以排列記號數描述前 N 個連續正整數等冪次和的多項式函數表示式(上)

李 輝 濱

嘉義市私立輔仁中學 退休教師

壹、前言

「前 n 項連續正整數等冪次求和公式」有許多種不同演算法；有伯努利公式法(Bernoulli formula)，有以二項式定理累加遞推法，有以遞推式求不定積分法，有以生成函數微分法，有以指定係數值並搭配聯立方程式迭代法逐步計算(文獻[7])，… 等等，諸法各異其趣，也分別演繹而衍生出各類實質關鍵發展。

本文特以另 2 類不同觀點來闡明主題內涵： 第一、 對 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$ 的函數式先適當地擴充其結構而形成近似的新函數式 $\sum_{k=-1}^{n} k^m = g(n) = (-1)^m + f(n)$，這新函數式仍然是 n 的 $m+1$ 次多項式，再就此新函數式的前 $m+2$ 個函數數據值依 自變數 $n = -1,0,1,2,3,4,\cdots,m$ 順序排列成自變數與函數值相對應的 2 橫列，接著對這 2 橫列開始做 1 階, 2 階, 3 階, … , $m+1$ 階等等的差分運算而得出新函數式的差分運算表。最後，應用此差分運算表推演出主題結果。 第二、 直接就排列記號數 $P_m^n = \dfrac{n\,!}{(n-m)\,!}$ 的運算本質分析起；首先展開各 P_m^n 排列數裡 n 的 m 次多項式而得到其依序編列的一組對應係數數列，如： $m=4$ 時， $P_4^n = n\,(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$ 其對應係數數列為〈 1, −6, 11, −6 〉，每一組係數數列皆可由前一組係數數列遞推而得，子題之一將以矩陣運算迭代法逐步計算出各組係數數列。接著，子題之二要依序分析各 $\dfrac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1}$ 的展開式內涵，發現其展開式內容恰可描述成 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的線性組合型態， $r = 1,2,3,\cdots,m$ ，即 $\dfrac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1} = \sum_{r=1}^{m} u_{m+1-r}^{[m]}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-r}\right)$ ， $u_{m+1-r}^{[m]}$ 為整數， $u_m^{[m]} = 1$ ，尤其珍貴的是此處出現的係數數列〈 $u_{m+1-r}^{[m]}$ 〉恰與 P_m^n 展開式對應係數數列完全相同。子題之三就是要透過應用此 $\dfrac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1}$

$=\sum_{r=1}^{m} u_{m+1-r}^{[m]}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-r}\right)$ 等式關係並輔以矩陣運算來求解出以排列記號數 P_{r+1}^{n+1} 的線性組合形成 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$，即會得到 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}=\sum_{r=1}^{m} a_{m+1-r}\cdot P_{m+2-r}^{n+1}$，此處係數 a_{m+1-r} 為有理數係數。

根據經驗彙整的 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 已知前 13 個多項式函數，文獻[5][6]，其內容如下述：

$$\sum_{k=1}^{n} k=f(n)=\frac{1}{2}n^{2}+\frac{1}{2}n \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^{2}=\frac{1}{3}n^{3}+\frac{1}{2}n^{2}+\frac{1}{6}n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{3}=f(n)=\frac{1}{4}n^{4}+\frac{1}{2}n^{3}+\frac{1}{4}n^{2}=\frac{1}{4}[n(n+1)]^{2} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{4}=f(n)=\frac{1}{5}n^{5}+\frac{1}{2}n^{4}+\frac{1}{3}n^{3}-\frac{1}{30}n=n(n+1)\cdot\frac{6n^{3}+9n^{2}+n-1}{30} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{5}=f(n)=\frac{1}{6}n^{6}+\frac{1}{2}n^{5}+\frac{5}{12}n^{4}-\frac{1}{12}n^{2}=\frac{1}{12}n^{2}(n+1)(2n^{3}+4n^{2}+n-1) \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{6}=f(n)=\frac{1}{7}n^{7}+\frac{1}{2}n^{6}+\frac{1}{2}n^{5}-\frac{1}{6}n^{3}+\frac{1}{42}n \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{7}=f(n)=\frac{1}{8}n^{8}+\frac{1}{2}n^{7}+\frac{7}{12}n^{6}-\frac{7}{24}n^{4}+\frac{1}{12}n^{2} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{8}=f(n)=\frac{1}{9}n^{9}+\frac{1}{2}n^{8}+\frac{2}{3}n^{7}-\frac{7}{15}n^{5}+\frac{2}{9}n^{3}-\frac{1}{30}n \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{9}=f(n)=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^{9}+\frac{3}{4}n^{8}-\frac{7}{10}n^{6}+\frac{1}{2}n^{4}-\frac{3}{20}n^{2} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10}=f(n)=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^{9}-n^{7}+n^{5}-\frac{1}{2}n^{3}+\frac{5}{66}n \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{11}=f(n)=\frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}-\frac{11}{8}n^{8}+\frac{11}{6}n^{6}-\frac{11}{8}n^{4}+\frac{5}{12}n^{2} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{12}=f(n)=\frac{1}{13}n^{13}+\frac{1}{2}n^{12}+n^{11}-\frac{11}{6}n^{9}+\frac{22}{7}n^{7}-\frac{33}{10}n^{5}+\frac{5}{3}n^{3}-\frac{691}{2730}n \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{13}=\frac{1}{14}n^{14}+\frac{1}{2}n^{13}+\frac{13}{12}n^{12}-\frac{143}{60}n^{10}+\frac{143}{28}n^{8}-\frac{143}{20}n^{6}+\frac{65}{12}n^{4}-\frac{691}{420}n^{2}$$

這些 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 型的每一函數中各項分數係數值表示式都展現了其群體規律性的特徵，如第 1 項的係數值 $1/(m+1)$ 與第 2 項的係數值 $1/2$ 皆提供了分析思考線索，參考引用上述這些多項式函數更能增強助益主題內容的實質研究與驗證。

貳、本文

全文區分成 2 主題：文意內容盡力詳細地敘述出縝密思維與運算演繹觀點；

[主題一]、以新函數式 $g(n)=\sum_{k=-1}^{n} k^m=(-1)^m+f(n)$ 的差分運算表推演出主題結果

檢視對照多項函數式 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} k^m$ 形式結構而加以仿效且擴充成相關近似的新函數式 $g(n)=\sum_{k=-1}^{n} k^m=(-1)^m+\sum_{k=1}^{n} k^m=(-1)^m+f(n)$，此兩函數多項式的差異處僅是單一的常數項 $(-1)^m$，由 $f(n)$ 與 $g(n)$ 兩者相關關係可知；若找到其中一個函數就能立刻確認找到另一個。所以，先求出了 $g(n)$ 也必順勢求得 $f(n)$。

[A]. 現在選取新函數式 $g(n)=\sum_{k=-1}^{n} k^m$ 並編製其差分運算表

取 $n=\ -1,0,1,2,3,4,\ \cdots,m$ 再依序計算出函數 $g(n)$ 與 $\Delta^J g$ 的各對應函數值列表；

n： -1 　 0 　 1 　 2 　 3 　 $\cdots$ 　 $m-1$ 　 m

$g(n)$：$(-1)^m$ 　 $(-1)^m$ 　 $(-1)^m+1$ 　 $(-1)^m+1+2^m$ 　 $\sum_{k=-1}^{3} k^m$ 　 $\cdots$ 　 $\sum_{k=-1}^{m-1} k^m$ 　 $\sum_{k=-1}^{m} k^m$

Δg： 0 　 1 　 2^m 　 3^m 　 4^m 　 $\cdots$ 　 $(m-1)^m$ 　 m^m

$\Delta^2 g$： 1 　 2^m-1 　 3^m-2^m 　 4^m-3^m 　 $\cdots$ 　 $m^m-(m-1)^m$

$\Delta^3 g$： $2^m-2\cdot 1$ 　 $3^m-2\cdot 2^m+1$ 　 $4^m-2\cdot 3^m+2^m$ 　 $\cdots$

$(m-1)^m-2\cdot(m-2)^m+(m-3)^m$ 　 $m^m-2\cdot(m-1)^m+(m-2)^m$

$\Delta^4 g$： $3^m-3\cdot 2^m+3\cdot 1$ 　 $4^m-3\cdot 3^m+3\cdot 2^m-1$ 　 $\cdots$

$m^m-3\cdot(m-1)^m+3\cdot(m-2)^m-(m-3)^m$

$\Delta^5 g$： $4^m-4\cdot 3^m+6\cdot 2^m-4\cdot 1$ 　 $5^m-4\cdot 4^m+6\cdot 3^m-4\cdot 2^m+1$ 　 $\cdots$

$m^m-4\cdot(m-1)^m+6\cdot(m-2)^m-4\cdot(m-3)^m+(m-4)^m$

$\Delta^6 g$： $5^m-5\cdot 4^m+10\cdot 3^m-10\cdot 2^m+5\cdot 1$ 　 $\cdots$

$\Delta^7 g$： $6^m-6\cdot 5^m+15\cdot 4^m-20\cdot 3^m+15\cdot 2^m-6\cdot 1$ 　 $\cdots$

$\vdots$ 　 $\vdots$

$$\Delta^J g:\quad (J-1)^m - C_1^{J-1}\cdot(J-2)^m + C_2^{J-1}\cdot(J-3)^m - C_3^{J-1}\cdot(J-4)^m + \cdots$$
$$+(-1)^{J-4}\cdot C_{J-4}^{J-1}\cdot 3^m + (-1)^{J-3}\cdot C_{J-3}^{J-1}\cdot 2^m + (-1)^{J-2}\cdot C_{J-2}^{J-1}\cdot 1$$
$$= \sum_{u=0}^{J-2}(-1)^u\cdot C_u^{J-1}\cdot(J-1-u)^m \qquad \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta^m g:\quad (m-1)^m - C_1^{m-1}\cdot(m-2)^m + C_2^{m-1}\cdot(m-3)^m - C_3^{m-1}\cdot(m-4)^m + \cdots$$
$$+(-1)^{m-4}\cdot C_{m-4}^{m-1}\cdot 3^m + (-1)^{m-3}\cdot C_{m-3}^{m-1}\cdot 2^m + (-1)^{m-2}\cdot C_{m-2}^{m-1}\cdot 1$$
$$= \sum_{u=0}^{m-2}(-1)^u\cdot C_u^{m-1}\cdot(m-1-u)^m \qquad \cdots$$

$$\Delta^{m+1} g:\quad m^m - C_1^{m}\cdot(m-1)^m + C_2^{m}\cdot(m-2)^m - C_3^{m}\cdot(m-3)^m + \cdots$$
$$+(-1)^{m-3}\cdot C_{m-3}^{m}\cdot 3^m + (-1)^{m-2}\cdot C_{m-2}^{m}\cdot 2^m + (-1)^{m-1}\cdot C_{m-1}^{m}\cdot 1$$
$$= \sum_{u=0}^{m-1}(-1)^u\cdot C_u^{m}\cdot(m-u)^m$$

上述就是經歷計算整理而編製出新函數式 $g(n)=\sum_{k=-1}^{n}k^m$ 的差分運算表。因 $g(n)$ 是 n 的 $m+1$ 次多項式，當計算到第 $m+1$ 階差分運算列，此列的所有數值都會是相等的固定常數值，此常數值就是 $m+1$ 次數項的係數值 a_{m+1} 再乘以 $(m+1)!$。所以差分表最末一列的常數值為 $\sum_{u=0}^{m-1}(-1)^u\cdot C_u^m\cdot(m-u)^m = a_{m+1}\cdot(m+1)!$，而又因為 $\sum_{u=0}^{m-1}(-1)^u\cdot C_u^m\cdot(m-u)^m = \sum_{u=0}^{m}(-1)^u\cdot C_u^m\cdot(m-u)^m = m!$，可得下列等式 $a_{m+1}\cdot(m+1)!=m!$。因此，第 $m+1$ 次數項的係數值 a_{m+1} 恰為 $1/(m+1)$。

[B]. 應用牛頓插值公式法，可以找到一個多項式重新生成上述那些函數值[6]；

此處適合以牛頓等間距插值公式法：先取出上述差分運算表中每一階差分運算列的第 1 項數值 $\Delta^J g(-1)$，此數值再乘上各階對應的乘數因子；例如：依序是第 0 階不乘，維持原數值。第 1 階乘以 $\dfrac{(n+1)}{1!}$，第 2 階乘以 $\dfrac{(n+1)n}{2!}$，第 3 階乘以 $\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3!}$，第 4 階乘以 $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}$，…，第 J 階的乘數因子為 $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n+2-J)}{J!}$，…，第 m 階乘 $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n+2-m)}{m!}$

，第 $m+1$ 階要乘以 $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n+2-m)(n+1-m)}{(m+1)\ !}$，然後全體再線性加法相加起來，而得到牛頓插值多項式函數 $g(n)$！

觀察第 J 階的乘數因子為 $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n+2-J)}{J\ !}$，這乘數因子可以轉換成

$$\frac{(n+1)!}{J\ !\cdot(n+1-J)!}=\frac{P_J^{n+1}}{J\ !}=\frac{P_{(J-1)+1}^{n+1}}{[(J-1)+1]\ !}\text{，}J=1,2,3,\cdots,m,m+1\text{，}$$

得牛頓插值多項式函數 $g(n)$ 的第 $J+1$ 項完整項實際內涵為

$$[\sum_{u=0}^{J-2}(-1)^u\cdot C_u^{J-1}\cdot(J-1-u)^m]\cdot\frac{P_{(J-1)+1}^{n+1}}{[(J-1)+1]\ !}\text{。}$$

因此，$g(n)=(-1)^m+0\cdot\dfrac{(n+1)}{1\ !}+1\cdot\dfrac{P_{1+1}^{n+1}}{(1+1)!}+(2^m-2\cdot1)\cdot\dfrac{P_{2+1}^{n+1}}{(2+1)!}$

$$+(3^m-3\cdot2^m+3\cdot1)\cdot\frac{P_{3+1}^{n+1}}{(3+1)!}+\cdots+[\sum_{u=0}^{J-2}(-1)^u\cdot C_u^{J-1}\cdot(J-1-u)^m]\cdot\frac{P_{(J-1)+1}^{n+1}}{[(J-1)+1]\ !}$$

$$+\cdots+[\sum_{u=0}^{m-1}(-1)^u\cdot C_u^m\cdot(m-u)^m]\cdot\frac{P_{m+1}^{n+1}}{(m+1)\ !}$$

$$=(-1)^m+\sum_{J=2}^{m+1}\{[\sum_{u=0}^{J-2}(-1)^u\cdot C_u^{J-1}\cdot(J-1-u)^m]\cdot\frac{P_{(J-1)+1}^{n+1}}{[(J-1)+1]\ !}\}=(-1)^m+f(n)\qquad(1)$$

(1)式就是 $g(n)$ 以排列記號數描述前 N+2 個連續整數等冪次和的多項式表示式！

再順勢直接得出： $f(n)=\sum_{J=2}^{m+1}\{[\sum_{u=0}^{J-2}(-1)^u\cdot C_u^{J-1}\cdot(J-1-u)^m]\cdot\dfrac{P_{(J-1)+1}^{n+1}}{[(J-1)+1]\ !}\}$

又因為恆等式 $\sum_{J=2}^{m+1}\{[\sum_{u=0}^{J-2}(-1)^u\cdot C_u^{J-1}\cdot(J-1-u)^m]\cdot\dfrac{P_{(J-1)+1}^{n+1}}{[(J-1)+1]\ !}\}$

$$=\sum_{J=1}^{m}\{[\sum_{u=0}^{J-1}(-1)^u\cdot C_u^J\cdot(J-u)^m]\cdot\frac{P_{J+1}^{n+1}}{(J+1)\ !}\}$$

所以得出： $f(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m=\sum_{J=1}^{m}\{[\sum_{u=0}^{J-1}(-1)^u\cdot C_u^J\cdot(J-u)^m]\cdot\dfrac{P_{J+1}^{n+1}}{(J+1)\ !}\}\qquad(2)$

這牛頓插值公式法的操作原理請參閱文末之參考文獻 [6]。

將 m 的各自然數值代入(2)式的 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$ 函數中，計算後得出下列對應式；

$m=1$，$\sum_{k=1}^{n}k=1\cdot\dfrac{P_{1+1}^{n+1}}{2\ !}=\dfrac{1}{2}\cdot P_2^{n+1}$

$m=2$，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1} + [\,2^2-2\,]\cdot \frac{P_{2+1}^{n+1}}{3\,!} = \frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1} + \frac{1}{3}\cdot P_3^{n+1}$

$m=3$，$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1} + [\,2^3-2\,]\cdot \frac{P_{2+1}^{n+1}}{3\,!} + [\,3^3-3\cdot 2^3+3\cdot 1\,]\cdot \frac{P_{3+1}^{n+1}}{4\,!}$

$= \frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1} + P_3^{n+1} + \frac{1}{4}\cdot P_4^{n+1}$

$m=4$，$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}\cdot P_5^{n+1} + \frac{3}{2}\cdot P_4^{n+1} + \frac{7}{3}\cdot P_3^{n+1} + \frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1}$

$m=5$，$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6}\cdot P_6^{n+1} + \frac{1}{2}\cdot P_5^{n+1} + \frac{25}{4}\cdot P_4^{n+1} + 5\cdot P_3^{n+1} + \frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1}$

$\vdots$

若有需要，即可繼續計算推演下去，⋯，得到所想要的 m 確定值。

因此，(2)式就是以排列記號數描述前 N 個連續正整數等冪次和的多項式函數表示式！至此，第一階段已經完整正確證明出主題標的所揭示實質內涵的意義。

[主題二]、以指定係數值的運算規範準則 與 聯立方程式法 推演出主題結果

繼以思維演繹發展和設計引導推理而規劃列舉出 4 個子題來分類論述，再連繫各子題綜合研析、對比歸納推導出正確的結果，探索流程如下；

[A]. 排列記號數 P_m^n 展開的 m 次多項式與其一組對應係數數列：

(a1). 逐一展開 P_m^n 的多項式並觀察出對應係數出現的規律性

$m=1$，$P_1^n = n$，對應係數：〈 1 〉

$m=2$，$P_2^n = n\,(n-1) = n^2 - n$，對應係數數列：〈 1, −1 〉

$m=3$，$P_3^n = n\,(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$，對應係數數列：〈 1, −3, 2 〉

$m=4$，$P_4^n = n\,(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$，

對應係數數列：〈1, −6, 11, −6〉

$m=5$，$P_5^n = n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 50n^2 + 24n$，

對應係數數列：〈1, −10, 35, −50, 24〉

$m=6$，$P_6^n = n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

$= n^6 - 15n^5 + 85n^4 - 225n^3 + 274n^2 - 120n$，

對應係數數列：〈 1, −15, 85, −225, 274, −120 〉

$m=7$，$P_7^n = n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$，

$= n^7 - 21n^6 + 175n^5 - 735n^4 + 1624n^3 - 1764n^2 + 720n$

對應係數數列：〈1, −21, 175, −735, 1624, −1764, 720〉

$m=8$， $P_8^n = n\ (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ ，

$= n^8 - 28n^7 + 322n^6 - 1960n^5 + 6769n^4 - 13132n^3 + 13608n^2 - 5040n$

對應係數數列：〈1, −28, 322, −1960, 6769, −13132, 13068, −5040〉

⋮

觀察比對上述 $m=1$ 到 $m=8$ 等各多項式的前後對應係數數列的相關關係，可發現到前後數列的相關特徵性質； (i) 每一數列的第 1 項必為 1 ， (ii) 若前數列以 m 值構成，則緊鄰著後數列的第 $i+1$ 項必由 $-m$ 乘上前數列的第 i 項完之後再加上前數列的第 $i+1$ 項所構建而成。範例： $m=4$ 係數數列：〈1, −6, 11, −6〉，則緊鄰者為 $m+1$=5 的後數列其第 2 項即為(−4)×1+(−6)=(−10)，第 3 項為(−4)× (−6)+11 =35，第 4 項為(−4)×11+(−6)=(−50)，第 5 項為(−4)×(−6)+0 =24，完成後的 $m+1$= 5 係數數列為 〈1, −10, 35, −50, 24〉 ，以此類推，可持續地推算出下一個 $m=6$ 的完整對應係數數列，其第 2 項即為(−5)×1+(−10)=(−15)，第 3 項為(−5)×(−10)+35 =85，第 4 項為(−5)×35+(−50)=(−225)，第 5 項為(−5)×(−50)+ 24 = 274，第 6 項為 (−5)×24 + 0 = −120，完成後的 $m=6$ 完整對應係數數列為 〈 1, −15, 85, −225, 274, −120 〉 ，⋯，如此可無盡地逐項逐數作遞迴運算以求得各組完整對應係數數列。(iii) 係數的正負符號呈現了交替排列的規律性。

(a2). 由 $P_m^n = \dfrac{n\ !}{(n-m)\ !} = n\ (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+3)(n-m+2)(n-m+1)$

若將此 P_m^n 的展開式寫成 n 的 m 次多項式函數，其結構型式如下；

$$P_m^n = \frac{n\ !}{(n-m)\ !} = n^m - J_2^{[m]}\cdot n^{m-1} + J_3^{[m]}\cdot n^{m-2} - J_4^{[m]}\cdot n^{m-3} + \cdots + (-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m]}\cdot n^{m-i+1} + (-1)^i\cdot J_{i+1}^{[m]}\cdot n^{m-i} + \cdots + (-1)^{m-3}\cdot J_{m-2}^{[m]}\cdot n^3 + (-1)^{m-2}\cdot J_{m-1}^{[m]}\cdot n^2 + (-1)^{m-1}\cdot J_m^{[m]}\cdot n \tag{3}$$

此處符號 $J_i^{[m]}$ 的意義表示出 P_m^n 的展開式中第 i 項的係數正值，且 $J_1^{[m]}=1$ 。

由 $P_{m+1}^n = \dfrac{n\ !}{(n-m-1)\ !} = n\ (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+3)(n-m+2)(n-m+1)(n-m)$

$$\begin{aligned}
&= \Big[\ n^m - J_2^{[m]}\cdot n^{m-1} + J_3^{[m]}\cdot n^{m-2} - J_4^{[m]}\cdot n^{m-3} + \cdots + (-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m]}\cdot n^{m-i+1} + (-1)^i\cdot \\
&\quad J_{i+1}^{[m]}\cdot n^{m-i} + \cdots + (-1)^{m-3}\cdot J_{m-2}^{[m]}\cdot n^3 + (-1)^{m-2}\cdot J_{m-1}^{[m]}\cdot n^2 + (-1)^{m-1}\cdot J_m^{[m]}\cdot n\ \Big]\cdot(n-m) \\
&= n^{m+1} - (m + J_2^{[m]})\,n^m + (m\cdot J_2^{[m]} + J_3^{[m]})\,n^{m-1} - (m\cdot J_3^{[m]} + J_4^{[m]})\,n^{m-2} + \cdots + \\
&\quad \Big\{\ (-m)\cdot[(-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m]}] + (-1)^i\cdot J_{i+1}^{[m]}\ \Big\}\cdot n^{m-i+1} + \cdots + \\
&\quad \Big\{\ (-m)\cdot[(-1)^{m-2}\cdot J_{m-1}^{[m]}] + (-1)^{m-1}\cdot J_m^{[m]}\ \Big\}\cdot n^2 + (-m)\cdot[(-1)^{m-1}\cdot J_m^{[m]}]\cdot n
\end{aligned} \tag{4}$$

再將此 P_{m+1}^{n} 的展開式(4)式寫成 n 的 $m+1$ 次多項式函數，其結構型式如下；

$$P_{m+1}^{n}=\frac{n\ !}{(n-m-1)\ !}=n^{m+1}-J_2^{[m+1]}\cdot n^{m}+J_3^{[m+1]}\cdot n^{m-1}-J_4^{[m+1]}\cdot n^{m-2}+\cdots+$$
$$(-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m+1]}\cdot n^{m-i+2}+(-1)^{i}\cdot J_{i+1}^{[m+1]}\cdot n^{m-i+1}+\cdots+(-1)^{m-2}\cdot J_{m-1}^{[m+1]}\cdot n^{3}+$$
$$(-1)^{m-1}\cdot J_m^{[m+1]}\cdot n^{2}+(-1)^{m}\cdot J_{m+1}^{[m+1]}\cdot n \tag{5}$$

(4)式與(5)式相等，對照(3)式與(5)式兩者的對應係數值數列分別為下列形式；

$\langle\ 1,\ -J_2^{[m]},\ J_3^{[m]},\ -J_4^{[m]},\cdots,\ (-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m]},\ (-1)^{i}\cdot J_{i+1}^{[m]}\ ,\cdots,\ (-1)^{m-1}\cdot J_m^{[m]}\ \rangle$ 與

$\langle\ 1,\ -J_2^{[m+1]},J_3^{[m+1]},\ -J_4^{[m+1]},\cdots,(-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m+1]},\ (-1)^{i}\cdot J_{i+1}^{[m+1]}\ ,\cdots,\ (-1)^{m-1}\cdot J_{m+1}^{[m+1]}\ \rangle$

則此前後 P_m^n 與 P_{m+1}^n 兩多項式的對應係數值之間的遞迴運算關係式為下列形式；

$$(-m)\cdot[\,(-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m]}\,]+(-1)^{i}\cdot J_{i+1}^{[m]}=(-1)^{i}\cdot J_{i+1}^{[m+1]}\quad \text{且 } J_1^{[m]}=J_1^{[m+1]}=1 \tag{6}$$

又 $J_{m+i}^{[m]}=J_{m+1+i}^{[m+1]}=0$ ，秉持這遞迴運算關係式即可求得各組完整對應係數值數列。

這就呼應了(a1).節內所敘述的前後兩對應係數數列相關關係的遞迴運算準則。

[B]. 以矩陣運算迭代法逐步遞迴計算出各組係數值數列

以矩陣運算型式代替遞迴迭代計算會讓演繹推導過程的画面結構更見精簡具體化，現在將遞迴運算關係式(6)式歸納轉換寫成矩陣運算迭代式如下；

$$\begin{bmatrix}(-m) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{i-1}\cdot J_i^{[m]}\\(-1)^{i}\cdot J_{i+1}^{[m]}\end{bmatrix}=[\,(-1)^{i}\cdot J_{i+1}^{[m+1]}\,] \tag{7}$$

將(7)式的單列單欄(行)各位置元素仔細比對，規劃配置，巧妙地鋪進 $m+1$ 階方陣中並審視前後兩組係數值數列而整合成矩陣運算迭代式，完成型如下表述；

由理念歸劃製作出矩陣運算迭代式一般式情形如下所示； (由 m 計算至 $m+1$)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0\\-m&1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\0&-m&1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&0&-m&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&0&-m&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&0&0&0&\cdots&-m&1&0\\0&0&0&0&0&\cdots&0&-m&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-J_2^{[m]}\\J_3^{[m]}\\-J_4^{[m]}\\J_5^{[m]}\\\vdots\\(-)^{m-2}\cdot J_{m-1}^{[m]}\\(-)^{m-1}\cdot J_m^{[m]}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-J_2^{[m+1]}\\J_3^{[m+1]}\\-J_4^{[m+1]}\\J_5^{[m+1]}\\\vdots\\(-)^{m-2}\cdot J_{m-1}^{[m+1]}\\(-)^{m-1}\cdot J_m^{[m+1]}\\(-)^{m}\cdot J_{m+1}^{[m+1]}\end{bmatrix} \tag{8}$$

這(8)式就是一般型的矩陣運算迭代式，應用起來很方便又精確。左側的第 1 個大矩陣是 $m+1$ 階方陣，它自左上角到右下角的最長主對角線所有位置都是數字 1，然後 1 的左鄰位置都是填上 $-m$，而其餘位置都佈滿了數字 0，整體方陣結構顯示了數字與位置富有條理配置的規律性！矩陣演算的(8)式就是製造出完整對應係數值數列的適切生成矩陣運算迭代式。

將(8)式的 m 正整數值與前組完整係數值各 $J_i^{[m]}$ 一一分別代入生成矩陣運算式中，透過嚴謹精確的計算即可得出後組的各完整係數值 $J_i^{[m+1]}$，其流程如下；

(b1). $m=1$， $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 得出 P_2^n 對應係數數列：〈 1, −1 〉

(b2). $m=2$， $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 得 P_3^n 係數數列：〈 1, −3, 2 〉

(b3). $m=3$， $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 11 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ P_4^n 係數數列：〈1, −6, 11, −6〉

(b4). $m=4$， $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 35 \\ -50 \\ 24 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ P_5^n ：〈1,−10, 35,−50, 24〉

(b5). $m=5$， $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 35 \\ -50 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -15 \\ 85 \\ -225 \\ 274 \\ -120 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ P_6^n 係數數列：〈 1, −15, 85, −225, 274, −120 〉

(b6). $m=6$，$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -15 \\ 85 \\ -225 \\ 274 \\ -120 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -21 \\ 175 \\ -735 \\ 1624 \\ -1764 \\ 720 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ P_7^n 係數數列：〈1, −21, 175, −735, 1624, −1764, 720〉

(b7). 續得 P_8^n 係數數列：〈1, −28, 322, −1960, 6769, −13132, 13068, −5040〉

P_9^n 係數數列：〈1, −36, 546, −4536, 22449, −67284, 118124, −109584, 40320〉

P_{10}^n 係數：〈1, −45, 870, −9450, 63273, −269325, 723680, −1172700, 1026576, −362880〉

⋮

如此持續依序作生成矩陣運算迭代式演算，必可感受到清晰分明、簡潔精要且快速地逐一計算出各組單欄(行)多列矩陣的正確完整對應係數值。

[C]. 演繹、觀察 $\dfrac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1}=\sum_{r=1}^{m}u_{m+1-r}^{[m]}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{m+1-r}\right)$ 等式關係式

應用前言敘述中的 $\sum_{k=1}^{n}k^m$ 已知前 13 個多項式函數來推演下列等式；

(c1). $\dfrac{1}{2}\cdot P_2^{n+1}=\dfrac{(n+1)n}{2}=\sum_{k=1}^{n}k$ $\Rightarrow$ 得出 $\dfrac{1}{2}\cdot P_2^{n+1}$ 係數：〈 1 〉

(c2). $\dfrac{1}{3}\cdot P_3^{n+1}=\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3}=\dfrac{(n+1)n}{3}\cdot(n-1)=\dfrac{(n+1)n}{2}\cdot\dfrac{2(n-1)}{3}$

$=\dfrac{(n+1)n}{2}\cdot\left(\dfrac{2n+1}{3}-1\right)=\dfrac{(n+1)n(2n+1)}{6}-\dfrac{(n+1)n}{2}=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$\Rightarrow$ 得出 $\dfrac{1}{3}\cdot P_3^{n+1}$ 係數數列：〈 1, −1 〉

(c3). $\dfrac{1}{4}\cdot P_4^{n+1}=\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}=\dfrac{(n+1)n}{4}\cdot(n-1)(n-2)$ ，觀察最後兩乘積項的

$(n-1)(n-2)$ 展開式為 n^2-3n+2，此 $(n-1)(n-2)$ 的係數數列為〈 1, −3, 2 〉，

由 $\frac{1}{4}\cdot P_4^{n+1}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}=\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{(n^2-3n+2)}{2}$

$$=\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{(n^2+n-4n+2)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}\cdot[\frac{(n^2+n)}{2}-2n+1]$$

$$=\frac{(n+1)n}{2}\cdot[\frac{(n^2+n)}{2}-3\cdot\frac{2n+1}{3}+2]$$

$$=[\frac{(n+1)n}{2}]^2-3\cdot\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{(n+1)n}{2}=\sum_{k=1}^n k^3-3\cdot\sum_{k=1}^n k^2+2\cdot\sum_{k=1}^n k$$

$\Rightarrow$ 得出 $\frac{1}{4}\cdot P_4^{n+1}$ 係數數列：〈 1, −3, 2 〉

(c4). $\frac{1}{5}\cdot P_5^{n+1}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5}=\frac{(n+1)n}{5}\cdot(n-1)(n-2)(n-3)$

[註： 此 $\frac{1}{5}\cdot P_5^{n+1}$ 表示式中最後 3 個連乘積項 $(n-1)(n-2)(n-3)$ 展開式的對應係數數列為〈1, −6, 11, −6〉]

$$=(n+1)n\cdot\frac{(n^3-6n^2+11n-6)}{5}=(n+1)n\cdot\frac{(6n^3+9n^2+n-1-45n^2+65n-35)}{30}$$

$$=(n+1)n\cdot\frac{(6n^3+9n^2+n-1)}{30}-(n+1)n\cdot\frac{9n^2-13n+7}{6}$$

$$=\sum_{k=1}^n k^4-\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{9n^2-13n+7}{3}=\sum_{k=1}^n k^4-\frac{(n+1)n}{2}\cdot(3n^2-\frac{13n}{3}+\frac{7}{3})$$

$$=\sum_{k=1}^n k^4-\frac{(n+1)n}{2}\cdot[3(n^2+n)-\frac{22n}{3}+\frac{7}{3}]$$

$$=\sum_{k=1}^n k^4-6\cdot\sum_{k=1}^n k^3+\frac{(n+1)n}{2}\cdot[\frac{22n}{3}-\frac{7}{3}]$$

$$=\sum_{k=1}^n k^4-6\cdot\sum_{k=1}^n k^3+\frac{(n+1)n}{2}\cdot[\frac{22n+11}{3}-\frac{18}{3}]$$

$$=\sum_{k=1}^n k^4-6\cdot\sum_{k=1}^n k^3+11\cdot\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}-6\cdot\frac{(n+1)n}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^n k^4-6\cdot\sum_{k=1}^n k^3+11\cdot\sum_{k=1}^n k^2-6\cdot\sum_{k=1}^n k$$

$\Rightarrow$ 得出 $\frac{1}{5}\cdot P_5^{n+1}$ 係數數列：〈1, −6, 11, −6〉

(c5). $\frac{1}{6}\cdot P_6^{n+1}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6}=\frac{(n+1)n}{6}\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$=(n+1)n\cdot\frac{(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)}{6}$ ，此 $\frac{1}{6}\cdot P_6^{n+1}$ 表示式中最後 4 個連乘積項 $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ 展開式的對應係數數列為〈1, −10, 35, −50, 24〉，同理可得

$$\frac{1}{6}\cdot P_6^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}k^5-10\sum_{k=1}^{n}k^4+35\sum_{k=1}^{n}k^3-50\sum_{k=1}^{n}k^2+24\sum_{k=1}^{n}k$$

$\Rightarrow$ 省略運算而得出 $\frac{1}{6}\cdot P_6^{n+1}$ 係數數列：〈1, −10, 35, −50, 24〉

(c6). 由(c1). ~ (c5).節演算出的係數數列〈$u_{m+2-i-r}^{[m+1-i]}$〉恰與 P_m^n 展開式對應係數數列完全相同。所以，省略接下來的運算，逕自寫出下列無盡的對應係數數列：

$\frac{1}{7}\cdot P_7^{n+1}$ 係數數列：〈1, −15, 85, −225, 274, −120〉

$\frac{1}{8}\cdot P_8^{n+1}$ 係數數列：〈1, −21, 175, −735, 1624, −1764, 720〉

$\frac{1}{9}\cdot P_9^{n+1}$ 係數數列：〈1, −28, 322, −1960, 6769, −13132, 13068, −5040〉

$\frac{1}{10}\cdot P_{10}^{n+1}$ 係數數列：〈1, −36, 546, −4536, 22449, −67284, 118124, −109584, 40320〉

$\frac{1}{11}\cdot P_{11}^{n+1}$ 係數數列：〈1, −45, 870, −9450, 63273, −269325, 723680, −1172700, 1026576, −362880〉

$\frac{1}{12}\cdot P_{12}^{n+1}$ 係數數列：〈1, −55, 1320, −18150, 157773, −902055, 3416930, −8409500, 12753576, −10628640, 3628800〉

$\frac{1}{13}\cdot P_{13}^{n+1}$ 係數數列：〈1, −66, 1925, −32670, 357423, −2637558, 13339535, −45995730, 105258076, −150917976, 120543840, −39916800〉

$\frac{1}{14}\cdot P_{14}^{n+1}$係數數列：〈1，−78, 2717，−55770, 749463，−6926634, 44990231，−206070150, 657206836，−1414014888, 1931559552，−1486442880, 479001600〉

$\frac{1}{15}\cdot P_{15}^{n+1}$ 係數數列：〈1，−91，3731，−91091，1474473，−16669653，135036473，−790943153，3336118786，−9957703756，20313753096，−26596717056，19802759040，−6227020800〉

⋮

這些連貫的對應係數數列也是依循著遞迴運算關係式(6)式與生成矩陣運算迭代式(8)式一一計算而成。現在要應用這些計算出的已知 $\frac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1}$ 具有的對應係數值數列來求算出 $\sum_{k=1}^{n} k^{14}$ 的多項式函數正確表示式！換句話說，找到了 $\sum_{k=1}^{n} k^{14}$ 的多項式函數正確表示式時，上述省略推演歷程的自 $\frac{1}{7}\cdot P_{7}^{n+1}$ ～ $\frac{1}{15}\cdot P_{15}^{n+1}$ 之間其各自擁有的對應係數值數列猜想都是嚴格正確的。如此一來，就可以無窮盡的逐一持續再敘述出 $m+1= 16, 17, 18, \cdots$,等個別獨有的係數值數列。

接下來的論述就是先取 m 的確定值，然後求解出其 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = \sum_{r=1}^{m} a_{m+1-r}\cdot P_{m+2-r}^{n+1}$ 型式，再推演出其 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = f(n)$ 的多項式函數正確表示式。

【待續】