用矩陣探討 Padovan-Fibonacci 數列的卷積與順向內積

許閎揚

彰化縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

陳建燁老師在數學傳播[1]介紹了 Padovan 數列，他分別用完全齊次對稱多項式與 Binet 公式[2][3]做出了 Padovan 數列與 Fibonacci 數列的卷積

$$\sum_{i=0}^{n} P_i F_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3} \text{，}$$

之後，廖信傑先生與薛昭雄教授使用生成函數來重新證明兩個數列的卷積公式[5]。

除了卷積之外，陳建燁老師還做出了這兩個數列的順向內積[4]

$$\sum_{i=0}^{n} P_i F_i = \frac{1}{5}\left(P_n L_{n+1} + P_{n+2} L_n + P_{n+1} L_{n-1} - 2\right) \text{。}$$

我們發現使用 Fibonacci 數列的矩陣與 Padovan 數列 n 次生成多項式也可以容易推出上面的結果。

貳、Fibonacci 數列、Lucas 數列與 Padovan 數列

這裡列出我們要探討的數列的基本定義與性質：

1. Fibonacci 數列 $<F_n>: F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1$。

2. Lucas 數列 $<L_n>: L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, L_0 = 2, L_1 = 1$。

3. Padovan 數列 $<P_n>: P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, P_0 = P_1 = P_2 = 1$。

4. $F_{n+2} - 3F_{n+1} = -L_n$ (證明參考資料[4])。

參、本文

以下的引理 3.1 是關於矩陣計算費氏數列的理論基礎。

引理 3.1[6]: 若 F_n 為費氏數列第 n 項，則 $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n,\ n \geq 1$ 。

證明: 讀者可使用數學歸納法證明或參考資料[6]。

引理 3.2[4]: 若 $P(x) = P_0 + P_1x + P_2x^2 + \cdots + P_nx^n$ 則

$$P(x) = \frac{P_nx^{n+3} + P_{n+2}x^{n+2} + P_{n+1}x^{n+1} - x - 1}{x^3 + x^2 - 1} \text{。} \qquad (1)$$

證明: 運用 Padovan 數列本身的遞迴關係或參考資料[4]。

引理 3.3: $P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \cdots + P_n = \dfrac{P_n + P_{n+2}x + P_{n+1}x^2 - x^{n+2} - x^{n+3}}{1 + x - x^3}$ 。

證明: 將(1)式的 x 用 $\dfrac{1}{x}$ 代入，得

$$P_0 + P_1 \cdot \frac{1}{x} + P_2 \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + P_n \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{P_n \cdot \frac{1}{x^{n+3}} + P_{n+2} \cdot \frac{1}{x^{n+2}} + P_{n+1} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 1} \qquad (2)$$

將(2)式等號兩邊同乘 x^n ，得

$$P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \cdots + P_n = \frac{P_n + P_{n+2}x + P_{n+1}x^2 - x^{n+2} - x^{n+3}}{1 + x - x^3} \qquad (3),$$

得證。

當我們需要計算級數 $k_0F_0 + k_1F_1 + \cdots + k_nF_n$ 時，我們可以先計算多項式 $f(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \cdots + k_nx^n$ 的封閉型式，接著將 x 用 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 代入，即 $f(A) = k_0I + k_1A + k_2A^2 + \cdots + k_nA^n$，利用引理 3.1，我們知道矩陣 $f(A)$ 的(1,2)元即是我們所要的結果，如此便可將原本的級數問題轉化成矩陣問題。

現在我們用這概念來做 Fibonacci 數列與 Padovan 數列的卷積、順向內積問題，即定理 1 與定理 2。

定理 1： $\sum_{i=0}^{n} P_i F_{n-i} = F_{n+3} - P_{n+3}$ 。

證明:

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ，將 A 代入(3)式，得

$$P_0A^n + P_1A^{n-1} + P_2A^{n-2} + \cdots + P_nI = \left(I + A - A^3\right)^{-1}\left(P_nI + P_{n+2}A + P_{n+1}A^2 - A^{n+2} - A^{n+3}\right)$$

(4)，

利用引理 3.1，(4)式等號左邊矩陣(1,2)元為

$$P_0F_n + P_1F_{n-1} + P_2F_{n-2} + \cdots + P_nF_0 \text{ 。}$$

現在計算(4)式等號右邊:

首先，

$$I + A - A^3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = -A \quad (5)$$

(5)代入(4)，得

$$\left(I + A - A^3\right)^{-1}\left(P_nI + P_{n+2}A + P_{n+1}A^2 - A^{n+2} - A^{n+3}\right)$$

$$= \left(-A\right)^{-1}\left(P_nI + P_{n+2}A + P_{n+1}A^2 - A^{n+2} - A^{n+3}\right)$$

$$= -P_nA^{-1} - P_{n+2}I - P_{n+1}A + A^{n+1} + A^{n+2} \quad (6) \text{，}$$

其中 $A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ 。

(6)式矩陣(1,2)元為

$$-P_n - P_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+2} = -P_{n+3} + F_{n+3} \text{，}$$

得證。

定理 2[4]: $\sum_{i=0}^{n} P_i F_i = \frac{1}{5}\left(P_nL_{n+1} + P_{n+2}L_n + P_{n+1}L_{n-1} - 2\right)$ 。

證明:

令 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，將 A 代入(1)式，得

$$P_0I+P_1A+P_2A^2+\cdots+P_nA^n=\left(A^3+A^2-I\right)^{-1}\left(P_nA^{n+3}+P_{n+2}A^{n+2}+P_{n+1}A^{n+1}-A-I\right) \quad (7)$$

利用引理 3.1，(7)式左邊矩陣(1,2)元為

$$P_0F_0+P_1F_1+\cdots+P_nF_n \text{ 。}$$

現在計算(7)式右邊

$$A^3+A^2-I=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\3&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(A^3+A^2-I\right)^{-1}=\begin{bmatrix}4&3\\3&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}1&-3\\-3&4\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&3\\3&-4\end{bmatrix} \quad (8)$$

將(8)式代入(7)式，得

$$\left(A^3+A^2-I\right)^{-1}\left(P_nA^{n+3}+P_{n+2}A^{n+2}+P_{n+1}A^{n+1}-A-I\right)$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&3\\3&-4\end{bmatrix}\left(P_n\begin{bmatrix}F_{n+4}&F_{n+3}\\F_{n+3}&F_{n+2}\end{bmatrix}+P_{n+2}\begin{bmatrix}F_{n+3}&F_{n+2}\\F_{n+2}&F_{n+1}\end{bmatrix}+P_{n+1}\begin{bmatrix}F_{n+2}&F_{n+1}\\F_{n+1}&F_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&3\\3&-4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}P_nF_{n+4}+P_{n+2}F_{n+3}+P_{n+1}F_{n+2}-1-1 & P_nF_{n+3}+P_{n+2}F_{n+2}+P_{n+1}F_{n+1}-1\\ P_nF_{n+3}+P_{n+2}F_{n+2}+P_{n+1}F_{n+1}-1 & P_nF_{n+2}+P_{n+2}F_{n+1}+P_{n+1}F_n-1\end{bmatrix}\right)$$

(9)，

(9)式的(1,2)元為

$$\frac{1}{5}\left[P_n\left(-F_{n+3}+3F_{n+2}\right)+P_{n+2}\left(-F_{n+2}+3F_{n+1}\right)+P_{n+1}\left(-F_{n+1}+3F_n\right)-2\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[P_nL_{n+1}+P_{n+2}L_n+P_{n+1}L_{n-1}-2\right] \text{，}$$

比較(7)式等號兩邊矩陣(1,2)元，得證。

參考資料：

[1] 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 的對話(上)：將 Padovan 數列用「完全齊次對稱多項式」表示。數學傳播季刊, 42(1), 71-79, 2018。

[2] 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 的對話(下)：F-P 卷積恆等式。數學傳播季刊, 42(3), 66-73, 2018。

[3] 陳建燁。F-P 卷積恆等式的一頁證明。數學傳播季刊,43(3), 60-62, 2018。

[4] 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 順向內積恆等式。科學教育月刊,428 期, 32-39,2020。

[5] 廖信傑等。關於「Fibonacci 與 Padovan 的對話及 F-P 卷積恆等式」之迴響。數學傳播季刊,44(1), 50-57, 2020。

[6] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.