以排列記號數描述前 N 個連續正整數等冪次和的多項式函數表示式(下)

李 輝 濱

嘉義市私立輔仁中學 退休教師

[D]. 解出 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = \sum_{r=1}^{m} a_{m+1-r} \cdot P_{m+2-r}^{n+1}$ 型式，再推演出其 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = f(n)$ 的多項式函數正確表示式。分析、演繹與推理、整合流程如下所述：

(d1). 由[C].節敘述證明內容可得知有下列等式結果；　$u_{m}^{[m]} = 1$

$$\frac{1}{m+1} \cdot P_{m+1}^{n+1} = \sum_{r=1}^{m} u_{m+1-r}^{[m]} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-r} \right) \quad , \quad \frac{1}{m} \cdot P_{m}^{n+1} = \sum_{r=1}^{m-1} u_{m-r}^{[m-1]} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{m-r} \right)$$

$$\frac{1}{m-1} \cdot P_{m-1}^{n+1} = \sum_{r=1}^{m-2} u_{m-1-r}^{[m-2]} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{m-1-r} \right) \quad , \quad \frac{1}{m-2} \cdot P_{m-2}^{n+1} = \sum_{r=1}^{m-3} u_{m-2-r}^{[m-3]} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{m-2-r} \right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{m+2-i} \cdot P_{m+2-i}^{n+1} = \sum_{r=1}^{m+1-i} u_{m+2-i-r}^{[m+1-i]} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+2-i-r} \right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{5} \cdot P_{5}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{4} - 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{3} + 11 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{2} - 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\frac{1}{4} \cdot P_{4}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{3} - 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\frac{1}{3} \cdot P_{3}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k^{2} - \sum_{k=1}^{n} k \quad , \quad \frac{1}{2} \cdot P_{2}^{n+1} = \frac{(n+1)n}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$$

將這 m 個等式依序分別乘以係數 $d_{m}, d_{m-1}, d_{m-2}, d_{m-3}$, $\cdots$, d_{m+1-i}, $\cdots$, d_{4}, d_{3}, d_{2}, d_{1}，然後各等號左側全部相加，右側也全部相加，即得到下列綜合等式；

$$\sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i} \cdot \frac{1}{m+2-i} \cdot P_{m+2-i}^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i} \cdot \left[\sum_{r=1}^{m+1-i} u_{m+2-i-r}^{[m+1-i]} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+2-i-r} \right) \right] \tag{9}$$

現在將(9)式等號右側的 $\sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i} \cdot \left[\sum_{r=1}^{m+1-i} u_{m+2-i-r}^{[m+1-i]} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+2-i-r} \right) \right]$全部展開來，再

重新演算整合成型態如 $\sum_{k=1}^{n} k^{r}$ 的線性組合變成 $\sum_{i=1}^{m} b_{m+1-i}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}\right)$的新形式，即使

$$\sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i}\cdot\left[\ \sum_{r=1}^{m+1-i} u_{m+2-i-r}^{[m+1-i]}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+2-i-r}\right)\ \right]=\sum_{i=1}^{m} b_{m+1-i}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}\right) \tag{10}$$

再使(9)式轉換成； $\sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i}\cdot\dfrac{1}{m+2-i}\cdot P_{m+2-i}^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} b_{m+1-i}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}\right)$ (11)

(d2). 對(10)、(11)式而言，等號右側的第 1 項是 $b_m\sum_{k=1}^{n} k^{m}$，而研究目標是 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 的唯一冪次和，所以 b_m 要等於 1，其餘的 k 的 $m-1$ 次方, $m-2$ 次方, $m-3$ 次方, ⋯ ,3 次方, 2 次方, 1 次方等皆完全不存在，所以 $b_{m-1}=b_{m-2}=b_{m-3}=\ \cdots\ =b_3=b_2=b_1$ 都要指定等於 0，即等號右側只保留第 1 項的 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 存在。等號左側的第 1 項是

$$d_m\cdot\frac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1} = d_m\cdot\sum_{r=1}^{m} u_{m+1-r}^{[m]}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-r}\right)$$

$$= d_m\cdot u_m^{[m]}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{m} + d_m\cdot\sum_{r=2}^{m} u_{m+1-r}^{[m]}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-r}\right)\quad ,$$

(10)式等號左側的第 1 項之後，第 2 項，第 3 項，⋯ 等各項也都不會出現 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$，也就是說(10)式等號左側的項僅有第 1 項存在著 $d_m\cdot u_m^{[m]}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{m}$，而 $u_m^{[m]}=1$，所以 d_m 要取值為 1 始能合乎主題成立！因此，歸納出**運算的規範準則** 是：

(i). 要指定 $d_m=b_m=1$ ， $b_{m-1}=b_{m-2}=b_{m-3}=\ \cdots\ =b_3=b_2=b_1=0$

(ii). 再代入 (10)式，集列成 m 個等式以組成聯立方程式，解此聯立方程式因而計算出 $d_{m-1}, d_{m-2}, d_{m-3}$, ⋯ , d_{m+1-i} , ⋯ ,d_4, d_3, d_2, d_1等各值，使(9)式、(10)式、(11)式變換推演成 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}=\sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i}\cdot\dfrac{1}{m+2-i}\cdot P_{m+2-i}^{n+1}$ 形式，而 $d_{m+1-i}\cdot\dfrac{1}{m+2-i}=a_{m+1-r}$，即可得到 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}=\sum_{r=1}^{m} a_{m+1-r}\cdot P_{m+2-r}^{n+1}$ 型式的預期結果！

(iii). 若要找出 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}=f(n)$ 的形式，再將 P_{m+2-r}^{n+1} 展開，化簡，整合即可。

以下要透過示範演算來展示本節真確的實質推演內涵流程。

[E]. 實際範例演示以解說推演流程

(範例 e1). 取 m 的確定值，令 $m = 7$，則 $\frac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1} = \frac{1}{8}\cdot P_{8}^{n+1}$，由(c6).節知道有：

$$\frac{1}{8}\cdot P_{8}^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}k^{7}-21\sum_{k=1}^{n}k^{6}+175\sum_{k=1}^{n}k^{5}-735\sum_{k=1}^{n}k^{4}+1624\sum_{k=1}^{n}k^{3}$$

$$-1764\sum_{k=1}^{n}k^{2}+720\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{1}{7}\cdot P_{7}^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}k^{6}-15\sum_{k=1}^{n}k^{5}+85\sum_{k=1}^{n}k^{4}-225\sum_{k=1}^{n}k^{3}+274\sum_{k=1}^{n}k^{2}-120\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{1}{6}\cdot P_{6}^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}k^{5}-10\sum_{k=1}^{n}k^{4}+35\sum_{k=1}^{n}k^{3}-50\sum_{k=1}^{n}k^{2}+24\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{1}{5}\cdot P_{5}^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}k^{4}-6\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{3}+11\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{2}-6\cdot\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{1}{4}\cdot P_{4}^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}k^{3}-3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{2}+2\cdot\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{1}{3}\cdot P_{3}^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}k^{2}-\sum_{k=1}^{n}k \quad , \quad \frac{1}{2}\cdot P_{2}^{n+1}=\frac{(n+1)n}{2}=\sum_{k=1}^{n}k$$

(e1-1). 將這 7 個等式依序分別乘以係數 $d_7, d_6, d_5, d_4, d_3, d_2, d_1$，然後各等號左側全部相加，右側也全部相加，之後全部展開來，再重新演算整合成型態如 $\sum_{k=1}^{n}k^{r}$ 的線性組合即得到下列完整運算詳盡綜合等式；

$$\sum_{i=1}^{7}d_{8-i}\cdot\frac{1}{9-i}\cdot P_{9-i}^{n+1}=d_7\sum_{k=1}^{n}k^{7}+(-21\,d_7+d_6)\sum_{k=1}^{n}k^{6}+(175\,d_7-15\,d_6+d_5)\sum_{k=1}^{n}k^{5}+$$
$$(-735\,d_7+85\,d_6-10\,d_5+d_4)\sum_{k=1}^{n}k^{4}+(1624\,d_7-225\,d_6+35\,d_5-6\,d_4+d_3)\sum_{k=1}^{n}k^{3}+(-$$
$$1764\,d_7+274\,d_6-50\,d_5+11\,d_4-3\,d_3+d_2)\sum_{k=1}^{n}k^{2}+$$
$$(720\,d_7-120\,d_6+24\,d_5-6\,d_4+2\,d_3-1\,d_2+d_1)\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{i=1}^{7}b_{8-i}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{8-i}\right) \tag{12}$$

對(12)式應用分析歸納出的**運算規範準則**，得一組 7 個等式的下列聯立方程式；

$b_7 = d_7 = 1$

$b_6 = -21\,d_7 + d_6 = 0$

$b_5 = 175\,d_7 - 15\,d_6 + d_5 = 0$

$b_4 = -735\,d_7 + 85\,d_6 - 10\,d_5 + d_4 = 0$

$b_3 = 1624\,d_7 - 225\,d_6 + 35\,d_5 - 6\,d_4 + d_3 = 0$

$b_2 = -1764\,d_7 + 274\,d_6 - 50\,d_5 + 11\,d_4 - 3\,d_3 + d_2 = 0$

$b_1 = 720\,d_7 - 120\,d_6 + 24\,d_5 - 6\,d_4 + 2\,d_3 - 1\,d_2 + d_1 = 0$

解此聯立方程式以依序計算出各 d_i 值；得 $d_7 = 1$，$d_6 = 21$，$d_5 = 140$，$d_4 = 350$，$d_3 = 301$，$d_2 = 63$，$d_1 = 1$，再回頭代入(12)式，即得出下式；

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8}\cdot P_8^{n+1} + 21\cdot\frac{1}{7}\cdot P_7^{n+1} + 140\cdot\frac{1}{6}\cdot P_6^{n+1} + 350\cdot\frac{1}{5}\cdot P_5^{n+1} + 301\cdot\frac{1}{4}\cdot P_4^{n+1} + 63\cdot\frac{1}{3}\cdot P_3^{n+1} + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8}\cdot P_8^{n+1} + 3\cdot P_7^{n+1} + \frac{70}{3}\cdot P_6^{n+1} + 70\cdot P_5^{n+1} + \frac{301}{4}\cdot P_4^{n+1} + 21\cdot P_3^{n+1} + \frac{1}{2}\cdot P_2^{n+1} \tag{13}$$

這(13)式就是以排列記號數 P_{m+2-r}^{n+1} 的線性組合來表示出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的型式！

(e1-2). 再將(13)式的各個排列記號數 P_{m+2-r}^{n+1} 全部展開來，詳情計算於下；

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{8} +$$

$$3\,(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + \frac{70}{3}\cdot(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$+ 70\,(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{301}{4}\cdot(n+1)\,n\,(n-1)(n-2) + 21\,(n+1)\,n\,(n-1)$$

$$+\frac{1}{2}\cdot(n+1)\,n$$

$$= (\frac{1}{8}n^8 - \frac{5}{2}n^7 + \frac{77}{4}n^6 - 70n^5 + \frac{889}{8}n^4 - \frac{35}{2}n^3 - \frac{261}{2}n^2 + 90n) +$$

$$(3\,n^7 - 42n^6 + 210n^5 - 420n^4 + 147n^3 + 462n^2 - 360n) +$$

$$(\frac{70}{3}n^6 - 210\,n^5 + \frac{1750}{3}n^4 - 350n^3 - \frac{1820}{3}n^2 + 560n) +$$

$$(70\,n^5 - 350n^4 + 350n^3 + 350n^2 - 420n) + (\frac{301}{4}n^4 - \frac{301}{2}n^3 - \frac{301}{4}n^2 + \frac{301}{2}n) +$$

$$(21\,n^3 - 21\,n) + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \quad \Rightarrow$$

得出 $$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \tag{14}$$

此(14)式對照於前言敘述中的已知公式完全正確無誤，故(13)式也絕對正確！

(e1-3). 應用矩陣運算式替代聯立方程式以求取各 d_i 值

由上述 (e1).節內的 7 個等式各自取出其係數且按序鋪排入第 1、第 2、第 3、⋯、第 6、第 7 欄(行)的 7 階方陣對應位置中，其餘位置都置入 0，而完成規律有序的 7 階方陣。再以各 d_i 未知數自形成一個單欄 7 列矩陣。由 7 階方陣與 d_i 單欄矩陣相乘後即得到以 b_i 的指定數值獨自形成另一個單欄 7 列矩陣。循此程序可得到以係數、未知數、指定數值等共同編製成的矩陣運算式其精確對應型態如下；

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 175 & -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -735 & 85 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1624 & -225 & 35 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -1764 & 274 & -50 & 11 & -3 & 1 & 0 \\ 720 & -120 & 24 & -6 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

由此(15)式純粹透過矩陣運算，不需再排列聯立方程式即可計算出各 d_i 值。

(範例 e2). 取 $m = 10$，則 $\dfrac{1}{m+1} \cdot P_{m+1}^{n+1} = \dfrac{1}{11} \cdot P_{11}^{n+1}$，由(c6).節知道有：

$\dfrac{1}{11} \cdot P_{11}^{n+1}$ 係數數列：$\langle 1,\ -45,\ 870,\ -9450,\ 63273,\ -269325,\ 723680,\ -1172700,\ 1026576,\ -362880 \rangle$

$\dfrac{1}{10} \cdot P_{10}^{n+1}$ 係數數列： $\langle 1,\ -36,\ 546,\ -4536,\ 22449,\ -67284,\ 118124,\ -109584,\ 40320 \rangle$

$\dfrac{1}{9} \cdot P_{9}^{n+1}$ 係數數列： $\langle 1,\ -28,\ 322,\ -1960,\ 6769,\ -13132,\ 13068,\ -5040 \rangle$

$\dfrac{1}{8} \cdot P_{8}^{n+1}$ 係數數列： $\langle 1,\ -21,\ 175,\ -735,\ 1624,\ -1764,\ 720 \rangle$

$\vdots$

(e2-1). 直接採納矩陣運算式，得其精確數值對應型態如下； $b_{10} = d_{10} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -45 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 870 & -36 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9450 & 546 & -28 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 63273 & -4536 & 322 & -21 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -269325 & 22449 & -1960 & 175 & -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 723680 & -67284 & 6769 & -735 & 85 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1172700 & 118124 & -13132 & 1624 & -225 & 35 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1026576 & -109584 & 13068 & -1764 & 274 & -50 & 11 & -3 & 1 & 0 \\ -362880 & 40320 & -5040 & 720 & -120 & 24 & -6 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_9 \\ d_8 \\ d_7 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

解開此(16)式依序得出各 d_i 值；得 $d_{10} = 1$，$d_9 = 45$，$d_8 = 750$，$d_7 = 5880$，$d_6 = 22827$，$d_5 = 42525$，$d_4 = 34105$，$d_3 = 9330$，$d_2 = 511$，$d_1 = 1$ ， $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = 1 \cdot \frac{1}{11} \cdot P_{11}^{n+1} + 45 \cdot \frac{1}{10} \cdot P_{10}^{n+1} + 750 \cdot \frac{1}{9} \cdot P_{9}^{n+1} + 5880 \cdot \frac{1}{8} \cdot P_{8}^{n+1} + 22827 \cdot \frac{1}{7} \cdot P_{7}^{n+1} + 42525 \cdot \frac{1}{6} \cdot P_{6}^{n+1} + 34105 \cdot \frac{1}{5} \cdot P_{5}^{n+1} + 9330 \cdot \frac{1}{4} \cdot P_{4}^{n+1} + 511 \cdot \frac{1}{3} \cdot P_{3}^{n+1} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot P_{2}^{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^{10} =$$

$$\frac{1}{11} \cdot P_{11}^{n+1} + \frac{9}{2} \cdot P_{10}^{n+1} + \frac{250}{3} \cdot P_{9}^{n+1} + 735 \cdot P_{8}^{n+1} + 3261 \cdot P_{7}^{n+1} + \frac{14175}{2} \cdot P_{6}^{n+1} + 6821 \cdot P_{5}^{n+1} + \frac{4665}{2} \cdot P_{4}^{n+1} + \frac{511}{3} \cdot P_{3}^{n+1} + \frac{1}{2} \cdot P_{2}^{n+1} \qquad (17)$$

這(17)式就是以排列記號數 P_{m+2-r}^{n+1} 的線性組合來表示出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的型式！

(e2-2). 再將(17)式的各個排列記號數 P_{m+2-r}^{n+1} 全部展開來，詳情計算於下；

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{11} +$$

$$\frac{9(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2} +$$

$$\frac{250 \cdot (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{3} +$$

$$735\,(n+1)\; n\; (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) +$$

$3261\,(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\ +\dfrac{14175\cdot(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2}$

$+\ 6821\,(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3)\ +\ \dfrac{4665}{2}\cdot(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)\ +\ \dfrac{511}{3}\cdot(n+1)\,n$

$(n-1)\ +\ \dfrac{1}{2}\cdot(n+1)\,n$

$=\ \dfrac{1}{11}\,(\,n^{11}-44\,n^{10}+825\,n^{9}-8580\,n^{8}+53823\,n^{7}-206052\,n^{6}+454355\,n^{5}-449020\,n^{4}-$

$146124\,n^{3}+663696\,n^{2}-362880\,n\,)\ +\ \dfrac{9}{2}\,(\,n^{10}-35\,n^{9}+510\,n^{8}-3990\,n^{7}+17913\,n^{6}$

$-44835\,n^{5}+50840\,n^{4}+8540\,n^{3}-69264\,n^{2}+40320\,n\,)\ +\ \dfrac{250}{3}\,(\,n^{9}-27\,n^{8}+294\,n^{7}$

$-1638n^{6}+4809n^{5}-6363n^{4}-64n^{3}+8028n^{2}-5040n\,)\ +\ 735(\,n^{8}-20n^{7}+154n^{6}$

$-560n^{5}+889n^{4}-140n^{3}-1044n^{2}+720n\,)\ +\ 3261(\,n^{7}-14n^{6}+70n^{5}-140n^{4}$

$+49n^{3}+154n^{2}-120n\,)+\ \dfrac{14175}{2}(\,n^{6}-9\,n^{5}+25n^{4}-15n^{3}-26n^{2}+24n\,)+$

$6821(\,n^{5}-5n^{4}+5n^{3}+5n^{2}-6n\,)+\ \dfrac{4665}{2}(\,n^{4}-2n^{3}-n^{2}+2n\,)+$

$\dfrac{511}{3}(\,n^{3}-n\,)+\ \dfrac{1}{2}(n^{2}+n)\ =\ \dfrac{1}{11}n^{11}+\dfrac{1}{2}n^{10}+\dfrac{5}{6}n^{9}-n^{7}+n^{5}-\dfrac{1}{2}n^{3}+\dfrac{5}{66}n$

$\Rightarrow$ 得出 $\quad \sum_{k=1}^{n}k^{10}=\ \dfrac{1}{11}n^{11}+\dfrac{1}{2}n^{10}+\dfrac{5}{6}n^{9}-n^{7}+n^{5}-\dfrac{1}{2}n^{3}+\dfrac{5}{66}n \qquad (18)$

此(18)式對照於前言敘述中的已知公式完全正確無誤，故(17)式也絕對正確！

(範例 e3). 取 $m=14$，則 $\dfrac{1}{m+1}\cdot P_{m+1}^{n+1}\ =\ \dfrac{1}{15}\cdot P_{15}^{n+1}$，由(c6).節知道有：

$\dfrac{1}{15}\cdot P_{15}^{n+1}$ 係數數列：〈1, －91, 3731, －91091, 1474473, －16669653, 135036473, －790943153, 3336118786, －9957703756, 20313753096, －26596717056, 19802759040, －6227020800〉

$\dfrac{1}{14}\cdot P_{14}^{n+1}$ 係數數列：〈1, －78, 2717, －55770, 749463, －6926634, 44990231, －206070150, 657206836, －1414014888, 1931559552, －1486442880, 479001600〉

$\frac{1}{13}\cdot P_{13}^{n+1}$係數數列：〈1, −66, 1925, −32670, 357423, −2637558, 13339535, −45995730, 105258076, −150917976, 120543840, −39916800〉

$\frac{1}{12}\cdot P_{12}^{n+1}$係數數列：〈1, −55, 1320, −18150, 157773, −902055, 3416930, −8409500, 12753576, −10628640, 3628800〉

$\frac{1}{11}\cdot P_{11}^{n+1}$係數數列：〈1, −45, 870, −9450, 63273, −269325, 723680, −1172700, 1026576, −362880〉

$\frac{1}{10}\cdot P_{10}^{n+1}$係數數列：〈1, −36, 546, −4536, 22449, −67284, 118124, −109584, 40320〉

$\frac{1}{9}\cdot P_{9}^{n+1}$係數數列：〈1, −28, 322, −1960, 6769, −13132, 13068, −5040〉

$\frac{1}{8}\cdot P_{8}^{n+1}$係數數列：〈1, −21, 175, −735, 1624, −1764, 720〉

⋮

(e3-1). 這 14 階方陣太龐大！文書檔案頁面寬度無法容納，就採用聯立方程式法： $b_{14} = d_{14} = 1$， $b_{13} = -91 + d_{13} = 0$， $b_{12} = 3731 - 78\,d_{13} + d_{12} = 0$，

$b_{11} = -91091 + 2717\,d_{13} - 66\,d_{12} + d_{11} = 0$，

$b_{10} = 1474473 - 55770\,d_{13} + 1925\,d_{12} - 55\,d_{11} + d_{10} = 0$

$b_{9} = -16669653 + 749463\,d_{13} - 32670\,d_{12} + 1320\,d_{11} - 45\,d_{10} + d_{9} = 0$

$b_{8} = 135036473 - 6926634\,d_{13} + 357423\,d_{12} - 18150\,d_{11} + 870\,d_{10} - 36\,d_{9} + d_{8} = 0$

$b_{7} = -790943153 + 44990231\,d_{13} - 2637558\,d_{12} + 157773\,d_{11} - 9450\,d_{10} + 546\,d_{9} - 28\,d_{8} + d_{7} = 0$

$b_{6} = 3336118786 - 206070150\,d_{13} + 13339535\,d_{12} - 902055\,d_{11} + 63273\,d_{10} - 4536\,d_{9} + 322\,d_{8} - 21\,d_{7} + d_{6} = 0$

$b_{5} = -9957703756 + 657206836\,d_{13} - 45995730\,d_{12} + 3416930\,d_{11} - 269325\,d_{10} + 22449\,d_{9} - 1960\,d_{8} + 175\,d_{7} - 15\,d_{6} + d_{5} = 0$

$b_{4} = 20313753096 - 1414014888\,d_{13} + 105258076\,d_{12} - 8409500\,d_{11} + 723680\,d_{10} - 67284\,d_{9} + 6769\,d_{8} - 735\,d_{7} + 85\,d_{6} - 10\,d_{5} + d_{4} = 0$

$b_{3} = -26596717056 + 1931559552\,d_{13} - 150917976\,d_{12} + 12753576\,d_{11} - 1172700\,d_{10} + 118124\,d_{9} - 13132\,d_{8} + 1624\,d_{7} - 225\,d_{6} + 35\,d_{5} - 6\,d_{4} + d_{3} = 0$

$b_2 =$ 19802759040 − 1486442880 d_{13} +120543840 d_{12} − 10628640 d_{11} +1026576 d_{10} − 109584 d_9 +13068 d_8 − 1764 d_7 +274 d_6 − 50 d_5+11 d_4 − 3 d_3+ d_2 = 0

$b_1 =$ − 6227020800+479001600 d_{13} − 39916800 d_{12} +3628800 d_{11} − 362880 d_{10} +40320 d_9 − 5040 d_8+ 720 d_7 − 120 d_6+24 d_5 − 6 d_4 +2 d_3 − 1 d_2 + d_1 = 0

解此 14 等式組成的聯立方程式，依序計算出各 d_i 值，分別得到下列數值；

$b_{14} = d_{14} = 1$ ，d_{13} = 91，d_{12} = 3367，d_{11} = 66066，d_{10} = 752752，d_9 = 5135130，d_8 = 20912320，d_7 = 49329280，d_6 = 63436373，d_5 = 40075035，d_4 = 10391745，d_3 = 788970，d_2 = 8191，d_1 = 1，由這些所求的 d_i 值與 b_i 值繼續推演表示式。

(e3-2). 再將此 $m = 14$ 所求的全部 d_i 值與 b_i 值代入(11)式中，得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{14} = 1\cdot\frac{1}{15}\cdot P_{15}^{n+1} + 91\cdot\frac{1}{14}\cdot P_{14}^{n+1} + 3367\cdot\frac{1}{13}\cdot P_{13}^{n+1} + 66066\cdot\frac{1}{12}\cdot P_{12}^{n+1} + 752752\cdot\frac{1}{11}\cdot P_{11}^{n+1} + 5135130\cdot\frac{1}{10}\cdot P_{10}^{n+1} + 20912320\cdot\frac{1}{9}\cdot P_{9}^{n+1} + 49329280\cdot\frac{1}{8}\cdot P_{8}^{n+1} + 63436373\cdot\frac{1}{7}\cdot P_{7}^{n+1} + 40075035\cdot\frac{1}{6}\cdot P_{6}^{n+1} + 10391745\cdot\frac{1}{5}\cdot P_{5}^{n+1} + 788970\cdot\frac{1}{4}\cdot P_{4}^{n+1} + 8191\cdot\frac{1}{3}\cdot P_{3}^{n+1} + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot P_{2}^{n+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{14} = \frac{1}{15}\cdot P_{15}^{n+1} + \frac{13}{2}\cdot P_{14}^{n+1} + 259\cdot P_{13}^{n+1} + \frac{11011}{2}\cdot P_{12}^{n+1} + 68432\cdot P_{11}^{n+1} + 513513\cdot P_{10}^{n+1} + \frac{20912320}{9}\cdot P_{9}^{n+1} + 6166160\cdot P_{8}^{n+1} + 9062339\cdot P_{7}^{n+1} + \frac{13358345}{2}\cdot P_{6}^{n+1} + 2078349\cdot P_{5}^{n+1} + \frac{394485}{2}\cdot P_{4}^{n+1} + \frac{8191}{3}\cdot P_{3}^{n+1} + \frac{1}{2}\cdot P_{2}^{n+1} \tag{19}$$

這(19)式就是以排列記號數 P_{m+2-r}^{n+1} 的線性組合來表示出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的型式！

此時直接以(2)式型式結構取 $m = 14$ 展開來計算，即可檢驗(19)式 (省略)。

(e3-3). 解開這(19)式以求出此多項式的真確表示式

$$\sum_{k=1}^{n} k^{14} = \frac{1}{15}(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-12)(n-13) + \frac{13}{2}(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-12) + 259\cdot(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-11) + \frac{11011}{2}(n+1)n\cdots(n-10) +$$

$$68432\cdot(n+1)n\cdots(n-9)+513513\cdot(n+1)n\cdots(n-8)+\frac{20912320}{9}(n+1)n\cdots(n-7)$$

$$+6166160\cdot(n+1)n\cdots(n-6)+9062339\cdot(n+1)n\cdots(n-5)+\frac{13358345}{2}\cdot(n+1)n\cdots(n$$

$$-4)+2078349\cdot(n+1)n\cdots(n-3)+\frac{394485}{2}\cdot(n+1)n\cdots(n-2)$$

$$+\frac{8191}{3}\cdot(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$=\frac{1}{15}(n^{15}-90n^{14}+3640n^{13}-87360n^{12}+1383382n^{11}-15195180n^{10}+118366820n^{9}-$$

$$655906680n^{8}+2545175633n^{7}-6621584970n^{6}+10356049340n^{5}-6282963960n^{4}-$$

$$6793958016n^{3}+13575738240n^{2}-6227020800n)+\frac{13}{2}(n^{14}-77n^{13}+2639n^{12}-53053n^{11}$$

$$+693693n^{10}-6177171n^{9}+38063597n^{8}-161079919n^{7}+451136686n^{6}-756808052n^{5}$$

$$+517544664n^{4}+445116672n^{3}-1007441280n^{2}+479001600n)+$$

$$259\cdot(n^{13}-65n^{12}+1859n^{11}-30745n^{10}+324753n^{9}-2280135n^{8}+10701977n^{7}-32656195$$

$$n^{6}+59262346n^{5}-45659900n^{4}-30374136n^{3}+80627040n^{2}-39916800n)+\frac{11011}{2}(n^{12}-$$

$$54n^{11}+1265n^{10}-16830n^{9}+139623n^{8}-744282n^{7}+2514875n^{6}-4992570n^{5}+4344076n^{4}$$

$$+2124936n^{3}-6999840n^{2}+3628800n)+68432\cdot(n^{11}-44n^{10}+825n^{9}-8580n^{8}+53823n^{7}-$$

$$206052n^{6}+454355n^{5}-449020n^{4}-146124n^{3}+633696n^{2}-362880n)+513513\cdot(n^{10}-35n^{9}$$

$$+510n^{8}-3990n^{7}+17913n^{6}-44835n^{5}+50840n^{4}+8540n^{3}-69264n^{2}+40320n)+$$

$$\frac{20912320}{9}(n^{9}-27n^{8}+294n^{7}-1638n^{6}+4809n^{5}-6363n^{4}-64n^{3}+8028n^{2}-5040n)+$$

$$6166160\cdot(n^{8}-20n^{7}+154n^{6}-560n^{5}+889n^{4}-140n^{3}-1044n^{2}+720n)+9062339\cdot(n^{7}$$

$$-14n^{6}+70n^{5}-140n^{4}+49n^{3}+154n^{2}-120n)+\frac{13358345}{2}\cdot(n^{6}-9n^{5}+25n^{4}-15n^{3}-26$$

$$n^{2}+24n)+2078349\cdot(n^{5}-5n^{4}+5n^{3}+5n^{2}-6n)+\frac{394485}{2}\cdot(n^{4}-2n^{3}-n^{2}+2n)+\frac{8191}{3}\cdot$$

$$(n^{3}-n)+\frac{1}{2}(n^{2}+n)$$

$$= \frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{30}n^{11} + \frac{143}{18}n^{9} - \frac{143}{10}n^{7} + \frac{91}{6}n^{5} - \frac{691}{90}n^{3} + \frac{7}{6}n \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{14} = \frac{1}{15}n^{15} + \frac{1}{2}n^{14} + \frac{7}{6}n^{13} - \frac{91}{30}n^{11} + \frac{143}{18}n^{9} - \frac{143}{10}n^{7} + \frac{91}{6}n^{5} - \frac{691}{90}n^{3} + \frac{7}{6}n \tag{20}$$

歷經準確而無畏的計算使(19)式轉換成真確無暇的 (20)式多項式結果！

肆、結論

(一) 再檢視(2)式 $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{J=1}^{m}\left\{ \left[\sum_{u=0}^{J-1}(-1)^u \cdot C_u^J \cdot (J-u)^m\right] \cdot \frac{P_{J+1}^{n+1}}{(J+1)!} \right\}$的結構型式，其中 $\frac{P_{J+1}^{n+1}}{(J+1)!}$ 恰為 C_{J+1}^{n+1}，因此；

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{J=1}^{m}\left\{ \left[\sum_{u=0}^{J-1}(-1)^u \cdot C_u^J \cdot (J-u)^m\right] \cdot C_{J+1}^{n+1} \right\} \tag{21}$$

此(21)式為以組合記號數描述前 N 個連續正整數等冪次和的多項式函數表示式！

只要取定 m 的任一自然數值代入(21)式計算之，即可得出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的組合記號數表示式。(21)式與(2)式俱為兩組同義但型態相異的函數表示式。

(二) 若直接以 $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$ 型式製作出差分運算表，將無法經由牛頓插值多項式法直接推演出(2)式，還必須透過演算法將各個 P_{J+1}^{n} 配型成 P_{J+1}^{n+1}，這可是個鉅大工程！這裡以比對模仿而選上 $g(n) = \sum_{k=-1}^{n} k^m$ 型式就可簡易直擊到 P_{J+1}^{n+1} 型構造，進而推理出(2)式，這樣的美妙設計規劃與指導演算操作可謂是新創之舉。

(三) [主題二]是藉由[主題一]的逆向思考，先想定新型式結構 $\frac{1}{m+2-i} \cdot P_{m+2-i}^{n+1} = \sum_{r=1}^{m+1-i} u_{m+2-i-r}^{[m+1-i]}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+2-i-r}\right)$，並找出各組對應係數 $u_{m+2-i-r}^{[m+1-i]}$ 值，再置入係數 d_i 與 b_i 值以設定適當關係式 $\sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i} \cdot \frac{1}{m+2-i} \cdot P_{m+2-i}^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} b_{m+1-i}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}\right)$，最後提出以指定係數值 $d_m = b_m = 1$ ， $b_{m-1} = b_{m-2} = b_{m-3} = \cdots = b_3 = b_2 = b_1 = 0$ ，及組建 m 列的聯立方程式等運算規範準則，進而計算出各 d_i 值，詳盡精準展開 $\sum_{k=1}^{n} k^m =$

$\sum_{i=1}^{m} d_{m+1-i} \cdot \dfrac{1}{m+2-i} \cdot P_{m+2-i}^{n+1}$，終得 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n)$ 的真確多項式函數型式。

參考文獻

1. 以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的公式解，李維昌 數學傳播 44 卷 1 期，pp.94-96，2020 年 3 月 。
2. 連續整數冪次和公式的另類思考，李政豐 數學傳播 26 卷 2 期 2002 年 6 月
3. 級數求和法， 中正大學余文卿教授在西松高中演講稿。
4. 一些發散級數的求和法， 余文卿 數學傳播 22 卷 4 期 1998 年 12 月。
5. Bernoulli 多項式與連續冪次和探討，鍾承道 數學傳播 (138)期 2011 年 6 月。
6. 兩個多項函數的插值公式， 蔡聰明 數學傳播 40 卷 1 期，pp.16-30，2016 年 3 月 。
7. 以矩陣運算求取 前 N 項連續正整數等冪次和 的多項式函數， 李輝濱 ，科學教育月刊 4**期，2022 年 **月出版發行。
8. 笹部貞市郎 : 幾何學、代數學辭典 1988 九章出版社。
9. Weisstein, Eric W. (4 January 2016), "Bernoulli Number", MathWorld, Wolfram, retrieved 2 July 2017.

【完】