

# 風力發電競賽的先備科學知識

周 鑑 恆

萬能科技大學 航空暨工程學院航空光機電系

## 壹、前言

大規模的離岸風力發電是近年影響最為深遠的能源轉型計畫，風電產業本土化是當務之急，國內各項相關配套措施正方興未艾，日新又新，其中風電科技向下扎根更是重中之重。在台灣除了在科教活動中常見風電之教學，許多學校探究與實作課程中也以風力發電作為主題。

在這波潮流中，風力發電競賽如雨後春筍，而近年規模較大的正式比賽，當屬台東全縣國中生風力發電比賽(註 1)和一年一度的 KidWind 亞洲聯賽(今年 2021 年於 11 月 19~20 日在「沙崙綠能科學城」舉辦)(註 2)。作者有幸擔任這些比賽的裁判，所以特此分享經驗並提出幾點有助於成長的小知識。

決定風力發電性能的因素相當多，單憑實驗探究或在競賽中眼見為憑的經驗，其實不容易歸納出正確的結論，有時甚至受到實際經驗的誤導，使得理解風電原理有治絲益棼的情形。

理論上，風吹過某截面時，通過此截面的風能功率，正比於風速的三次方與此截面積的乘積。所以風的截面積愈大，風能通過此截面的功率愈大。因此風車葉片愈長，掃過的截面積愈大，就愈有可能獲得較多的風能功率。

但為什麼比賽時有些較大的風車發出的電力功率反而較小呢？這種現象相當容易發生，這是風電競賽必須留意之處，也正是作者寫此文的動機之一。

原因是，雖然風車尺寸愈大，的確獲得風能的功率才有可能更大，但尺寸較大的風車葉片必須精心設計，使得風能夠對整支葉片做功。如果設計錯誤，風車葉片尺寸較大，反而會因葉片各區段相互消耗而喪失更多能量，而無法有效驅動發電機發電。所以比賽結果才會是：大風車的發電量反而輸給小風車的發電量。只因為影響風力發電的變數相當多，對初學者而言，這樣的結果反而可能模糊了重要事實。

又例如：因為傳動系統也會大幅影響發電，風車本身較佳的作品可能因為傳動系統設計不良，被驅動的發電機的電力輸出反而不如風車本身較遜、但傳動系統更為合理的作品。這又令參賽學生在互相觀摩中產生難解的疑惑。

風車本身仍有許多奧秘有待解決，也還有許多創新發明的空間尚待發掘，改良現在的

風車仍有不少的機會。在許多同學試誤(trial and error)過程中，希望本文能釐清若干已知的背景知識，讓風力發電競賽之內容更聚焦於具有更大價值的創作，協助參與同學在探究實作的經驗中汲取或印證其中的正確知識。讓探究實作配合若干已知的背景知識，能真正聚焦風力發電科技，而顯得更有活力與價值。

## 貳、常見的困惑現象

比賽就一定有規則和限制條件。一般而言，比賽常在簡易的風洞中進行，而為公平起見，風車尺寸、發電機、傳動系統也都有相關的規定。以下幾項背景知識有助參賽者在比賽規則限制之下，作出科學上正確的決定，進而贏得比賽。

本文中討論的這幾項背景知識，在比賽或正式設計風車時都須用到，主要包括：(1)風車尺寸大小到底有何影響，尺寸大的風車能讓更大截面積的風吹過風車，那麼，更大截面積的風與風能又有何關係？(2)設計風力發電系統時，風車轉軸要如何安裝？或者設計風車轉軸時要注意哪些要點？(3)如果要加裝增速齒輪，必須注意哪些理想的條件？(4)量測發電機的輸出功率，要注意哪些細節？

其中，有關(2)必須用兩個相隔適當距離的軸承，以便使風車轉軸固定在一定位置轉動，作者先假設風車設計、製作時必然發生的若干情形，再說明在這些情形下，用兩適當分開的軸承固定轉軸有何優點。

### (1)風車掃過面積與風車輸出功率

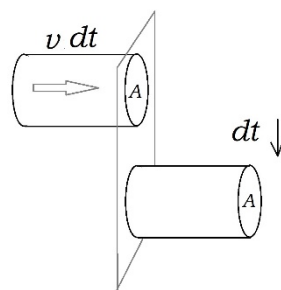
一般高中(含高中)以下學生之風力發電競賽，通常不會比較更為艱深的「功率係數」(即風車之輸出風能電功率與通過風車掃過截面積的風能功率之間的比例)(註3)，一般只以風力發電機最終輸出的電功率(單位為瓦特)，再看看一段時間後(例如：1分鐘)發出電能(單位為焦耳)，作為評分標準。

相當多的中學生對抽象的功率概念並不完整，

一般教科書都會仔細講述「功率」的意義，在此也

就不再贅述。萬一學生一時無法意會抽象概念，不妨給一個較具象的說法：發電機的輸出功率等於輸出電流乘以電壓，代表發電機「同時能驅動多少電器」，或者說能供應幾個家庭的用電。如果發電機輸出的功率大，代表發電機發出的電力可以“同時”使更多的電器運作；反之，則只能同時驅動較少的電器。至於發電機發出的電能等於功率乘以此功率持續的時間。因此，發出較大的電能，就能「在較長的時間持續驅動一定數量的電器」。

理論上，風車掃過面積愈大，的確才“可能”獲得較多的風能。見圖一，風吹過某截



$$P = \frac{\frac{1}{2} \rho (v dt A) v^2}{dt} = \frac{1}{2} \rho v^3 A$$

圖一：風帶過某截面 A 的動能功率。

面積  $A$  時，通過此截面積的風能功率  $P$  可計算如下：

$$P = \frac{\frac{1}{2} \rho (v dt) A v^2}{dt} = \frac{1}{2} \rho A v^3 \dots\dots\dots (1)$$

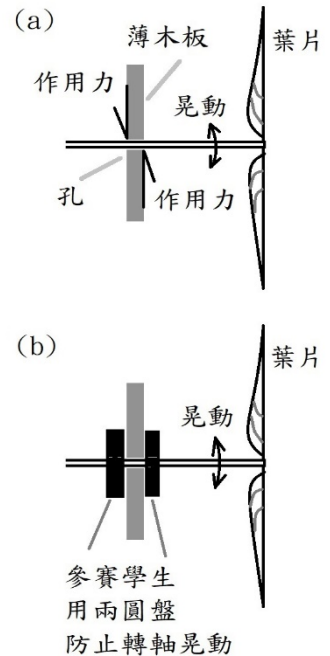
從此公式可見：截面積  $A$  較大的風能功率也較大；大尺寸的風車才能擷取較大截面的風能，才能獲得較大的風能。

但為什麼有時小風車反而獲勝？在比賽中，往往小風車反而勝過大風車，為什麼呢？初學者不容易確認這問題的真正原因。

因為整片葉片各區段不能互相干擾，否則風車的性能反而變差！設計不良的大尺寸風車更容易發生葉片各區段無法有效配合或相互耗損能量的情形，以致於風車無法有效對發電機做功。

另一方面，風洞大小也要考慮！自然界的風受到地面摩擦，在近地面的範圍風速較低，在一定高度之上，平均風速差不多的風一般都分布在相當廣闊空間中。因此，在高塔柱上的風車愈大，當然就能獲得愈多的風能。

比賽時，臨時搭建的簡易風洞送風並不均勻，靠近風洞周邊牆壁處的風速可能較慢。風車尺寸太大，也可能因快速的葉片尖端在低速風中運作，而葉片中間區段速度較慢(或近根部)，反而在高速風中運動。如此一來，在假設均勻風速條件下設計的風車葉片，即使並無問題，但因實際上風速不均勻，也會發生整片葉片各區段相互干擾消耗的情形(即有些區段風對葉片做功，有些區段葉片對風做功)，風車的性能表現就差了。



圖二：用單一的圓孔固定轉軸，會造成轉軸晃動，轉軸受到太大的摩擦力等問題。

## (2)設計風車轉軸的注意事項

風車轉軸會影響風車驅動發電機的能力。風車運轉時必須符合它原本設計的要求，如果風車轉軸在風車轉動時變形、振動，風車轉動就不正常，也就破壞了原來設計的要求，就會影響風車從風中獲得能量的效率。此外，轉軸不固定、變形、會搖動或振動，都會造成風車動能的損失，在雙重折損之下，會較明顯地降低風車的性能。

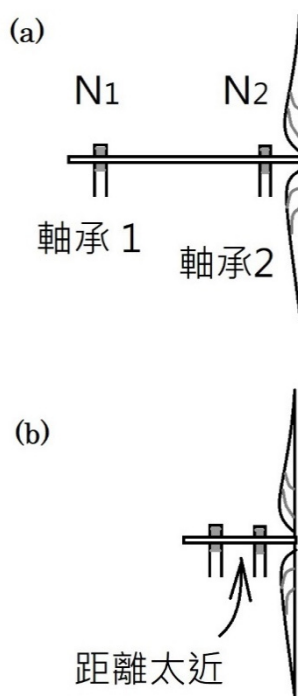
## 堅硬不變形

因此，「風車轉軸的要求」是：(1)堅硬不變形、(2)轉動時不搖動、不鬆動，並且維持在一定的空間位置。直徑 80 公分左右的微型風車(風速 10m/s 以下)的轉軸，可以是直徑約 5~6 公釐、中空の碳纖維桿、金屬桿或直徑 8 公釐的硬木桿。

## 常見問題

比賽中「常見的問題」是：①轉軸材質和尺寸不適當，以致於轉軸變形彎曲。②沒有用適當的方式固定轉軸，以致於轉軸搖晃，不能穩定地在空間中不動的位置運轉。

有些學生甚至單用一片相當薄的木片上鑽一孔來固定轉軸(見圖二)。如此一來轉軸當然會搖動，且會受到很大的摩擦力。以外，還有許多參賽學生根本不知道用軸承來固定轉軸，而軸承卻早已極普遍用在各種機械。軸承本身也值得理解與探究。

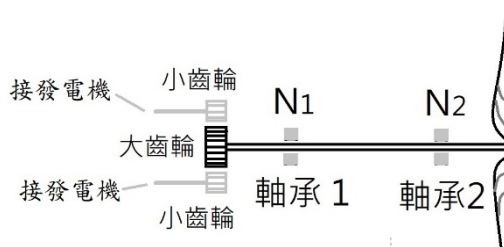


圖三：用兩個軸承固定轉軸。

## 用軸承固定

應當如何固定轉軸在空間中轉動呢？必須用兩個軸承(見圖三)，使原來即十分潤滑的軸承受更小的正向力(Normal force)，而受更小的摩擦力。

只用一片木板(或其它材料)上的圓孔固定轉軸的位置，其實非常不妥，因為根據槓桿原理，如果重心不在薄板的位置，如果風車系統轉動時不平衡，轉軸受到正向力會因此增加，因而受到較大的摩擦力。



圖四：風車系統由風車、大齒輪轉軸構成，具對稱性。轉軸與對稱軸重合。

正確的作法是，用兩個軸承分別固定轉軸的兩端，兩軸承的距離必須適當加大，以儘量減少軸承所受的力和轉軸所受的力。

為什麼要用兩個適當分開的軸承固定風車轉軸呢？討論以下情形，不難看出其中的好處。因為風車之製作和運轉總有不完美之處，事實上風車不完美之處都有一定的容忍度，換言之，不完美的情形一定存在。本文中假設兩種不完美的情形，無論這些不完美是否超

出容忍度，並以物理學原理，推敲這些不完美將對軸承造成什麼不利的影響。而手工製作的風車難免不完美，當然就會使軸承造成額外的受力，或者說風車的不完美，需要軸承承受額外的力來克服。兩軸承分開一些，風車儘量靠近軸承，就能減輕這些不完美造成額外的作用力。

首先討論的情形(一)，則是假設風車與轉軸之質量完美對稱，所受外力矩也對稱的情形下，兩軸承也宜分開一些。

### 情形(一)：風車與轉軸構成對稱性極佳的系統，並繞著此系統的對稱軸轉動。

風車系統受風的「對稱力矩」加速或減速，也受發電機負載的「對稱力矩」而減速(見圖四)。

所謂風車與轉軸構成對稱性極佳的系統是指：以風車轉軸之中心線為對稱軸，在此對稱軸四周，任一位置點的質點質量，與轉軸另一側相對此位置點之質點質量相同，亦即，垂直對稱軸並被此對稱軸平分的任何線段之兩端點的質點質量都相同。整個系統可視為由無數質點構成。當對稱軸和轉軸重合時，風車和其轉軸的角動量(對對稱軸上任一點定義)都平行對稱軸(轉軸)。

所謂「對稱力矩」是指：作用在風車、轉軸上的大齒輪上的力，對對稱軸上任一點定義的力矩，是對稱的。也就是說：大齒輪受到兩小齒輪的作用力，風車所受風的作用力。在垂直對稱軸，又被對稱軸中分的線段兩端點所在的作用點所受的力，對對稱軸上任一參考點造成的兩力矩，此兩力矩平行對稱軸的分量相同，垂直對稱軸的分量互相抵消。而作用在這兩個作用點的力，平行轉軸方向的分量相等且同向；平行線段方向之分量相等但方向相反；垂直線段與對稱軸的分量相等但方向相反。

$$\text{如果風車等速運動，即} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

其中， $\vec{L}$  為風車系統(由風車、大齒輪、轉軸構成)的角動量， $dt$  為時間  $t$  的微分；兩軸承、風力和兩小傳動齒輪，則提供力矩(見圖四)。

如果風車加速轉動，但風車方向維持固定(此為設計要求)，因此  $\vec{L}$  之方向不變，大小可能變化，即  $d\vec{L}$  方向始終平行方向不變的  $\vec{L}$ 。

所以，根據力矩與角動量變化率的關係式，即

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad \dots\dots\dots(3)$$

其中  $\vec{L}$  為風車系統的角動量， $\vec{\tau}$  為其所受之力矩。值得注意的是： $\vec{\tau}$  和  $\vec{L}$  必須對同一參考點定義。

因為轉軸的方向不變，選用轉軸中心上的任一固定點  $O$  作為參考點，均很合適處理這個問題。又因為風車系統為對稱的，轉軸又是風車系統的對稱軸，所以角動量的方向與轉軸的方向重合。

因為  $d\vec{L}$  只向著固定的轉軸方向(也可能是等速轉動，則  $d\vec{L} = 0$ )，所以力矩的總和也只有轉軸方向的分量。換言之，不平行轉軸方向的力矩總和必須為零。

因為風力造成的力矩和成對小齒輪(或聯軸器)造成的力矩，都對轉軸具有稱性，所以對參考點  $O$  定義的風力造成的力矩和兩齒輪造成的力矩，也只有轉軸方向的分量，忽略軸承摩擦力所提供向著轉軸方向的力矩。用數學式表示：

也就是說：在情況(一)中，因為風車、轉軸、大齒輪的質量分布，無論轉速有無增減，角動量變化量並無垂直轉軸的分量，只有平行轉軸的分量，所以所受之線力矩也沒有垂直轉軸的分量，

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{平行固定轉軸方向}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{平行固定轉軸方向}} = (\vec{\tau}_{\text{風力}} + \vec{\tau}_{\text{小齒輪}}) + \vec{\tau}_{\text{重力}} + \vec{\tau}_{\text{軸承正向力}} \dots\dots\dots(4)$$

因為風力和兩對稱小齒輪的力矩，會等於  $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{平行固定轉軸方向}}$ ，並改變風車系統之轉

速。不論參考點  $O$  定在轉軸中心線何處此結論均成立。於是  $\vec{\tau}_{\text{重力}}$  和  $\vec{\tau}_{\text{軸承}}$  之總和必須為零，見圖五。

根據力矩的定義，兩軸承提供的力矩(可分別分解為

$N_1$ 、 $H_1$ ； $N_2$ 、 $H_2$ )和重力(可分解為  $W_N$ 、 $W_H$ )提供

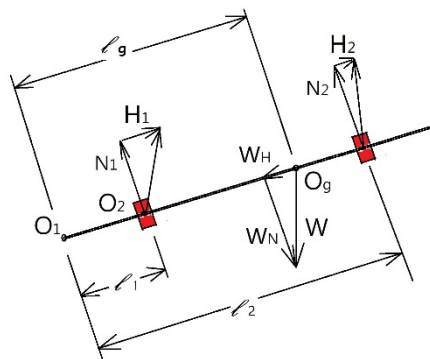
的力矩(以  $O_1$  為參考點)(見圖五)。分別為：

$$\ell_1 N_1 + \ell_2 N_2 - \ell_g W_N = 0 \quad (O_1 \text{ 為參考點}) \dots\dots(5)$$

或者以  $O_2$  為參考點：

$$(\ell_2 - \ell_1) N_2 - (\ell_g - \ell_1) W_N = 0 \quad (O_2 \text{ 為參考點}) \dots\dots(6)$$

或者以  $O_g$  為參考點：



圖五：重力  $W$  和兩軸承提供的力矩都垂直轉軸。

$(\ell_1 - \ell_g)N_1 + (\ell_2 - \ell_g)N_2 = 0$  (以重心所在的空間固定點  $O_g$  為參考點，而重心剛好不會動，所以重力對此參考點造成的力矩為零) ..... (7)

其中， $W_N$  大於零， $W$  為全系統重量。

重力和軸承提供平行轉軸的力分量  $W_H$ 、 $H_1$ 、 $H_2$ ，所造成的力矩為零。

假設  $\ell_1$ ， $\ell_2$ ， $\ell_g$ ， $W_N$ ， $W$  已知。再從力平衡來考慮：

$$W_H = H_1 + H_2 ; N_2 + N_1 = W_N \quad \text{..... (8)}$$

根據力矩公式((6)式)：

$$N_2 = \left( \frac{\ell_g - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} \right) W_N \quad \text{..... (9)}$$

代入力公式((8)式)：

$$N_1 = W_N - \left( \frac{\ell_g - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} \right) W_N = \left( \frac{\ell_2 - \ell_g}{\ell_2 - \ell_1} \right) W_N \quad \text{..... (10)}$$

用另一力矩公式((6)式、(7)式)，再驗證：

$$N_2 = - \left( \frac{\ell_1 - \ell_g}{\ell_2 - \ell_g} \right) N_1 = \frac{-\ell_1 + \ell_g}{\ell_2 - \ell_1} W_N$$

$$\Rightarrow N_1 = \left( \frac{\ell_2 - \ell_g}{\ell_2 - \ell_1} \right) W_N \quad \text{..... (11)}$$

如果轉軸是水平的，則根據(8)式，

$$W_H = H_1 = H_2 = 0 ; N_1 = \frac{\ell_2 - \ell_g}{\ell_2 - \ell_1} W ; N_2 = \frac{\ell_g - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} W \quad \text{..... (12)}$$

如果轉軸不是水平的公式(12)中  $W$  即為  $W_{N_0}$

如果， $\ell_1 < \ell_g < \ell_2$ ，即重心在兩軸承之間，則：

$$N_1 = \frac{\ell_2 - \ell_g}{\ell_2 - \ell_1} W_N > 0 \quad \text{向上} \quad \text{..... (13(a))}$$

$$N_2 = \frac{\ell_g - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} W_N > 0 \quad \text{向上} \quad \text{..... (13(b))}$$

如果  $\ell_g > \ell_2 > \ell_1$  重心到兩軸承之外，



$$N_1 = \frac{\ell_2 - \ell_g}{\ell_2 - \ell_1} W_N < 0 \quad \text{向下} \quad \dots\dots\dots(14(a))$$

$$N_2 = \frac{\ell_g - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} W_N > W_N > 0 \quad \text{向上} \quad \dots\dots\dots(14(b))$$

值得注意的是，如果  $\ell_g - \ell_1$  是大於零的某定值：若重心在前方軸承之外，見 14(a) 式及 14(b) 式當  $\ell_2 - \ell_1$  變得愈小， $N_2$  會變得愈來愈大， $N_1$  也會更大，若質心(近於葉片位置)突出軸承較遠，即  $\ell_g - \ell_1$ 、 $\ell_g - \ell_2$  都變大， $N_1$ 、 $N_2$  也會變大。這不利於軸承運作，也容易破壞軸承支架的結構。轉軸受  $N_2$  之力愈大，也可能傷害轉軸。從 13(a)、13(b)、14(a)、14(b) 等式中也可見  $\ell_2 - \ell_1$  大一些(即兩軸承分開一些)， $N_1$ 、 $N_2$  都會小一點。 $\ell_2 - \ell_1$  變得很小(近似只用一個軸承)， $N_1$ 、 $N_2$  都會變得很大，摩擦力就很大，相關材料都容易損壞。

**情形(二)：力矩不對稱的情形，例如：風車轉軸上的大齒輪，只驅動一個小齒輪。假設因傳動發電機小齒輪的大齒輪所受力矩不對稱造成此力矩不對稱。**

如果發電機只用「一個」小齒輪傳動，小齒輪在大齒輪的下方(以簡化計算)(見圖六)。則小齒輪施加在大齒輪上的作用力  $F_D$  平行地面，但垂直轉軸，與轉軸的垂直距離為  $r_D \sin \theta$ ，就會對  $O_1$  參考點造成力矩。

此力矩在平行轉軸方向的分量，只會使風車系統增減轉速。

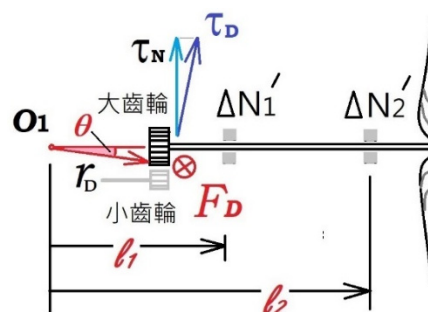
此力矩在垂直轉軸的分量，因為角動量(對  $O_1$  定義)垂直轉軸的方向沒有改變(因為在此假設風車、轉軸和大齒輪本身質量分布非常對稱，以免計算太複雜以便凸顯此因素造成之後果)，所以此垂直轉軸的分量必須被軸承抵銷。見圖六。

$$\vec{\tau}_D = \vec{r}_D \times \vec{F}_D$$

$$\Rightarrow \tau_N = r_D \times F_D \cos \theta \quad \dots\dots\dots(15)$$

$\tau_N$  的方向垂直地面，也垂直轉軸，此力矩平行轉軸方向的分向會改變轉速。

原先尚未接觸小齒輪時，風車系統已受軸承之力而力與力矩平衡， $\Delta N_1'$ 、 $\Delta N_2'$  則是因為被傳動的小齒輪施加的力  $F_D$  而額外作用在轉軸上的力，兩者均垂直



圖六：如果風車轉軸上的大齒輪只轉動一個小齒輪會造成額外的力和力矩。



轉軸和平行地面。

根據力矩平衡：

$$\ell_1 \Delta N_1' + \ell_2 \Delta N_2' = r_D F_D \cos \theta \text{ (垂直地面，垂直轉軸的方向)} \dots\dots\dots (16)$$

其中  $\Delta N_1'$ 、 $\Delta N_2'$  是為了克服  $F_D$ ，軸承“額外”作用在轉軸上的力， $\Delta N_1'$ 、 $\Delta N_2'$  的方向也平行地面。

$$\text{根據力平衡：} \quad \Delta N_1' + \Delta N_2' = F_D \text{ (平行地面，但垂直轉軸的方向)} \dots\dots\dots (17)$$

則可以做以下計算

$$\begin{aligned} \Delta N_2' &= F_D - \Delta N_1' \\ \Rightarrow \ell_1 \Delta N_1' + \ell_2 (F_D - \Delta N_1') &= r_D F_D \cos \theta \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta N_1' = \left( \frac{\ell_2 - r_D \cos \theta}{\ell_2 - \ell_1} \right) F_D \dots\dots\dots (19(a))$$

而

$$\Delta N_2' = \left( \frac{r_D \cos \theta - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} \right) F_D \dots\dots\dots (19(b))$$

值得注意的是：①上述的計算，與風車系統完全不轉動，原先只受重力和  $N_1$ 、 $N_2$  的力，之後再加上受  $F_D$  之力，進而使系統靜力平衡而額外增加的  $\Delta N_1'$ 、 $\Delta N_2'$  的計算一致。

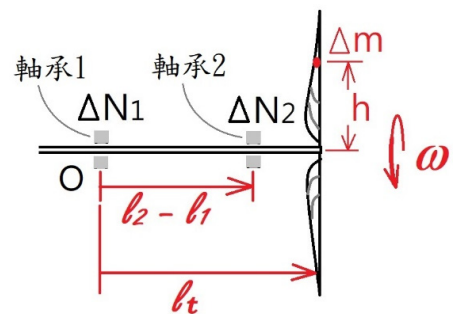
②同樣的， $\ell_2 - \ell_1$  大一些，即兩軸承分開些， $\Delta N_1'$ 、 $\Delta N_2'$  就變小； $\ell_2 - \ell_1$  小一些，即兩軸承靠近， $\Delta N_1'$ 、 $\Delta N_2'$  即變大。

### 情形(三)：風車的對稱性不夠好的情形。

見圖七，風車正常運轉，但風車葉片質量不一致，以致於有不平衡的現象。圖七中  $\Delta m$  假設為某葉片多出的質量為計算上的方便，也假設此多出的質量體積不大，距轉軸的距離為  $h$ ，在此情形下，受軸承約束，轉軸仍然穩定地在空間中的不動位置轉動，問軸承受力的情形？

處理此問題時，將系統分為轉軸和風車兩獨立的部分。其中：轉軸始終被軸承限制在空間中不動的位置。風車必須受轉軸的力才能穩定轉動。

如果風車總質量為  $M$ ， $M$  又可分為質量分布均勻部分  $M'$  和造成不平穩的  $\Delta m$ ，根據質心的公式：



圖七：由軸承 1 和軸承 2 固定轉軸在空間中的特定位置轉動。

$$\begin{aligned}
M\vec{r}_{cm} &= M' \cdot \vec{r}'_{cm} + \Delta m \vec{r}'_{\Delta m} ; \vec{r}'_{cm} = 0 = \text{定值} \\
\Rightarrow M\vec{a}_{cm} &= M' \cdot O + \Delta m \vec{a}'_{\Delta m} \quad \dots\dots\dots(20)
\end{aligned}$$

那麼風車所受所有外力的向量和為：

$$\vec{W} + \vec{F}_c = \vec{F}_{tot} = M\vec{a}_{cm} = M' \cdot O + \Delta m \vec{a}'_{\Delta m} ; \vec{F}_c = \Delta m \vec{a}'_{\Delta m} - \vec{W} ; \vec{W} \text{ 始終向下}$$

其中  $\vec{F}_c$  是轉軸作用在風車的力，反作用力即作用在轉軸上； $\vec{W}$  為風車所受到的重力。

從力平衡的角度，分析轉軸所受的力。風車作用在轉軸上的力為  $-\vec{F}_c = -\Delta m \vec{a} + \vec{W}$ 。

假設轉軸先不轉動，則  $-\vec{F}_c = \vec{W}$ ，力平衡可得：

$$\vec{N}_1' + \vec{N}_2' + \vec{W}_A - \vec{W} = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

$\vec{W}$  為風車作用在軸上的力， $\vec{W}_A$  為轉軸所受的重力， $\vec{N}_1'$ 、 $\vec{N}_2'$  分別為兩軸承作用在轉軸上的力。移項即得：

$$\Rightarrow \vec{N}_1' + \vec{N}_2' = -\vec{W}_A - \vec{W} \quad \dots\dots\dots(22)$$

轉軸轉動之後，轉軸質心的加速度仍為零，而  $-\vec{F}_c = -\Delta m \vec{a} + \vec{W}$

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{W}_A - \vec{F}_c = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

$N_1$ 、 $N_2$ 、 $W_A$ 、 $W$  均只有垂直方向之分量，

$$\Rightarrow \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{W}_A + (\vec{W} - \Delta m \vec{a}'_{\Delta m}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{W}_A + \vec{W} - \Delta m \vec{a}'_{\Delta m} = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

式(22)與式(24)兩條方程式相減，即得：

$$\Delta \vec{N}_1 + \Delta \vec{N}_2 = \Delta m \vec{a}'_{\Delta m} \quad \dots\dots\dots(25)$$

其中，
$$\bar{N}_1 = \bar{N}_1' + \Delta\bar{N}_1 ; \bar{N}_2 = \bar{N}_2' + \Delta\bar{N}_{21}$$

再從力矩平衡的角度來分析，以  $O$  為參考點(見圖七)，先考慮不轉動時轉軸的力矩平衡的情形：

$$(\bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_1) \times \bar{N}_2' + \bar{\ell}_a \times \bar{W}_A + \bar{\ell}_t \times \bar{W} = 0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

轉起來之後

$$(\bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_1) \times \bar{N}_2 + \bar{\ell}_a \times \bar{W}_A + \bar{\ell}_t \times (\bar{W} - \Delta m \vec{a}_{\Delta m}') = 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

(27)式與(26)式相減得：

$$(\bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_1) \times \Delta\bar{N}_2 = \bar{\ell}_t \times \Delta m \vec{a}_{\Delta m}' \quad \dots\dots\dots(28)$$

將(25)式、(28)式改成純量式，得：

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 = \Delta m \omega^2 h$$

$$(\ell_2 - \ell_1) \Delta N_2 = \ell_t \Delta m \omega^2 h \quad \dots\dots\dots(29)$$

在此即可得出  $\Delta N_2$  如下：

$$\Delta N_2 = \frac{\ell_t \Delta m \omega^2 h}{\ell_2 - \ell_1} \quad \dots\dots\dots(30)$$

接著根據式(29)，得出：

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= \Delta m \omega^2 h - \Delta N_2 = \Delta m \omega^2 h - \frac{\ell_t \Delta m \omega^2 h}{\ell_2 - \ell_1} \\ &= \left( \frac{\ell_2 - \ell_1 - \ell_t}{\ell_2 - \ell_1} \right) \Delta m \omega^2 h \quad \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

由此(31)式可知：當  $\ell_2 - \ell_1 = \ell_t$  時，也就是風車幾乎就在  $N_2$  軸承的位置， $\Delta N_1 = 0$ 。意

思是：由軸承 2(見圖七)完全提供因風車葉片不平衡造成額外增加的力(此力當然會繞著轉軸改變方向)。同時  $\Delta N_2$  即為：

$$\Delta N_2 = \Delta m \omega^2 h \quad \dots\dots\dots(32)$$

換言之，即由軸承 2 完全提供  $\Delta m$  所需的向心力。

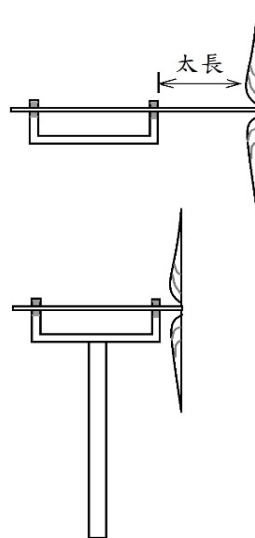
如果  $\ell_2 - \ell_1 < \ell_t$ ，則發現  $\ell_2 - \ell_1$  愈小，

$$\Delta N_1 = \left( \frac{\ell_2 - \ell_1 - \ell_t}{\ell_2 - \ell_1} \right) \Delta m \omega^2 h = \left( 1 - \frac{\ell_t}{\ell_2 - \ell_1} \right) \Delta m \omega^2 h ; \Delta N_2 = \frac{\ell_t \Delta m \omega^2 h}{\ell_2 - \ell_1} \dots\dots(33)$$

$\Delta N_1$ 、 $\Delta N_2$  方向相反，都會變大，這不利於整個風車系統之運轉。 $\ell_t$  變大， $\Delta N_1$ 、 $\Delta N_2$  也變大。

還有每片葉片受力不同而造成力矩的其它情形，也可依力矩和力平衡的方法解決，在此就不再進行計算了。結論都是：風車轉軸宜用兩個分開一些的軸承固定。兩軸承之間距離太小，或者近乎零（相當於只用一個軸承），都會使軸承或於劣質軸承的木板上圓孔，受到很大的力；無法使轉軸穩定。（當然兩軸承相距太遠，又要考慮實際結構和轉軸的問題）

此外，在軸承和風車之間的轉軸長度須儘量減少（見圖八），否則同樣會增加軸承的受力（見式 33），並根據第三定律，同時使轉軸承受較大的力而容易變形彎曲與振動。



圖八：軸承和風車的距離也不宜太長，一方面容易引起晃動，另一方面使軸承承受較大的力。

### 軸承是什麼？哪裡可以買到，用什麼做轉軸

軸承是專門用來固定轉軸在一定位置轉動的裝置。有許多不同的種類，最常用的是滾珠軸承（見圖九）。通常轉軸置於軸承的「內圈」中，「外圈」則固定在支架上，內圈和外圈之間的許多滾珠，則是用「保持架」限制在一定的相對位置。內圈和外圈有相對運動時，滾珠即滾動，可以將摩擦力改成能量耗損更小的滾動阻力。

事實上：軸承相當常見，價格也不貴。日本製、品質較好的小型軸承，約 70~80 元一顆。買有凸緣的軸承比較方便安裝，軸承外徑與內徑都要事先規劃，內徑要配合轉軸直徑，外徑則配合支架上的圓孔。經過測量並有事先仔細計畫的組裝過程，也是頗為重要的學習。



圖九：滾珠軸承的構造。

### (3) 增速齒輪

兩齒輪之間的一些微摩擦可以忽略，齒輪轉動時之振動和噪音帶走的能量也很小，在此完美狀態下，齒輪可以相當完美地將輸入的力學功率，幾乎百分之百轉換成輸出的力學功率(見圖十)。

如果把圖十中 A 範圍之組件視為一個系統(由兩齒輪和兩轉軸構成)，根據功能原理，則：

$$dW_i + dW_o + dW_f + dW_e + \dots = dK \dots (34)$$

其中  $dW_i$  為風力經轉軸在  $dt$  時間間隔中對系統

所做的功； $dW_o$  為發電機轉軸對系統所做的負功，(或某些被系統(齒輪組)做功的機械，因

反作用力對系統所做的負功)。 $dW_f$  為齒輪之間的摩擦力及轉軸與軸承之間的摩擦力所做

的負功。 $dW_e$  為運轉時其它諸如造成振動、搖動等對系統所做的負功。

根據功與能的關係，已知：

$$dW_f = -dE_h < 0 \Rightarrow dE_h > 0$$

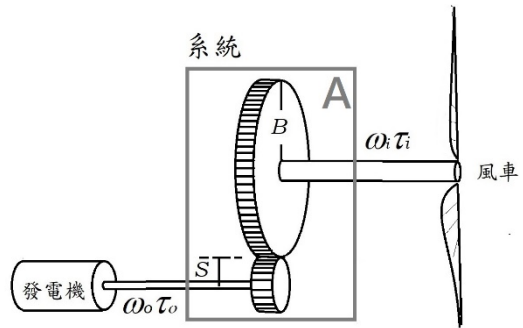
$$dW_e = -dE_{v,s} < 0 \Rightarrow dE_{v,s} > 0 \dots \dots \dots (35)$$

則得

$$dW_i + dW_o = dK + dE_h + dE_{v,s} \dots \dots \dots (36)$$

此方程式的意思是：風車對齒輪箱轉軸作功而傳入齒輪箱的能量  $dW_i$ ，扣掉傳給發電機的功  $dW_o$ ，同時也變成了齒輪箱中因摩擦產生的熱能  $dE_h$  和振動、聲音等能量  $dE_{v,s}$ ，以及兩齒輪本身動能增加量  $dK$ 。

方程式兩側除以  $dt$ ，即得



圖十：圖中框在 A 範圍中的組件構成一個系統。分析能量在此系統中傳遞的情形。

$$P_i + P_0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dE_h}{dt} + \frac{dE_{v.s}}{dt}$$

$$\text{或 } P_i = -P_0 + \frac{dE_h}{dt} + \frac{dE_{v.s}}{dt} \quad \dots\dots\dots(37)$$

其中：

$$P_i = \tau_i \omega_i, \quad P_0 = -\tau_0 \omega_0 < 0 \quad \dots\dots\dots(38)$$

如果兩轉軸的動能不再增減，即等速轉動

$$\frac{dK}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots(39)$$

若齒輪摩擦產生的熱能(內能)可忽略，兩齒輪和轉軸又不晃動或振動，即

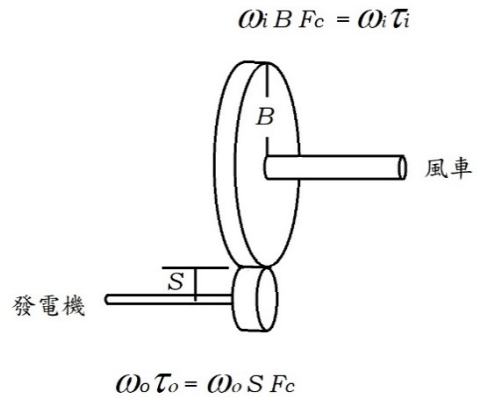
$$\frac{dE_h}{dt} \approx 0; \quad \frac{dE_{v.s}}{dt} \approx 0 \quad \dots\dots\dots(40)$$

即得：

$$P_i + P_0 = 0 \Rightarrow \tau_i \omega_i - \tau_0 \omega_0 = 0 \Rightarrow \tau_i \omega_i = \tau_0 \omega_0 \quad \dots\dots\dots(41)$$

由此可知，風車提供能量的功率，最終變成齒輪組的輸出功率，加上齒輪組本身的動能之增加量，加上摩擦產生的熱能，和齒輪組本身的振動和晃動而增加的能量。如果齒輪組不再增加轉動動能，如果齒輪組設計精良，儘量減少齒輪間些微的摩擦、齒輪之晃動(碰撞)或振動等，則風車提供之能量將完全轉換成齒輪組輸出的能量。

因此在工程上，齒輪組只用來改變轉速以及改變力矩，而本身不應消耗風車傳來的能量(功率)，將風車的功率傳給發電機，即



圖十一：齒輪組改變轉速和力矩。

$$\tau_i \omega_i = \tau_0 \omega_0 \quad \dots\dots\dots(42)$$

見圖十一從力的角度來分析。如果大齒輪的轉速已到達定值，則大齒輪所受的力矩和為零， $\tau_i$ 是風車施加的力矩， $BF_c$ 是大齒輪所受的力矩，即

$$\tau_i = BF_c \quad \dots\dots\dots(43)$$

如果大齒輪正在加速，則：

$$\tau_i - BF_c = I\alpha \Rightarrow \tau_i > BF_c \quad \dots\dots\dots(44)$$

其中  $I$  為大齒輪及轉軸的轉動慣量(對轉軸定義的)， $\alpha$  為角加速度。

同理，如果小齒輪的轉速已到達定值，則小齒輪所受的力矩也要互相抵銷， $\tau_0$  為發電機施加在小齒輪上、與轉速方向相反的力矩， $SF_c$  為大齒輪施加在小齒輪上、順著轉動方向的力矩，則可得：

$$\tau_0 = SF_c \quad \dots\dots\dots(45)$$

當然，如果小齒輪隨著大齒輪正在加速轉動，則

$$\tau_0 < SF_c \quad \dots\dots\dots(46)$$

因為齒輪之間不會打滑，所以根據幾何關係可知：大小齒輪之邊緣都以相同的切線速度運動，所以

$$\omega_0 S = \omega_i B \Rightarrow \omega_0 = \frac{B}{S} \omega_i ; B > S, \omega_0 > \omega_i \quad \dots\dots\dots(47)$$

即轉動發電機的角速度  $\omega_0$ ，大於風車的角速度  $\omega_i$ 。

因為  $F_c$  為大小齒輪之齒間的作用和反作用力，即可得

$$\frac{\tau_0}{\tau_i} = \frac{SF_c}{BF_c} \Rightarrow \tau_0 = \frac{S}{B} \tau_i ; \tau_i > \tau_0 \quad \dots\dots\dots(48)$$

即風車經轉軸施加大齒輪的力矩，必須比發電機施加小齒輪轉軸的力矩大。如果大齒輪半徑  $B$  遠大於小齒輪半徑  $S$ ，則即便  $\tau_0$  不大，因為

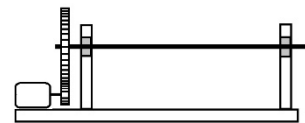
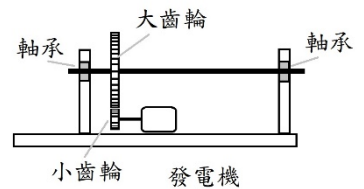
$$\tau_i = \frac{B}{S} \tau_0, \frac{B}{S} \gg 1 \quad \dots\dots\dots(49)$$

$\tau_i$  也要很大，亦即風車轉動而施加大齒輪上的力矩要相當大。

在工程上，風車可以大扭力低轉速、或小扭力高轉速來工作，而從風中獲得差不多的風能功率，於是風車能以一定功率

$\omega\tau_i$  對外界做力學功。

風車能夠輸出一定的功率，就能根據被驅動裝置的特性，利用齒輪組，再將此功率變成不同力矩和轉速的配合，以便以適合各種機械(例如：發電機)運作時所需的力矩和轉速來驅動各種機械。



圖十二：兩個齒輪的轉軸一樣要各自固定。



「在比賽中為了爭取好成績，須以較低扭力、高轉速轉動發電機」(見下節解釋，這是以小型馬達充作發電機比賽之限制與特性。如果可自行設計發電機又另當別論)。

所以必須藉助齒輪組將風車的轉速提高，因此風車就必須提供較大扭力，所以風車宜用較多葉片之風車。更重要的是，整個增速齒輪組不能晃動、撞擊，各齒輪的轉軸一樣要各自用軸承固定(見圖十二)、摩擦要儘量減少等，以免耗損能量。

#### (4)發電機與測量到的功率

國內外科普比賽中通常多以微型馬達來充當競賽用的微型發電機。一般而言，微型馬達都設計成小電流高匝數的馬達。因此微型馬達被當作發電機使用時，它的「內電阻」都不是很小，即使外部電路是短路狀態，微型發電機之輸出(感應)電流也不大。

但比賽時微型發電機之外部電阻必須比內電阻大很多，因感應電流受總電阻之限制，都不會太大，所以說發電機的磁阻力都不會太大。

發電機的發電功率應為  $\epsilon i$ ，其中  $\epsilon$  為感應電動勢， $i$  為感應電流，風車的好壞決定於  $\omega\tau = \epsilon i$ ，其中  $\omega$  為風車轉速(rad/sec)， $\tau$  是風對風車施加的轉動力矩。

當外加電阻之後，從電路圖(見圖十三)可知，

$$\epsilon = i(R_L + R_i) \quad \dots\dots\dots (50)$$

其中  $R_i$  為內電阻，可達 30~40 歐姆， $R_L$  為外電阻(作為負載)。方程式兩側都乘以  $i$ ，即得

$$\begin{aligned} \epsilon i &= i^2 R_L + i^2 R_i \\ &= iV_L + iV_i \quad \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

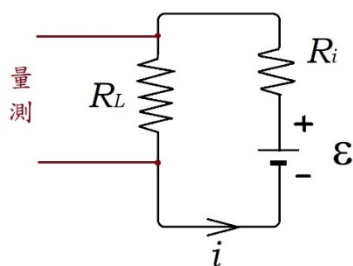
其中  $V_L$  代表負電阻兩側之電位差， $V_i$  代表內電阻兩側之電位差。由(51)式可知  $R_L \gg R_i$  時， $i^2 R_L = iV_L$  才會近似  $\epsilon i$ 。

如果  $R_L$  一開始設定成很小，則  $V_L$  可能幾乎為零， $i^2 R_L$  就遠遠低於風車的真實表現  $\epsilon i$ 。

$R_L \gg R_i$ ，則  $V_L \gg V_i$ ， $V_L$  會近似  $\epsilon$ ，所以要精準量測到  $\epsilon$  和  $i$ ，必須儘可能增加  $R_L$ 。

但是  $R_L \gg R_i$ ，因為  $R_i$  可達 30~40 歐姆，所以  $R_L + R_i$  就相當大，在  $\epsilon$  在 0~10 伏特之間時， $i$  都很小。

因為比賽時用儀器量測的是外部電路之電阻所消耗的功率，所以外部電路的電阻不宜降低，以便與發電機內部感應線圈電阻競爭，使外部電路獲得較大比例的功率(見圖十三)。因此，在內電阻不小，外部電阻又不得不儘可能比內電阻大很多的情形下，電流量會更小，



$$\epsilon = i(R_L + R_i)$$

$$\epsilon i = i^2 R_i + i^2 R_L$$

發電機功率

測量的功率

圖十三：交流電等於在每瞬間直流電，但每瞬間都會變化。

磁阻力也就更小，發電機轉速於是大致決定了「比賽時量測的功率大小」(此功率大小為外部電路消耗的功率大小)。

因此使發電機轉速愈大，就能明顯增加它「量測到的輸出功率」，因此，增加發電機轉速，是提高比賽輸出功率的重點。當然，比賽時也可以根據數據計算出  $\epsilon i$ 。

在外部電阻之一定範圍內，因發電機內電阻之限制，感應電流都不大，發電機所受磁阻力也就不大，即使發電機的磁阻力不大，但如果用增速齒輪增速，仍要注意大齒輪之力臂(即大齒輪半徑)長，小齒輪的力臂(即小齒輪半徑)短，所以大齒輪會受到較大的反向力矩，必須用較大力矩的風車驅動大齒輪。所以如果加裝了增速齒輪，就必須用力矩較大的多葉風車。

## 參、結論

探究和實作課程可謂台灣科學教育的里程碑，有其不可磨滅的重要影響。從作者的觀點來看，這項課程至少鼓勵了莘莘學子用科學知識解決實際問題，並累積新的知識與求知的經驗。

此時此刻，風力發電產業在本土生根茁壯的重要性，不言可喻。台灣能源轉型的基礎，就在大規模的風力發電，對我國的財經、能源和未來之前景都舉足輕重。

風力發電競賽正好結合上述兩項新的變革，自有它的時代意義，作者多次擔任裁判，借此文補充若干背景常識，以期進一步提升風力發電競賽的內容，與參與者分享其中常被疏忽的科學知識，使所有參與者在了解風力發電原理之後，能不受其它枝節的限制，充分展露出創作改良風力發電的才華。

任何比賽都有規定和限制。一般的風力發電比賽中，通常使用簡易的風洞製造在“一定範圍”中均勻的風；此外，因為市場上並無販售適用的微型發電機，通常都以常見的廉價微型馬達充當發電機。因此，須先仔細考慮這兩項情況。無庸置疑，風車尺寸愈大，才可能攫取愈大風能，但也要注意：風車葉片各區段必須協調，不能相互消耗而降低風車的性能；而風洞中風速並不一定完全一致，風車太大，掃過風速不同的區域，也不利於風車汲取風能的效率。因為微型馬達的內電阻並不太小，又因量測的是外部電路的電阻耗能功率，外電阻必須大於內電阻許多倍，才能分得較大比例的功率，成績才會好。因此，為了使比賽中測量到的功率大，則必須加快發電機轉速。當然，這是針對現有比賽所使用的發電機特性所擬定的策略。如果使用其它發電機，量測的方式又不同，則必須根據電路學原理，重新擬定獲取好成績的策略。

另一方面，風力發電是一項不簡單的系統，影響發電性能的變數也不少。風車轉軸必須用兩個適當分開的軸承固定位置，使風車轉軸能穩定轉動。如果使用增速齒輪，也要用軸承固定齒輪轉軸的位置，使兩齒輪儘可能不晃動地順利傳動，才不會明顯降低風力發電

的性能。

風力發電真是一項非常有內容的主題，但了解必要的先備知識，才能避免盲目試誤 (trial and error) 複雜相關的多個變數而事倍功半，真正探究出決定風車性能的各項變數。

## 註釋

註 1：由台東縣初鹿國中(台東縣國中小能源科技教育推動中心)於 2012、2013、2014 連續三年舉辦「國中生木製風力發電機製作競賽」。風車和發電機均由作者設計，作者並擔任評審。

註 2：KidWind 風能競賽於 2019 年首次引入台灣，在桃園小巨蛋舉辦。今年(2021 年)11 月 20~21 日於工研院綠能所舉辦。裁判團成員為：台灣風能學會簡連貴理事長(裁判長)、台灣電力公司林子超課長、陽明交通大學楊秉純教授、工業技術研究院張永源經理、長榮大學蔡崇智教授、麗山高中吳明德老師與作者(副裁判長)。

註 3：此比例又稱功率係數(power coefficient)，

定義為  $C_p = \frac{\text{取出風能的功率}}{\text{風車掃過面積之風能功率}}$ 。此比例有一上限，約 59.3%，這就是所謂的

貝茲極限。