從一道徵答題的解答出發看二階逆矩陣公式的另證

連威翔

壹、前言

在數學傳播 44 卷 3 期《從幾何觀點推導二階逆矩陣公式》[1]一文中，作者利用二階方陣對應的平面線性變換搭配幾何直觀推導出二階可逆方陣之逆矩陣公式(簡稱二階逆矩陣公式)，文章內容相當引人入勝，使筆者留下深刻的印象。

經過了一段時間之後，筆者參加了[2]這道網路數學題的徵答，也從自己所寫的解答發想出二階逆矩陣公式的另證。此另證與[1]文同樣採用幾何的觀點，可在一般情況下給出二階矩陣可逆的判別條件並求出逆矩陣公式。

在底下第二節中，筆者將先介紹自己對[2]這道徵答題的解法。接著的第三節中，則將介紹二階逆矩陣公式的推導過程供讀者參考。

貳、一道徵答題的解答

在國立中山大學雙週一題徵答活動中，2021 年春季第八題如下：

第八題：令 A,B 分別為 $3\times 2, 2\times 3$ 矩陣，若 $AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$，證明 $BA=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}$。

活動主辦單位在[2]中對上述問題公布了一個簡潔的證明，該證明使用大學線性代數課程中才會介紹的知識，這樣的證明對高中生來說，若沒有提前學習過大學的線性代數，應該不容易理解。

筆者參加上述問題的徵答活動時，主要是使用較基本的矩陣相關知識搭配高中數學知識來撰寫證明，相信此證明對高中生而言應較容易理解。筆者的證明如下：

證明：依題意，我們令 A,B 兩矩陣如下：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}.$$

此時觀察題目所給的矩陣 AB 之表達式可知其行向量均不為零且不互相平行，且其列向量均不為零且不互相平行，利用此兩條件可證明 A 的兩行向量均不為零且不互相平行，且 B 的兩列向量均不為零且不互相平行，此證明不難，此處就留給讀者練習。

有了上述關於矩陣 A 之行向量與矩陣 B 之列向量的兩條件後，我們將 3×2 矩陣 A 兩個非零且不平行的行向量記為 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$，參考證明一開始我們對矩陣 A 的假設，可令

$$\overrightarrow{v_1}=(a_{11},a_{21},a_{31}),\qquad \overrightarrow{v_2}=(a_{12},a_{22},a_{32}).$$

在空間中畫出 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 兩向量，將兩者所夾之小於 180° 的角記為 θ，接著於 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 所決定的平面上畫出分別與 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 垂直的兩向量 $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$，其中 $\overrightarrow{v_1}$ 轉 90° 後與 $\overrightarrow{w_1}$ 同向的旋轉方向與 $\overrightarrow{v_2}$ 轉 90° 後與 $\overrightarrow{w_2}$ 同向的旋轉方向相反，如下圖。

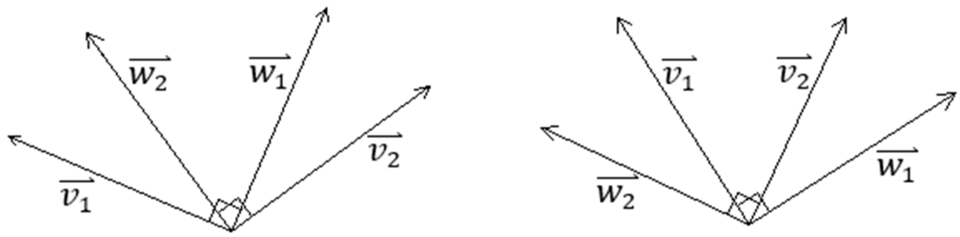

圖 1

其中左圖代表 $\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi$ 的情況，而右圖代表 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 的情況。注意無論是圖 1 中的哪種情況，我們都事先約定好分別將 $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$ 的長度取為

$$|\overrightarrow{w_1}|=\frac{1}{|\overrightarrow{v_2}|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)},\qquad |\overrightarrow{w_2}|=\frac{1}{|\overrightarrow{v_1}|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

因為 $0<\theta<\pi$，故 $-\frac{\pi}{2}<\theta-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$，因此上兩式中的 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ 為正數。在圖 1 中，因為 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 分別與 $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$ 垂直，故 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w_2}$ 之夾角與 $\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_1}$ 之夾角相同，在圖 1 左邊的情形 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w_2}$ 與 $\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_1}$ 之夾角皆為 $\theta-\frac{\pi}{2}$，右邊的情形則皆為 $\frac{\pi}{2}-\theta$。無論是圖 1 的哪種情形，我們都有

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{w_2}=0,$$

而搭配上面我們事先約定並取好的 $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$ 之長度，可知

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{w_2}=|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{w_2}|\cos\left[\pm\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]=|\overrightarrow{v_1}|\cdot\frac{1}{|\overrightarrow{v_1}|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{w_1}=|\overrightarrow{v_2}||\overrightarrow{w_1}|\cos\left[\pm\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]=|\overrightarrow{v_2}|\cdot\frac{1}{|\overrightarrow{v_2}|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

此時，我們依序以 $\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_1}$ 從上到下作為兩列向量來產生 2×3 矩陣 C，則矩陣 C 與矩陣 A 相乘後將滿足

$$CA = C\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \tag{1}$$

其中 I_2 為二階單位矩陣。

另一方面，我們令矩陣 B 的兩個非零且不平行之列向量為 $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$，參考一開始我們對 2×3 矩陣 B 的假設，可令

$$\overrightarrow{u_1} = (b_{11}, b_{12}, b_{13}), \qquad \overrightarrow{u_2} = (b_{21}, b_{22}, b_{23}).$$

在空間中畫出 $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ 兩向量，假設兩者所夾之小於 180° 的角為 ϕ。接著仿照上方圖 1 的繪製方式，於 $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ 所決定的平面上畫出分別與 $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ 垂直的兩向量 $\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}$，並仿照圖 1 底下所做的討論，適當地給定 $\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}$ 的長度後，同理可得

$$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{d_2} = 0,$$
$$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{d_1} = 1.$$

此時，只要我們依序以 $\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{d_1}$ 由左至右作為兩行向量來產生 3×2 矩陣 D，則矩陣 B 與矩陣 D 相乘後將滿足

$$BD = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{d_1} \\ \overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{d_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \tag{2}$$

有了上述的 C, D 兩矩陣後，我們回頭利用題目所給的矩陣 AB 之表達式，配合矩陣乘法的結合律等性質，可推導得

$$A(BA)B = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$
$$= 9\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 9AB = A(9I_2)B.$$

由上式知 $A(BA)B = A(9I_2)B$，對此結果之等號兩側同時左乘C再右乘 D，可得

$$CA(BA)BD = CA(9I_2)BD.$$

此時將(1), (2)兩式的結果代入上式後，可將上式可化簡為

$$BA = 9I_2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

因此原徵答題的結論成立，證明完畢。

不難發現，上述證明的其中一個關鍵在於利用了「兩個分別為 $m\times n, n\times p$ 階的矩陣 A, B 相乘後所得之 $m\times p$ 階矩陣 AB 的 (i,j) 元，是矩陣 A 的第 i 個列向量與矩陣 B 的第 j 個行向量(兩個 n 維向量)之內積」這個知識，它完全來自矩陣乘法的定義。在下一節中，筆

者將利用此知識來求得二階方陣可逆的充要條件，並推導出二階逆矩陣的公式。

參、二階方陣可逆的充要條件與逆矩陣公式

如同上述標題所示，本節內容將介紹一般二階方陣可逆的充要條件，並推導出二階逆矩陣的公式。首先說明，因為[1]文中考慮的方陣其係數為實數，故底下我們也只考慮實係數的二階方陣。假設有底下的二階方陣 A：

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中 a,b,c,d 為實數。如果 A 可逆，代表我們可找到一個二階方陣 B 滿足

$$AB=BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2.$$

此時我們令

$$B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}, \tag{3}$$

則依照 $BA=I_2$ 的條件，我們可寫下

$$BA=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

觀察上式，我們知道方陣 B 的列向量 $(x,y),(z,u)$ 與方陣 A 的行向量 $(a,c),(b,d)$ 滿足

$$(x,y)\cdot(b,d)=(z,u)\cdot(a,c)=0, \tag{4}$$

$$(x,y)\cdot(a,c)=(z,u)\cdot(b,d)=1\neq 0. \tag{5}$$

如果 $(a,c),(b,d)$ 兩者之中至少有一個是零向量，則 $(x,y)\cdot(a,c)=0$ 或 $(z,u)\cdot(b,d)=0$，此結果違反(5)式，因此可知方陣 A 的兩行向量 $(a,c),(b,d)$ 均不為零向量。另一方面，如果 $(x,y),(z,u)$ 兩者之中至少有一個是零向量，則同樣將有 $(x,y)\cdot(a,c)=0$ 或 $(z,u)\cdot(b,d)=0$，此結果同樣違反(5)式，因此方陣 B 的兩個列向量 $(x,y),(z,u)$ 均不為零向量。

我們知道，二維向量 $\vec{v},\vec{w}$ 的內積 $\vec{v}\cdot\vec{w}$ 定義為：

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta,$$

其中 θ 為 $\vec{v},\vec{w}$ 的夾角，注意我們總是可取 $0°\leq\theta\leq 180°$。依據上述內積定義，可知兩非零向量內積為零時兩向量垂直($\cos\theta=0$ 故 $\theta=90°$)，而內積結果非零時兩向量不垂直($\cos\theta\neq 0$ 故 $\theta\neq 90°$)。因此，由(4),(5)兩式知 (x,y) 垂直 (b,d) 但不垂直 (a,c)，且 (z,u) 垂直 (a,c) 但不垂直 (b,d)，從而 (a,c) 與 (b,d) 兩向量不平行，可參考下圖。

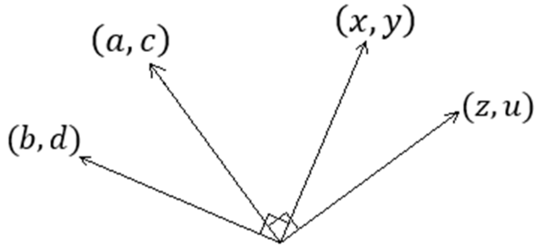

圖 2

由於 (a,c) 與 (b,d) 兩向量不平行，故不存在實數 r 滿足 $(a,c)=r(b,d)$，亦即不存在實數 r 使得 $(a-rb,c-rd)=(0,0)$ 或 $(a-rb)^2+(c-rd)^2=0$，將後者的兩個完全平方式展開，整理後可得

$$(b^2+d^2)r^2-2(ab+cd)r+(a^2+c^2)=0, \tag{6}$$

注意因 (b,d) 不為零向量，故 $b^2+d^2>0$，因此上式為 r 的一元二次方程式。因為上述 r 的一元二次方程式無實數解，故其判別式小於零，即

$$4(ab+cd)^2-4(b^2+d^2)(a^2+c^2)<0.$$

經過整理，上式可化簡為$(ad-bc)^2>0$，而這就告訴我們

$$ad-bc\neq 0. \tag{7}$$

討論至此，我們就知道 $ad-bc\neq 0$ 是 A 有反矩陣的必要條件。所以說，當 $ad-bc=0$ 時，A 的反矩陣不存在。

若將方陣 B 的列向量 $(x,y),(z,u)$ 分別記為 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$，並將方陣 A 的行向量 $(a,c),(b,d)$ 分別記為 $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$，則由前面的討論結果可知 $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$ 不平行，且 $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{w_2}$ 與 $\overrightarrow{v_2}\perp\overrightarrow{w_1}$ 均成立、$\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{w_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}\perp\overrightarrow{w_2}$ 均不成立。令 $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$ 之夾角為 θ，則我們有如下的示意圖。

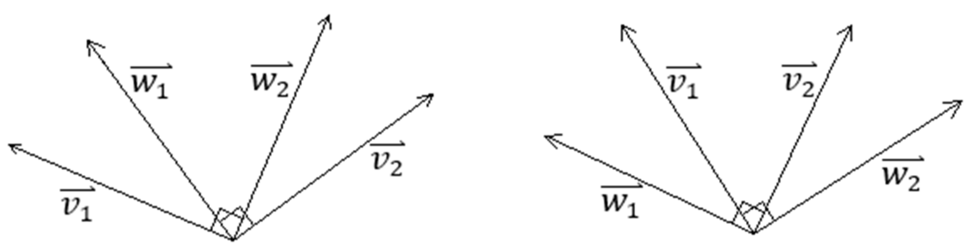

圖 3

其中左圖代表 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 的情況，而右圖代表 $\frac{\pi}{2}\leq\theta<\pi$ 的情況。讀者可能會發現上圖似乎有些眼熟，這是因為圖 3 與圖 1 在圖形的部分是相同的，只在文字標示上有所不同。

回顧(4)式，它告訴我們

$$(x,y)\cdot(b,d)=xb+yd=0, \tag{8}$$

$$(z,u)\cdot(a,c)=za+uc=0. \tag{9}$$

因為向量 (b,d) 非零，故 b,d 兩數至少有一數非零。當 $b\neq 0$ 時，由(8)式可知

$$x=-\frac{d}{b}y.$$

令 $s=-\frac{y}{b}$，則 $y=-bs$，將 $y=-bs$ 代入上式後可得 $x=ds$，因此有

$$(x,y)=(ds,-bs). \tag{10}$$

而當 $d\neq 0$ 時，利用(8)式寫下 $y=-\frac{b}{d}x$ 之後，令 $s=\frac{x}{d}$ 得 $x=ds$，將 $x=ds$ 代入 $y=-\frac{b}{d}x$，則同樣可得(10)式，因此恆存在實數 s 使(10)式成立。另一方面，因為向量 (a,c) 非零，故 a,c 兩數至少有一數非零，由(9)式出發，仿照上述討論方式，同理可推得恆存在實數 t 使下式成立：

$$(z,u)=(ct,-at). \tag{11}$$

將(10)式中 x,y 兩數與(11)式中 z,u 兩數的表達式代入(5)式，分別可得

$$(x,y)\cdot(a,c)=(ds,-bs)\cdot(a,c)=s(ad-bc)=1,$$

$$(z,u)\cdot(b,d)=(ct,-at)\cdot(b,d)=t(bc-ad)=1.$$

由(7)式知 $ad-bc\neq 0$，因此由上兩式可知

$$s=\frac{1}{ad-bc},\qquad t=\frac{-1}{ad-bc}.$$

將(10), (11)兩式中 x,y,z,u 四數的表達式代入(3)式，搭配上述 s,t 之表達式可知

$$B=\begin{pmatrix} ds & -bs \\ ct & -at \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{12}$$

注意我們是利用 $BA=I_2$ 的條件求出上式中方陣 B 的表達式，因此上式中的方陣 B 當然滿足 $BA=I_2$ (讀者可驗證看看)。但另一方面，計算 AB 之後也可確定有

$$AB=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=I_2.$$

至此，我們就確定(12)式中的方陣 B 為 A 的反矩陣，此外也得到了一般情況下 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的二階逆矩陣公式，即(12)式。

在 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的假設下，回顧在(7)式下方的那段敘述可知 $ad-bc\neq 0$ 是 A 有反矩陣的必要條件。不過另一方面，若 $ad-bc\neq 0$，則其倒數 $\frac{1}{ad-bc}$ 與(12)式中的方陣 B 皆存在，此時只要計算 AB 與 BA 即可確定 $AB=BA=I_2$，故 B 為 A 的反矩陣，因此 $ad-bc\neq 0$ 也是方陣 A 有反矩陣的充分條件。所以說，$ad-bc\neq 0$ 是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 有反矩陣的充要條件。

肆、結語

本文完成於 2021 年 9 月，能夠完成本文，筆者要感謝雙週一題的主辦單位提供了[2]這道有趣問題，也要感謝[1]文作者所提出的精采作品，兩者都相當程度地激起了筆者想要撰寫本文的動機。

值得一提的是，雖然本文第三節推導二階逆矩陣公式的過程基本上是採用幾何的觀點，但是其實也搭配了代數的工具，例如在推導(7)式的過程就使用了代數學中實係數一元二次方程式無實根的充要條件，讀者不妨多留意。

參考文獻

1. 周伯欣，李依淳。從幾何觀點推導二階逆矩陣公式。數學傳播季刊, 44(3), 73-75, 2020。
2. 雙週一題網路數學問題徵答活動 2021 年春季第 8 題。https://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/2021s/2021s8.pdf