中學生通訊解題第 158-159 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
15801

有一副紙牌 30 張，在每張紙牌上依序寫上編號 1, 2, 3, ..., 30。今曉清拿走其中含編號 k 開始的連續 k 張紙牌，若剩下的紙牌上之編號和為 289，則 k 值為何？

【簡答】 11

【詳解】

已知拿走紙牌最小數為 k

拿走其中含編號 k 開始的連續 k 張的紙牌的數字為 $k, k+1, k+2, \cdots, k+(k-1)$

因此上述連續 k 張紙牌的數字和為 $\dfrac{(k+(k+(k-1))k}{2}=\dfrac{3k^2-k}{2}$

依題意可得 $1+2+3+\cdots+30-\dfrac{3k^2-k}{2}=289$

$\Rightarrow 465-\dfrac{3k^2-k}{2}=289 \Rightarrow 352=3k^2-k$

$\Rightarrow (3k+32)(k-11)=0 \Rightarrow k=11$ 或 $-\dfrac{32}{3}$（不合）

問題編號
15802

設有理數 a、b 滿足方程式 $a^5+b^5-2a^2b^2=0$，證明 $\sqrt{1-ab}$ 為有理數。

【簡答】 略

【詳解】

(1) 若 $ab=0$，則 $1-ab=1$，結論成立。

(2) 若 $ab\neq 0$，由 $a^5+b^5-2a^2b^2=0 \Rightarrow a^5+b^5=2a^2b^2$，

又由平方公式知

$$\left(a^5-b^5\right)^2=\left(a^5+b^5\right)^2-4a^5b^5=\left(2a^2b^2\right)^2-4a^5b^5=4a^4b^4-4a^5b^5$$

則 $\left(a^5-b^5\right)^2=4a^4b^4\left(1-ab\right)$，可推得 $\left(\dfrac{a^5-b^5}{2a^2b^2}\right)^2=1-ab$，

則 $\sqrt{1-ab}=\left|\dfrac{a^5-b^5}{2a^2b^2}\right|$，又 a 、 b 為有理數，故 $\sqrt{1-ab}$ 為有理數。

問題編號
15803

在直角坐標系中，已知兩定點 $A(-3,3)$，$B(2,-4)$，而動點 C 落在坐標軸上，且 $\triangle ABC$ 為直角三角形，試求 C 的坐標。

【簡答】 $(-\dfrac{36}{5},0)$，$(\dfrac{38}{5},0)$，$(\dfrac{-1\pm\sqrt{73}}{2},0)$，$(0,\dfrac{36}{7})$，$(0,-\dfrac{38}{7})$，$(0,\dfrac{-1\pm\sqrt{73}}{2})$

【詳解】

(1) 當 C 在 x 軸上，設 $C(x,0)$，

$\overline{AB}=\sqrt{(2-(-3))^2+(-4-3)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$，

$\overline{AC}=\sqrt{(x-(-3))^2+(0-3)^2}=\sqrt{x^2+6x+9+9}=\sqrt{x^2+6x+18}$，

$\overline{BC}=\sqrt{(x-2)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{x^2-4x+4+16}=\sqrt{x^2-4x+20}$，

(a) 若 $\angle A=90^\circ$，則 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$，則

$74+x^2+6x+18=x^2-4x+20$，得 $x=-\dfrac{36}{5}$。

(b) 若 $\angle B=90°$，則 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$，則

$74+x^2-4x+20=x^2+6x+18$，得 $x=\dfrac{38}{5}$。

(c) 若 $\angle C=90°$，則 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$，則

$74+x^2+6x+18=x^2-4x+20$，得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{73}}{2}$。

(2) 當 C 在 y 軸上，設 $C(0,y)$，

$\overline{AB}=\sqrt{(2-(-3))^2+(-4-3)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$，

$\overline{AC}=\sqrt{(0-(-3))^2+(y-3)^2}=\sqrt{9+y^2-6y+9}=\sqrt{y^2-6x+18}$，

$\overline{BC}=\sqrt{(0-2)^2+(y-(-4))^2}=\sqrt{4+y^2+8x+16}=\sqrt{y^2+8x+20}$，

(a) 若 $\angle A=90°$，則 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$，則

$74+y^2-6x+18=y^2+8x+20$，得 $y=\dfrac{36}{7}$。

(b) 若 $\angle B=90°$，則 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$，則

$74+y^2+8x+20=y^2-6x+18$，得 $y=-\dfrac{38}{7}$。

(c) 若 $\angle C=90°$，則 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$，則

$y^2-6x+18+y^2+8x+20=74$，得 $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{73}}{2}$。

問題編號
15804

從一個正三十邊形的頂點中任取三點可組成一個三角形，試求其中三個內角均大於 30 度的三角形共有幾個？

【簡答】 910

【詳解】

法 1：

題意即 $a+b+c=30$、 $a,b,c\geq 6$ 整數解的個數；所求為 $\dfrac{30\cdot H_{12}^3}{3}=910$。

法 2：

考慮三角形三個內角各為 6 度的幾倍，共有以下 19 種可能：

$(6,6,18),(6,7,17),......,(6,12,12)$ 共 7 種

$(7,7,16),(7,8,15),......,(7,11,12)$ 共 5 種

$(8,8,14),......$ 共 4 種

$(9,9,12),......$ 共 2 種

$(10,10,10)$ 共 1 種

其中三個數字均相同的有 1 種，共有 $1\times10=10$ 個三角形。

其中恰兩個數字相同的有 6 種，共有 $6\times30=180$ 個三角形。

其中三個數字均不同的有 12 種，共有 $12\times30\times2=720$ 個三角形。

所求共 $30+180+720=910$ 個三角形。

問題編號 15805

已知 ΔABC 的面積為 $24\sqrt{2}$ ，其中兩條中線的長度分別為 6 、 9 ，求第三條中線的長度。

【簡答】 9 或 $3\sqrt{17}$

【詳解】

令第三條中線長度為 $3a$ ，如下圖， G 為 ΔABC 的重心，不妨令 $\overline{AG}=6$ 、 $\overline{BG}=4$ 、 $\overline{CG}=2a$ 。

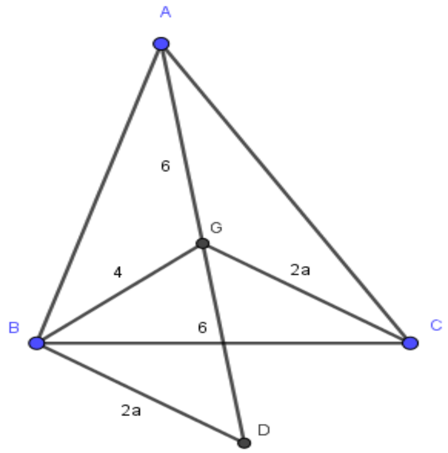
在 $\overline{AG}$ 的延長線上取 D 使 $\overline{GD}=\overline{AG}$ ，則 $\overline{BD}=\overline{CG}=2a$ ，

且易知 ΔABC 的面積為 ΔGBD 面積的三倍。

故 $3\sqrt{(5+a)(5-a)(a+1)(a-1)}=24\sqrt{2}$ ，

令 $a^2=b$ ，可得 $(25-b)(b-1)=128$ ，可解得 $b=17,9$ ，

所求 $3a=9,3\sqrt{17}$ 。



問題編號
15901

求滿足 $y^7-y^3-x^3+x=0$ 的所有質數解。

【簡答】 $x=5,\ \ y=2$

【詳解】

(1) 當 $y=2$ 時， $x^3-x=120$ ， $(x-5)(x^2+5x+24)=0$ ，所以 $x=5$ 。

(2) 當 $y=3$ 時， $x^3-x=x(x^2-x)=2160=2^4\cdot 3^3\cdot 5$ ，x 為質數，
所以 $x=2,3,5$ ，經檢驗不合。

(3) 當 $y\geq 5$ 時，
$x^3>x^3-x=y^7-y^3\geq 5y^6-y^3\geq y^6+20y^5-y^3\geq y^6+6y^5+70y^4-y^3$
$>y^6+6y^5+15y^4+20y^3+15y^2+6y+1=(y+1)^6$ ，因此
$x^3>(y+1)^6$ ，
所以 $x>(y+1)^2>y^2+1>y+1>y>y-1$ ，
得 x 不是 $y^3(y-1)(y+1)(y^2+1)$ 的因數，
而 $x^3-x=x(x^2-x)=y^3(y-1)(y+1)(y^2+1)$ ，
得 $x\,|\,y^3(y-1)(y+1)(y^2+1)$ ，矛盾。
故滿足條件只有 $x=5,\ \ y=2$ 時。

問題編號 15902

若整數 m 使方程 $x^2-mx+m+980=0$ 的根為非零整數，則這樣的整數 m 有多少個？

【簡答】 5

【詳解】

設方程式的兩整數根分別為 α,β，則 $\alpha+\beta=m$ ，$\alpha\beta=m+980$，

即 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=980+1=981=(\alpha-1)(\beta-1)$。

故 $\alpha-1=\pm1,\pm3,\pm9$ ；$\beta-1=\pm981,\pm327,\pm109$ 。

所以，這樣的整數 m 共 5 個。

問題編號 15903

有 10 名同學站在操場上玩遊戲，他們彼此間的距離各不相等。每人手中有一把水槍，遊戲規則是：每人都向離自己最近的人打一槍。

試證明：每一個人至多挨了 5 槍。

【證明】

設有三個人 A、B、C，若 B 射向 C，A 也射向 C，則在 $\Delta\mathrm{ABC}$ 中 BC 邊最長，且 BC 邊所對的角 $\angle\mathrm{A}$ 最大，故 $\angle\mathrm{A}>60°$。

若有一個人至少挨了 6 槍，那麼以 A 為頂點的 6 個都大於 $60°$ 的角的和就大於 $360°$，產生矛盾。

問題編號 15904

若一圓上 100 個點將圓周等分，任選其中三點皆可形成一個三角形，請問這些三角形中有幾個是「銳角」三角形？

【簡答】39200

【證明】

任選三點共有 $100\times 99\times 98\div 6=161700$ 個三角形，

其中直角和鈍角三角形的三點必落於半圓中，

直角三角形有 $50\times 98=4900$ 個，

最大角為 $(180(1-\dfrac{k}{100}))^0$ 的鈍角三角形有 $100(k-1)$ 個 $(k=2,\cdots,49)$，

故銳角三角形有 $161700-4900-100(1+2+...+48)=39200$ 個

問題編號
15905

如圖，在 4×4 的方格中已經填有 16 個數字。可以對格中數字進行如下操作：

將一行或一列或一條對角線上的數字同時加上或減去一個自然數。

試問：能否經過有限次操作後使 16 個數字相等。

4	6	3	7
3	8	7	1
11	3	1	5
3	2	4	3

【簡答】不能

【詳解】

我們試著操作，看能否使 16 個數字相等，我們發現，這是一件很複雜的事情。下面試圖證明不可能經過有限次操作後使 16 個數字相等。

我們如果能找到一個不變量，這個不變量在任何次操作後都不變，則可以利用這個不變量證明不可能。

任何一次操作中，4 個數字同時加上或減去一個自然數，所以這 16 個數之和模 4 不變。如果這 16 個數字相等，則 16 個數字之和模 4 為 0，而現在 16 個數字之和為 71，模 4 為 3，所以無論經過幾次操作，都不可能使這 16 個數字相等。