\sin\beta\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\left[-\sin\beta\cos\left(n+1\right)\beta+\cos\beta\sin(n+1)\beta-e^{i\alpha}\sin\left(n+1\right)\beta+e^{(n+1)i\alpha}\sin\beta\right]$$

$$=\frac{1}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\left[\sin n\beta-e^{i\alpha}\sin\left(n+1\right)\beta+e^{(n+1)i\alpha}\sin\beta\right] \tag{12}$$

(12)式的實部為

$$\frac{1}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\left[\sin n\beta-\cos\alpha\sin\left(n+1\right)\beta+\cos(n+1)\alpha\sin\beta\right] \tag{13}$$

虛部為

$$\frac{1}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\left[-\sin\alpha\sin\left(n+1\right)\beta+\sin(n+1)\alpha\sin\beta\right] \tag{14}$$

因為(9)式與(14)式分別為(3)式等號左右兩邊矩陣(2,1)元的虛部，故相等，因此

$$\sin\alpha\cdot\sin n\beta+\sin 2\alpha\cdot\sin(n-1)\beta+\cdots+\sin n\alpha\cdot\sin\beta$$

$$=\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\left[-\sin\alpha\sin(n+1)\beta+\sin(n+1)\alpha\sin\beta\right]，$$

得證。

系理 1: $\cos\alpha\cdot\sin n\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin(n-1)\beta+\cdots+\cos n\alpha\cdot\sin\beta$

$$=\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\left[\sin n\beta-\cos\alpha\sin(n+1)\beta+\cos(n+1)\alpha\sin\beta\right]$$

證明:

因為(8)式與(13)式分別為(3)式左右兩邊矩陣(2,1)元的實部，故相等，得證。

系理 2: $\cos\alpha\cdot\cos n\beta+\cos 2\alpha\cdot\cos(n-1)\beta+\cdots+\cos n\alpha\cdot\cos\beta$

$$=\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\left[-\cos n\alpha+\cos n\beta-\cos\alpha\cos(n+1)\beta+\cos(n+1)\alpha\cos\beta\right]。$$

證明:

(11)式矩陣的(1,1)元為

$$\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\left\{\left(\cos\beta-e^{i\alpha}\right)\left[\cos(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\cos\beta\right]+\sin\beta\left[\sin(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\sin\beta\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\left[\cos\beta\cos(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\cos^2\beta-e^{i\alpha}\cos(n+1)\beta+e^{(n+1)i\alpha}\cos\beta+\sin\beta\sin(n+1)\beta-e^{ni\alpha}\sin^2\right.$$

$$=\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\left[-e^{ni\alpha}+\cos n\beta-e^{i\alpha}\cos(n+1)\beta+e^{(n+1)i\alpha}\cos\beta\right] \qquad (15)，$$

(15)式的實部為

$$\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos\beta)}\left[-\cos n\alpha+\cos n\beta-\cos\alpha\cos(n+1)\beta+\cos(n+1)\alpha\cos\beta\right]。\qquad (16)$$

因為(6)式與(16)式分別為(3)式等號左右兩邊矩陣(1,1)元的實部，故相等，因此

$$\cos\alpha\cdot\cos n\beta+\cos 2\alpha\cdot\cos(n-1)\beta+\cdots+\cos n\alpha\cdot\cos\beta$$

$$=\frac{1}{2\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)}\left[-\cos n\alpha+\cos n\beta-\cos\alpha\cos(n+1)\beta+\cos\left(n+1\right)\alpha\cos\beta\right]，$$

得證。

參、結語

三角函數是高中數學課程的基本教材，在數學與工程中有許多重要應用。在三角函數許多公式中，歐拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 是每個理工科學生在學習常微分方程或複變函數時一定會學到的一個數學式，它是歐拉於 1748 年時發現，也是數學上最優美的一個等式。在計算三角的卷積問題時，很自然的我們會想到使用歐拉公式與旋轉矩陣來求解，雖然演算過程非常繁瑣，但所幸經由化簡後所得的公式都非常簡潔。

肆、參考資料

1. 陳建燁。正弦函數自卷積恆等式。科學教育月刊, 410, 2-9, 2018。
2. 黃孟槺(譯)。複變函數與應用。台北市: 東華，2015。(James Ward Brown, Ruel V. Churchill 2014)