中學生通訊解題第 160-161 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
16001

設正整數 n 被 3、4、5、6、7、8 除的餘數中有 4 個 1、2 個 2，求滿足條件的 n 之最小值。

【簡答】 457

【詳解】

若 n 被 6 除餘數為 2，則 n 是偶數且 n 被 3 除餘數為 2，

得 n 被 4 除餘數為 1，與 n 是偶數矛盾。

所以 n 被 6 除餘數為 1，則 n 是奇數且 n 被 3 除餘數為 1，

得 n 被 4 除餘數為 1，得 n 被 8 除餘數為 1，

得 n 被 5 除餘數為 2，得 n 被 7 除餘數為 5，

因為 n 被 3、4、6、8 除的餘數均為 1，

所以 $n=[3,4,6,8]k+1=24k+1$，其中 k 是整數。

因為 n 被 5 除餘數為 2，

令 $k=5h,5h+1,5h+2,5h+3,5h+4$ 代入 $n=24k+1$ 討論，

得 $k=5h+4$，所以 $n=120h+97$，其中 h 是整數。

又因為 n 被 7 除餘數為 2，令 $h=7m,7m+1,\cdots,7m+6$ 代入 $n=120h+97$ 討論，得 $h=7m+3$，所以 $n=840m+457$，其中 m 是整數。

所以 n 的最小值為 457。

問題編號
16002

已知某數列 $<a_n>$ 中的 $a_1=1$，$a_{108}=108$，且當 $n\geq 3$ 時，a_n 為前 $n-1$ 項之算術平均數，求 a_2 之值。

【簡答】 215

【詳解】

當 $n \geq 3$ 時，

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n}$$

$$= \frac{(n-1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{n(n-1)} = \frac{n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{n(n-1)}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = a_n$$

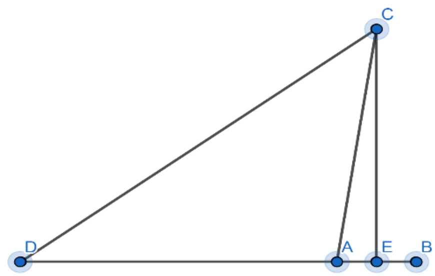
則 $a_3 = a_4 = \cdots = a_{108} = 108$

又 $a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$

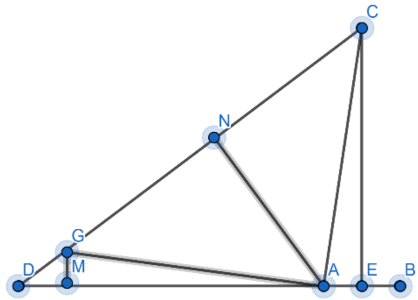
$\therefore a_2 = 2a_3 - a_1 = 2 \cdot 108 - 1 = 215$

問題編號
16003

如圖所示，點 A 介於點 B 與點 D 之間，且 $\overline{CE}$ 與 $\overline{BD}$ 垂直於點 E，設 $\overline{AC} = 1$、$\overline{AD} = x$、$\overline{AE} = y$，$\angle BAC$ 是銳角且 $\angle BAC = 3\angle BDC$，試證明：$x^3 - 3x - 2y = 0$。



【證明】



設 $\angle BDC=\theta$，則 $\angle BAC=3\theta$，

在 $\overline{CD}$ 上作點 G 使得 $\overline{AG}=\overline{AC}=1$，

又設點 G 至 $\overline{AD}$ 的垂足為 M、點 A 至 $\overline{CD}$ 的垂足為 N

因為 $\angle BAC=3\angle BDC$，所以在 ΔADC 中可得 $\angle ACD=\angle BAC-\angle BDC=2\theta$

設 $\overline{GC}=z$，因為 $\overline{AG}=\overline{AC}$，所以 ΔACG 是等腰三角形，

得 $\overline{CN}=\overline{GN}=\dfrac{z}{2}$ 和 $\angle AGC=\angle ACG=\angle ACD=2\theta$，

在 ΔGAD 中因為 $\angle DAG=\angle AGC-\angle ADG=2\theta-\theta=\theta=\angle ADG$，

所以 ΔGAD 是等腰三角形，$\overline{AG}=\overline{DG}$、$\overline{DG}=\overline{AC}=1$、$\overline{AM}=\overline{DM}$，

因為 ΔDGM、ΔDCE、ΔDAN 都是直角三角形，

且三個三角形都有一個角度等於 $\angle BDC$，

所以此三個三角形皆相似，因此 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DG}}=\dfrac{\overline{DN}}{\overline{DA}}$，

因為 $\overline{DM}=\dfrac{\overline{AD}}{2}=\dfrac{x}{2}$、$\overline{DG}=\overline{AG}=\overline{AC}=1$、$\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{AE}=x+y$、

$\overline{DC}=\overline{DG}+\overline{GC}=1+z$、$\overline{DN}=\overline{DG}+\overline{GN}=1+\dfrac{z}{2}$，

所以綜合以上可得 $\dfrac{x+y}{1+z}=\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\dfrac{z}{2}}{x}$，

交叉相乘整理消去 z 後可得 $x^3-3x-2y=0$。

問題編號
16004

求最大正整數 n，滿足將正整數 1 到 400 任意填入 20×20 的 400 個方格中，則總有一行或一列的其中兩數之差不小於 n。

【簡答】 209

【詳解】

法 1：
以下的表格中，每列之差不大於 209，每行之差不大於 190，因此 $n\leq 209$ 。

									0	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
1	2	3	4	5	6	7	8	9	00	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

法 2：

設 $M=\{1,2,3,\ldots,91\}$，$N=\{300,301,302,\ldots,400\}$，

欲證：在任意 20×20 方格中，必有一行或一列有集合 M,N 中各一個數。

證明如下：

將 1 到 400 任意填入 20×20 的 400 個方格中，

設表格中共有 i 行 j 列有 M 中的數，共有 k 行 m 列有 N 中的數，

則 $i+j\geq 2\sqrt{ij}\geq 2\sqrt{91}$，因此 $i+j\geq 20$，

同理，$k+m\geq 2\sqrt{km}\geq 2\sqrt{101}$，因此 $k+m\geq 21$，所以，$i+j+k+m\geq 41$，

由抽屜原理，必有一行或一列有集合 M,N 中各一個數。

因此最大正整數 $n=209$。

問題編號
16005

求滿足 $3p^2+2p+27=4m^2+12m$ 的所有質數 p 和正整數 m。

【簡答】 $p=5,\ m=4$

【詳解】

由題設可得 $p(3p+2)=(2m-3)(2m+9)$，所以 $p\mid(2m-3)(2m+9)$。
由於 p 是質數，故 $p\mid 2m-3$ 或 $p\mid 2m+9$。

(1) 若 $p\mid 2m-3$，令 $2m-3=kp$，其中 k 是整數。於是 $2m+9>kp$，

$4p^2=3p^2+p^2\ge 3p^2+2p=(2m-3)(2m+9)>k^2p^2$，

得 $k^2<4$，從而 $k=1$ 或 $k=-1$。

(i) 當 $k=1$：$\begin{cases}2m-3=p\\2m+9=3p+2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=5\\m=4\end{cases}$。

(ii) 當 $k=-1$：$\begin{cases}2m-3=-p\\2m+9=-(3p+2)\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-7\\m=5\end{cases}$，不合。

(2) 若 $p\mid 2m+9$，令 $2m+9=kp$，其中 k 是正整數。

(i) 當 $p>11$ 時，有 $2m-3=kp-12>kp-p=(k-1)p$，

$4p^2=3p^2+p^2\ge 3p^2+2p=(2m-3)(2m+9)>k(k-1)p^2$，

得 $k(k-1)<4$，從而 $k=1$ 或 $k=2$。

(a) 當 $k=1$：$\begin{cases}2m-3=3p+2\\2m+9=p\end{cases}$，這不可能。

(b) 當 $k=2$：$\begin{cases}2m-3=\dfrac{3p+2}{2}\\2m+9=2p\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=26\\m=\dfrac{43}{2}\end{cases}$，不合。

(ii) 當 $p=2$、3、7、11 時，都不合。

綜合上述(1)、(2)，可得 $\begin{cases}p=5\\m=4\end{cases}$。

問題編號
16101

已知 a,b 為互質的兩正整數且 $a<b$，若 $a+b=4692$，則這樣的有序數對 (a,b) 共有幾組？

【簡答】 704

【詳解】

由題意知 $(a,b)=1$，則 $(a,a+b)=1$，即 a 與 4692 互質。

因 $4692=2^2\times3\times17\times23$，

故小於等於 4692 且和 4692 互質的數共有 $4692\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{16}{17}\times\frac{22}{23}=1408$ 個。

又 $a<b$，知所求為 $1408\times\frac{1}{2}=704$。

問題編號
16102

數列 $\langle a_n\rangle$ 定義為：$a_1=\frac{1}{2}, a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$。證明：對任意正整數 n，均有 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$。

【證明】

由題設可知對任意正整數 n，均有 $a_n>0$，且

$a_k=(2k-3)a_{k-1}-(2k-1)a_k$，$k=2,3,\cdots$

所以有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=a_1+\sum_{k=2}^{n}((2k-3)a_{k-1}-(2k-1)a_k)\\&=a_1+a_1-(2n-1)a_n\\&=1-(2n-1)a_n\\&<1\end{aligned}$$

問題編號
16103

在拋物線 $y=x^2$ 的圖形上，任取兩格子點 $P_0(x_0,y_0)$ 、 $P_1(x_1,y_1)$ ，其中 $y_0>3$ 且 $y_1>3$ 。

試證明：若線段 $\overline{P_0P_1}$ 與 y 軸有交點 Q ，則 Q 點 y 坐標的值必不為質數。

【證明】

若線段 $\overline{P_0P_1}$ 與 y 軸有交點，則 x_0,x_1 為一正一負，

不失一般性假設 $x_0<0,x_1>0$ 。

過 $P_0(x_0,y_0)$ 、 $P_1(x_1,y_1)$ 的直線方程式為 $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$ ，

將 $x=0$ 及 $y_0=x_0{}^2$ 、 $y_1=x_1{}^2$ 代入，

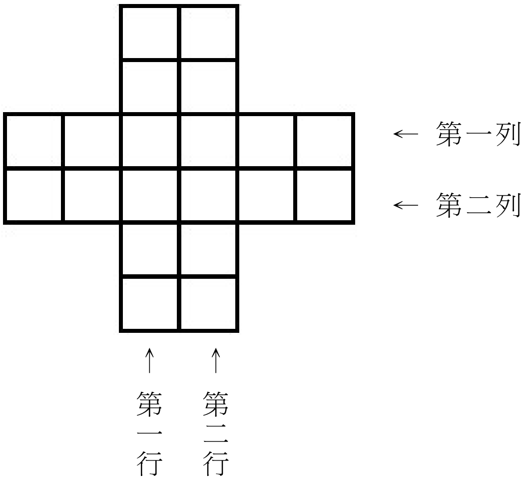
以得 Q 點 y 坐標為 $y=\dfrac{x_1{}^2-x_0{}^2}{x_1-x_0}(-x_0)+x_0{}^2=(x_1+x_0)(-x_0)+x_0{}^2=-x_0x_1$ 。

又 y_0 為大於 3 的整數，所以 $y_0\geq 4$, $x_0\leq -2$ ，同理 $x_1\geq 2$ 。

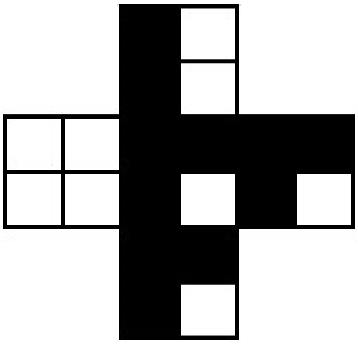
因為 $y=-x_0x_1$ 且 $x_0\leq -2$, $x_1\geq 2$ ，表示 y 不是質數，原命題得證。

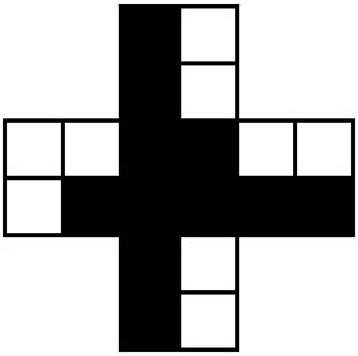
問題編號
16104

一幾何圖形是由 20 個正方形所構成，如下圖，定義中間最長的兩行為第一行及第二行、中間最長的兩列為第一列及第二列。將 20 個正方形的其中 11 個塗成黑色，且第一行、第二行、第一列、第二列被塗黑的正方形數量皆為偶數個，請問有幾種不同的塗色方式？（若兩個塗色方法經旋轉後變成一樣的，則視為同一種塗色方式）



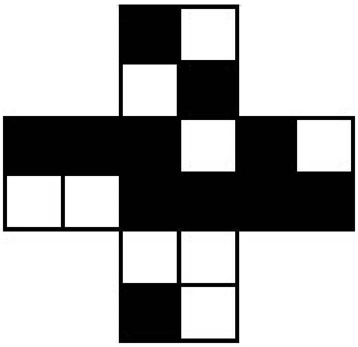
例如：

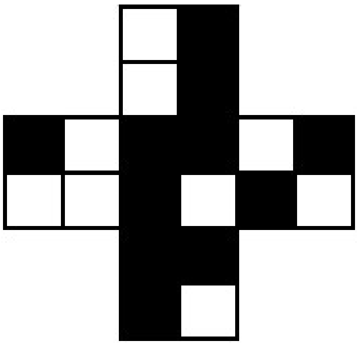




上左圖是合法的塗色方式，總共塗了 11 個，且第一行塗了 6 個、第二行塗了 2 個、第一列塗了 4 個、第二列塗了 2 個，皆塗了偶數個。

上右圖是不合法的塗色方式，總共塗了 11 個，但第二列塗了 5 個，不是偶數個。





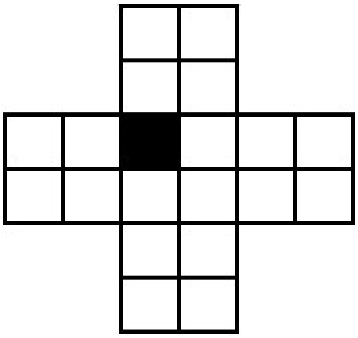
而上面兩個圖形是同一種塗色方式，因為左圖經順時針旋轉 $90°$ 後會與右圖完全相同。

【簡答】 2608

【詳解】

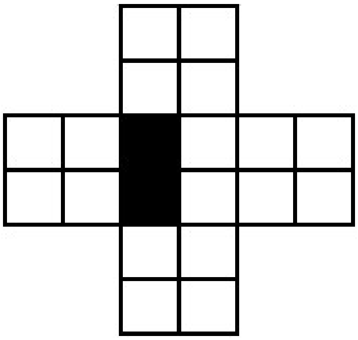
因為旋轉後若完全一樣則視為同一種塗色方式，所以先固定中央四個方格的塗色方式，再討論其他方格。

方案一：



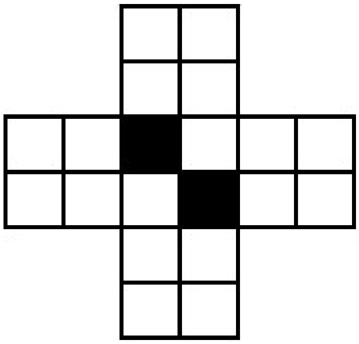
如此一來，第一行和第一列各要再塗奇數個，第二行和第二列各要再塗偶數個，加起來總共要再塗 10 個，是可行的。

方案二：



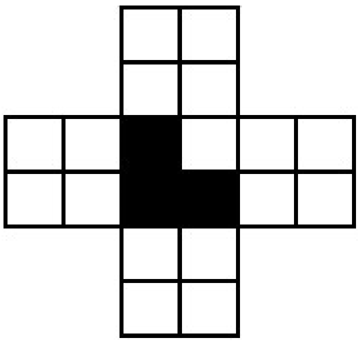
如此一來，第一行和第二行各要再塗偶數個，第一列和第二列各要再塗奇數個，加起來總共要再塗 9 個，是不可行的。

方案三：



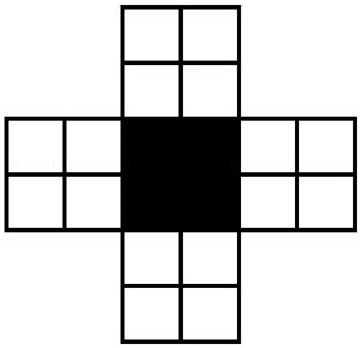
如此一來，第一行、第二行、第一列和第二列都要再塗奇數個，加起來總共要再塗 9 個，是不可行的。

方案四：



如此一來，第一行和第二列要再塗偶數個、第二行和第一列都要再塗奇數個，加起來總共要再塗 8 個，是可行的。

方案五：



如此一來，第一行、第二行、第一列和第二列都要再塗偶數個，加起來總共要再塗 7 個，是不可行的。

綜合以上，只有方案一和四是可行的，另外拿出來討論。

設 (a,b,c,d) 表示扣掉中間四格後，第一行再塗了 a 格、第二行再塗了 b 格、第一列再塗了 c 格、第二列再塗了 d 格。而 4 格裡選 0 格來塗有 1 種方法、4 格裡選 1 格來塗有 4 種方法、4 格裡選 2 格來塗有 6 種方法、4 格裡選 3 格來塗有 4 種方法、4 格裡選 4 格來塗有 1 種方法。以下列出所有可能的情形和方法數：

方案一：

(a,b,c,d)	方法數	(a,b,c,d)	方法數
(1,2,3,4)	$4\times6\times4\times1=96$	(3,2,1,4)	$4\times6\times4\times1=96$
(1,4,1,4)	$4\times1\times4\times1=16$	(3,2,3,2)	$4\times6\times4\times6=576$
(1,4,3,2)	$4\times1\times4\times6=96$	(3,4,1,2)	$4\times1\times4\times6=96$
(3,0,3,4)	$4\times1\times4\times1=16$	(3,4,3,0)	$4\times1\times4\times1=16$

以上共 1008 種。

方案四：

(a,b,c,d)	方法數	(a,b,c,d)	方法數
(0,1,3,4)	$1\times4\times4\times1=16$	(2,3,1,2)	$6\times4\times4\times6=576$
(0,3,1,4)	$1\times4\times4\times1=16$	(2,3,3,0)	$6\times4\times4\times1=96$
(0,3,3,2)	$1\times4\times4\times6=96$	(4,1,1,2)	$1\times4\times4\times6=96$
(2,1,1,4)	$6\times4\times4\times1=96$	(4,1,3,0)	$1\times4\times4\times1=16$
(2,1,3,2)	$6\times4\times4\times6=576$	(4,3,1,0)	$1\times4\times4\times1=16$

以上共 1600 種。

方案一和方案四合計 $1008+1600=2608$ 種。

問題編號
16105

已知甲的速度比乙快，兩人同時從圓形跑道上同一點出發，沿順時針方向跑步。過一段時間，甲第一次從背後追上乙，此時甲立即背轉身子，以原來的速度沿逆時針方向跑去。當兩人兩次相遇時，乙恰好跑了 3 圈，若甲的速度為每分鐘 120 公尺，試求乙的速度每分鐘為多少公尺？

【簡答】 $40+40\sqrt{10}$

【詳解】

設乙的速度 v ，則甲的速度為 kv

甲第一次追上乙的時間為 t_1 ，再次相遇的時間為 t_2

若圓形跑道周長為 l

則 $\begin{cases} kv\times t_1 - v\times t_1 = l\cdots(1) \\ kv\times t_2 + v\times t_2 = l\cdots(2) \\ v\times(t_1+t_2) = 3l\cdots(3) \end{cases}$

由(1)得 $vt_1=\dfrac{l}{k-1}$ ，由(2)得 $vt_2=\dfrac{l}{k+1}$ ，

代入(3)得 $\dfrac{l}{k-1}+\dfrac{l}{k+1}=3l \Rightarrow 3k^2-2k-3=0$

$\therefore k=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$（負不合）

所以乙每分鐘跑 $120\times\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}=40+40\sqrt{10}$ 公尺