對一道出自 IMO 試題之不等式的另證

連威翔

壹、前言

在數學傳播季刊 45 卷 4 期的[1]文中，作者介紹了一個證題系統並證明了 9 個涉及三角形的不等式。這 9 個不等式皆與頂點 A,B,C 之對邊長分別為 a,b,c 的 ΔABC 有關，作者透過同一手法，先將不等式中的每一項以頂點 A,B,C 到內切圓的切線段長 x,y,z 表示後再完成證明，其中

$$x=\frac{b+c-a}{2},\qquad y=\frac{c+a-b}{2},\qquad z=\frac{a+b-c}{2}.$$

上述三式可如此記憶：若 x,y,z 分別為從頂點 A,B,C 到內切圓的切線段長，則 x,y,z 的表達式中帶有負號的項分別為 a,b,c，而參考圖形請見[1]文。

在閱讀[1]文過後，筆者對其中例 2 所介紹的不等式感到有興趣，此不等式是出自一道 1964 年 IMO(International Mathematical Olympiad)的試題。若至 IMO 的官網[2]中搜尋該問題，可發現其敘述如下：

1964/2. Suppose a,b,c are the sides of a triangle. Prove that

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc. \tag{1}$$

對於上述問題，只要先令所關心的三角形為 ΔABC 且令 a,b,c 分別是頂點 A,B,C 的對邊長，即可透過[1]文的手法以切線段長 x,y,z 改寫(1)式來完成證明。

而筆者在研究上述問題過後，幸運地對(1)式找出一個另證。有趣的是，此另證最後會將(1)式改寫成一個各項皆以 $\angle A,\angle B,\angle C$ 之三角比表示的不等式。底下第二節中，筆者將介紹此另證供有興趣的讀者參考。

貳、試題 1964/2 的另解

對於第一節中出自 IMO 試題的不等式(1)，筆者的證明如下：

證明：令所關心的三角形為 ΔABC 且令 a,b,c 分別是頂點 A,B,C 的對邊長，請參考下圖。

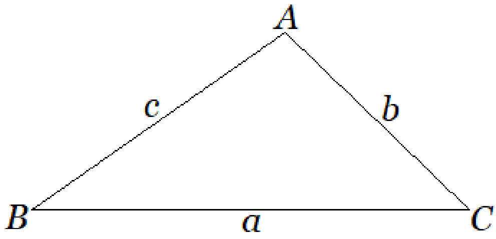

圖 1

因為 a,b,c 皆為正數，我們對(1)式不等號的兩側同時除以正數 $2abc$，則可得與(1)式等價的不等式如下：

$$a\times\frac{b+c-a}{2bc}+b\times\frac{c+a-b}{2ca}+c\times\frac{a+b-c}{2ab}\le\frac{3}{2}. \tag{2}$$

我們可利用餘弦定理改寫(2)左式的三項，例如(2)左式的第一項可改寫如下：

$$a\times\frac{b+c-a}{2bc}=\frac{a}{b+c+a}\times\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}=\frac{a}{b+c+a}\times\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a}{b+c+a}\times\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{a}{b+c+a}\times(\cos A+1),$$

因此同理可推得

$$b\times\frac{c+a-b}{2ca}=\frac{b}{c+a+b}\times(\cos B+1),$$

$$c\times\frac{a+b-c}{2ab}=\frac{c}{a+b+c}\times(\cos C+1).$$

將上述三式的結果代入(2)式，經展開與整理後可得與(2)式等價的下式：

$$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{a+b+c}\le\frac{3}{2},$$

上式不等號的兩側同減 1，可得

$$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}\le\frac{1}{2}.$$

將上式改寫成與(2)式等價的

$$2a\cos A+2b\cos B+2c\cos C\le a+b+c, \tag{3}$$

令圖 1 中 ΔABC 的外接圓半徑為 R，並利用正弦定理寫下

$$a=2R\sin A,\qquad b=2R\sin B,\qquad c=2R\sin C,$$

將以上三式代入(3)式，於不等號兩邊同時除以正數 $2R$，可得

$$2\sin A\cos A+2\sin B\cos B+2\sin C\cos C\leq\sin A+\sin B+\sin C. \tag{4}$$

至此知(4)式與(1)式等價，且(4)式可改寫成較簡潔的

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leq\sin A+\sin B+\sin C. \tag{5}$$

若要繼續往下證明，筆者發現排序不等式(見參考資料[3])能夠派上用場，不過接下來並非要證明較簡潔的(5)式，而是要證明(4)式成立。不失一般性，令 ΔABC 的三內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 滿足 $\angle A\leq\angle B\leq\angle C$，因為三內角均為正數且其和為 π，我們可寫下

$$0<\angle A\leq\angle B\leq\angle C<\pi. \tag{6}$$

首先，由於餘弦函數 $\cos x$ 在區間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的角度範圍內嚴格遞減，因此在(6)式的條件下，若 $\angle C\leq\frac{\pi}{2}$，則顯然有 $\cos C\leq\cos B\leq\cos A$；若 $\angle C>\frac{\pi}{2}$，則 $\angle A\leq\angle B<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos C<0<\cos B\leq\cos A$。由此，我們得到

$$\cos C\leq\cos B\leq\cos A. \tag{7}$$

至於正弦函數 $\sin x$，雖然它在 $[0,\pi]$ 的角度範圍內並非單調函數，但是我們仍可證明在(6)式的條件下有

$$\sin A\leq\sin B\leq\sin C, \tag{8}$$

對於(8)式的證明，我們分成兩種情形討論如下：

(a) 若(6)式中的最大角 $\angle C$ 為銳角或直角，則

$$0<\angle A\leq\angle B\leq\angle C\leq\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

由於正弦函數 $\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的角度範圍內嚴格遞增，因此由(9)式可寫下

$$\sin A\leq\sin B\leq\sin C,$$

故(8)式成立。

(b) 若(6)式中的最大角 $\angle C$ 為鈍角，則 $\pi-\angle C,\angle A,\angle B$ 均為銳角，此時可寫下

$$\angle A\leq\angle B<\angle A+\angle B=\pi-\angle C<\frac{\pi}{2},$$

以上式的條件搭配正弦函數 $\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的角度範圍內嚴格遞增的特性，可知

$$\sin A\leq\sin B<\sin(\pi-\angle C)=\sin C,$$

故(8)式同樣成立。

透過上述(a),(b)兩項目的討論，即可確定在(6)式的條件下(8)式成立。

注意在參考資料[3]中介紹了「逆序和不大於亂序和，且亂序和不大於順序和」這個事實，依照[3]中所述，我們知道對於滿足

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n, \qquad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n,$$

的 $2n$ 個實數 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 與 $y_1, y_2, \dots, y_n$，如果令

$$S_1 = x_n y_1 + x_{n-1} y_2 + \cdots + x_1 y_n,$$

$$S_2 = x_{\sigma(1)} y_1 + x_{\sigma(2)} y_2 + \cdots + x_{\sigma(n)} y_n,$$

$$S_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

則將有 $S_1 \leq S_2 \leq S_3$ 的結果，其中 $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的任一個排列。此處我們取 $S_1 \leq S_2 \leq S_3$ 的結果之左半邊的 $S_1 \leq S_2$，可寫下

$$x_n y_1 + x_{n-1} y_2 + \cdots + x_1 y_n \leq x_{\sigma(1)} y_1 + x_{\sigma(2)} y_2 + \cdots + x_{\sigma(n)} y_n.$$

利用上式的結果，我們在上式中令 $n = 3$ 並取

$$x_1 = \sin A\,, x_2 = \sin B\,, x_3 = \sin C,$$

$$y_1 = \cos C\,, y_2 = \cos B\,, y_3 = \cos A,$$

再回頭觀察(7), (8)兩式，則可寫下

$$\sin C \cos C + \sin B \cos B + \sin A \cos A \leq \sin B \cos C + \sin A \cos B + \sin C \cos A,$$

$$\sin C \cos C + \sin B \cos B + \sin A \cos A \leq \sin A \cos C + \sin C \cos B + \sin B \cos A,$$

其中上兩式右半邊所對應的排列 σ 分別依序將 $1, 2, 3$ 對應到 $2, 1, 3$ 及 $1, 3, 2$。將上述兩式相加後，利用和角公式可繼續推得

$$\begin{aligned}
&2\sin A \cos A + 2\sin B \cos B + 2\sin C \cos C \\
&\qquad \leq (\sin B \cos C + \sin C \cos B) + (\sin C \cos A + \sin A \cos C) \\
&\qquad + (\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin(B + C) + \sin(C + A) + \sin(A + B) \\
&\qquad = \sin(\pi - A) + \sin(\pi - B) + \sin(\pi - C) = \sin A + \sin B + \sin C,
\end{aligned}$$

至此我們就證明了(4)式成立。接下來只要從(4)式開始利用一系列的等價關係回推，就可證明不等式(1)成立。因此對第一節中介紹的 IMO 試題 1964/2 而言，我們就在[1]文介紹的解答之外找到了一個另解。

值得一提的是，在[1]文證明不等式(1)的最後一個步驟寫出

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x + x y^2 + y z^2 + z x^2 \geq 6xyz \tag{10}$$

這個與(1)式等價的不等式，此不等式其實也可以使用排序不等式來證明。我們先在不失一般性的條件下假設

$$x \le y \le z,$$

則不難推得

$$xy \le zx \le yz.$$

此時仿照上面我們證明(4)式的手法，先利用排序不等式搭配上述兩條件寫下

$$z \cdot xy + y \cdot zx + x \cdot yz \le x \cdot xy + z \cdot zx + y \cdot yz,$$

$$z \cdot xy + y \cdot zx + x \cdot yz \le y \cdot xy + x \cdot zx + z \cdot yz,$$

將上兩式相加之後，即可確定不等式(10)成立。其中，上兩式右半邊所用到的排列 σ 分別依序將 $1,2,3$ 對應到 $1,3,2$ 及 $2,1,3$。

參、不等式的推廣

對於(1)式，若令 $s = \frac{a+b+c}{2}$，則可將(1)式改寫為

$$a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) \le \frac{3abc}{2}, \tag{11}$$

其中 a,b,c 是三角形的三邊長。此外，我們也可寫下

$$a(s-a) + b(s-b) + c(s-c) = \frac{1}{2}(2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2)$$

$$= \frac{1}{2}(bc + ca + ab) - \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab)$$

$$= \frac{1}{2}(bc + ca + ab) - \frac{1}{4}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \le \frac{1}{2}(bc + ca + ab),$$

因此確定下述不等式成立：

$$a(s-a) + b(s-b) + c(s-c) \le \frac{1}{2}(bc + ca + ab). \tag{12}$$

觀察(11), (12)兩式後，我們可進一步考慮對任意正數 λ 找出使下述不等式成立的 $f_\lambda(a,b,c)$：

$$a^\lambda(s-a) + b^\lambda(s-b) + c^\lambda(s-c) \le f_\lambda(a,b,c). \tag{13}$$

為了找出上式中的 $f_\lambda(a,b,c)$，我們可仿照上一節使用排序不等式證明的想法，先令 $a \ge b \ge c$，則有

$$a^\lambda \ge b^\lambda \ge c^\lambda,$$

$$s-c \ge s-b \ge s-a,$$

故(13)的左式是 $a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda$ 與 $s-c, s-b, s-a$ 這兩個遞減數列的逆序和。由於逆序和不大於亂序和，我們可寫下

$$a^\lambda(s-a)+b^\lambda(s-b)+c^\lambda(s-c) \le a^\lambda(s-b)+b^\lambda(s-c)+c^\lambda(s-a), \tag{14}$$

$$a^\lambda(s-a)+b^\lambda(s-b)+c^\lambda(s-c) \le a^\lambda(s-c)+b^\lambda(s-a)+c^\lambda(s-b), \tag{15}$$

又由於

$$(s-b)+(s-c)=a,\ \ (s-c)+(s-a)=b,\ \ (s-a)+(s-b)=c,$$

因此在計算 $[(14)+(15)] \div 2$ 後，可得

$$a^\lambda(s-a)+b^\lambda(s-b)+c^\lambda(s-c) \le \frac{1}{2}\left(a^{\lambda+1}+b^{\lambda+1}+c^{\lambda+1}\right). \tag{16}$$

上式顯示(12)式中的 $f_\lambda(a,b,c)$ 可取為

$$f_\lambda(a,b,c)=\frac{1}{2}\left(a^{\lambda+1}+b^{\lambda+1}+c^{\lambda+1}\right).$$

得到(16)式的結果後，若對(16)式取 $\lambda=1$，可得

$$a(s-a)+a(s-b)+a(s-c) \le \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \tag{17}$$

比較上式與(12)式，可發現上式的結果其實比(12)式來得弱，這是因為我們有

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-b)^2+(a-b)^2] \ge 0, \tag{18}$$

因此有 $a^2+b^2+c^2 \ge bc+ca+ab$。所以說，若先知道(12)式成立，則可利用該式推導得

$$a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \le \frac{1}{2}(bc+ca+ab) \le \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

故不等式(17)成立；但反過來若先知道(17)式成立，則無法簡單透過比大小的方式推得(12)式成立。因此，我們才說(17)式的結果比(12)式來得弱。

另一方面，若對(16)式取 $\lambda=2$，可得

$$a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c) \le \frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3). \tag{19}$$

注意上式的結果其實比(11)式來得弱，這是因為我們有

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-b)^2+(a-b)^2]\geq 0,$$

注意上式中的第二個等號用上了(18)式，而由上式可知 $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$。此時，若先知道(11)式成立，則可利用該式推導得

$$a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)\leq\frac{3abc}{2}\leq\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3),$$

故不等式(19)成立；但反過來若先知道(19)式成立，則無法簡單透過比大小的方式推得(11)式成立。因此，我們才說(19)式的結果比(11)式來得弱。

所以說，雖然我們有了推廣後的不等式(16)，但是分別對(16)式取 $\lambda=1$ 與 $\lambda=2$ 後，卻只得到比(12)式與(11)式更弱的結果，這顯示在一般情況下應該會有比(16)式更強的結果。起初，筆者猜測當 $\lambda\geq 1$ 時下述不等式成立：

$$a^\lambda(s-a)+b^\lambda(s-b)+c^\lambda(s-c)\leq\frac{1}{2}\left(a^{\lambda-1}bc+b^{\lambda-1}ca+c^{\lambda-1}ab\right), \tag{20}$$

注意上式取 $\lambda=1$ 與 $\lambda=2$ 後分別可得(12)式與(11)式。但在完成上述猜測後，筆者於參考資料[4]中見到不等式(20)，得知 R. Z. Djordjevic 已證明不等式(20)對任意實數 λ 均成立。此處，仍邀請有興趣的讀者一起來重新證明(20)式。

肆、結語

本文寫作的初衷，是想介紹自己對不等式(1)寫下的另證。值得一提的是，在寫下不等式(1)的另證之前，起初筆者僅發現可透過排序不等式證明上面(出自[1]文例 2)的(10)式，但這樣並不算找出不等式(1)的另證(因為仍在[1]文的證題系統之下)，於是便從頭開始研究(1)式。就在順利地將(1)式改寫為(4)式之後，筆者發現可透過排序不等式證明(4)式，就如同上面對(10)式寫下的證明那樣，且發現(4), (10)兩式的證明過程竟如此相似。

感謝[1]文作者在其文章中所介紹的精彩內容，使筆者在欣賞[1]文之餘也產生動力以進行相關的研究。此外，也要感謝審稿者對本文提出的良善建議，因為有其建議，筆者才能完成本文第三節的內容。最後，希望讀者在閱讀本文之後能有所收穫，本文內容若有不足之處亦請不吝指教。

參考文獻

1. 範花妹，秦慶雄。三角形結構中的一個證題系統。數學傳播季刊, 45(4), 88-95, 2021。
2. Official website of IMO. https://www.imo-official.org/.
3. Rearrangement inequality, Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Rearrangement_inequality.
4. O. Bottema 等著，單墫譯，幾何不等式。北京大學出版社，1991。
5. 李發勇，對著名外森比克不等式幾個加強的代換簡證。數學傳播季刊, 43(3), 95-98, 2019。