中學生通訊解題第 162-163 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
16201

設正整數 $n=x\cdot y\cdot z$，且 $x\le y\le z$。若只有一組正整數解 x,y,z 且可構成三角形的三邊長，試問這樣的 $n(\le 50)$有幾個？

【簡答】 16

【詳解】

n為質數時無解。

當 $n=p^2$（ p是質數）只有一組解 $(1,p,p)$。

判定無解的主要依據是 $abc=n$， $c>ab$時無解，此時 $c\ge ab+1\ge a+b$。

唯一解的 n有 1,4,8,9,12,16,18,24,25,27,32,40,45,48,49,50 共 16 個。

問題編號
16202

假設一本書的頁碼為 1 至 n，當然 n為大於 1 的正整數。若將整本書每頁的頁碼相加時，其中有一頁的頁碼被多加了一次，結果得到錯誤的和 2000，請問這個被多加了一次的頁碼是第幾頁？

【簡答】 47

【詳解】

設 $k(1\le k\le n)$是被多加了一次的頁碼，

則 $1+2+...+n<1+2+...+n+k<1+2+...+n+n+1$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}<2000<\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(n+1) < 4000 \\ (n+1)(n+2) > 4000 \end{cases}$$

顯然 n 是稍大於 60 的數。

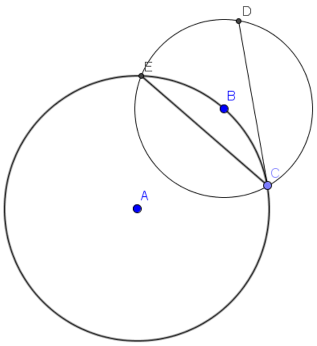
嘗試 $62\times63=3906$、$63\times64=4032$

故有 $62\times63<4000<63\times64$，因此 $n=62$

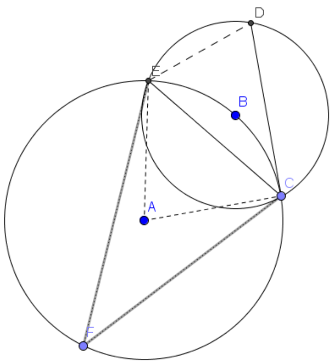
可得 $k=2000-\dfrac{62\times63}{2}=2000-1953=47$

問題編號
16203

圓 B 之圓心 B 在圓 A 上，與圓 A 交於 C,E 兩點。圓 A 上過 C 點之切線交圓 B 於 D。證明：$\overline{CD}=\overline{CE}$。



【證明】



設 $\angle EBC=\theta$，則 $\angle D=\dfrac{\theta}{2}$，則 $\angle F=180^{\circ}-\theta=\angle ECD$。

故 $\angle DEC=180°-(180°-\theta)-\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\theta}{2}$。

所以 ΔCDE 是等腰三角形，得 $\overline{CD}=\overline{CE}$。

問題編號
16204

大富翁遊戲中，每個回合都會擲一個六面骰決定前進步數，設此六面骰的六個面分別為 1, 2, 3, 4, 5, 6 點，而現在你的所在位置距離「機會與命運」格還有 10 步，若你要走到「機會與命運」格，請問有幾種不同的走法？（例如：先前進 4 步，再前進 6 步，即為一種走法；或先前進 1 步，再前進 6 步，再前進 3 步，即為另一種走法。）

【簡答】 492

【詳解】

令 a_k 表示「前進 k 格的方法數」。

顯然 $a_1=1$。

而 a_2 表示前進 2 格的方法數，有可能直接擲出 2 點或從前 1 格擲出 1 點，所以 $a_2=1+a_1=2$。

而 a_3 表示前進 3 格的方法數，有可能直接擲出 3 點或從前 1 格擲出 1 點或從前 2 格擲出 2 點，所以 $a_3=1+a_2+a_1=4$。

依此規律，可得 $a_4=8, a_5=16, a_6=32$。

而 a_7 表示前進 7 格的方法數，由於骰子最多 6 點，所以要前進到第 7 格一定是從前 6 格而來，所以 $a_7=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=63$。

依此規律，可得

$a_8=a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=125$

$a_9=a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=248$

$a_{10}=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=492$

所以共有 492 種走法。

問題編號
16205

有一ΔABC，$\overline{AB}=3$，現在依下列步驟操作：

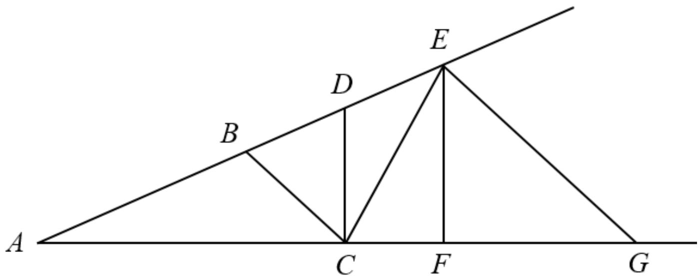
(1) 過C點作$\overline{AC}$的垂線，交$\overline{AB}$的延長線於D點，發現$\overline{BD}=2$。

(2) 在$\overline{AB}$的延長線上找E點，使得E點和B點在D點的異側、$\overline{DE}=\overline{CD}$，發現$\overline{CE}$剛好也垂直$\overline{BC}$。

(3) 過E點作$\overline{AC}$的垂線，交$\overline{AC}$的延長線於F點。

(4) 過E點作$\overline{BC}$的平行線，交$\overline{AC}$的延長線於G點。

以下為示意圖：



試求ΔEFG的面積為何？

【簡答】 $\dfrac{98}{75}\sqrt{21}$

【詳解】

以D點為圓心，$\overline{DE}$為半徑畫圓，此圓會過C點、E點，
且由於$\angle ECB=90°$，所以此圓也會通過B點。

如此一來，$\overline{DB},\overline{DC},\overline{DE}$皆為半徑，所以長度皆為 2。

利用畢氏定理，可算出$\overline{AC}=\sqrt{(3+2)^2-2^2}=\sqrt{21}$，

ΔACD 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{21}=\sqrt{21}$。

ΔACD 和 ΔAFE 中，$\angle ACD=\angle AFE$ 、 $\angle DAC=\angle EAF$

$\Rightarrow \Delta ACD\sim\Delta AFE$ (AA 相似)，

所以 $\overline{AD}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AF}=\overline{CD}:\overline{FE}\Rightarrow 5:7=\sqrt{21}:\overline{AF}=2:\overline{FE}$，

故 $\overline{AF}=\frac{7}{5}\sqrt{21},\ \overline{FE}=\frac{14}{5}$

另外，ΔABC 和 ΔAEG 中，$\angle ABC=\angle AEG$（兩平行線的同位角相等）、$\angle BAC=\angle EAG\Rightarrow\Delta ABC\sim\Delta AEG$（AA 相似），

所以 $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AG}\Rightarrow 3:7=\sqrt{21}:\overline{AG}$，故 $\overline{AG}=\frac{7}{3}\sqrt{21}$。

$\overline{FG}=\overline{AG}-\overline{AF}=\frac{7}{3}\sqrt{21}-\frac{7}{5}\sqrt{21}=\frac{14}{15}\sqrt{21}$

ΔEFG 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{14}{15}\sqrt{21}=\frac{98}{75}\sqrt{21}$。

問題編號 16301

n 為正整數，若 n^3 除以 78 的餘數為 n，則滿足條件的 n 共有______個。

【簡答】 17

【詳解】

由題意知 $n^3=78k+n$，且 $k\in$ □ 、 $n<78$。

移項再因式分解，可得 $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=6\cdot 13\cdot k$，

顯然當 n 為正整數時，$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ 必為 6 的倍數，

所以只要考慮 13 的倍數即可。

故滿足條件的 n 共有下列 17 個：1,12,13,14,25,26,27,38,39,40,51,52,53,64,65,66,77

問題編號 16302

已知 a,b,c 為正實數，且 $abc=8$，

求證：$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq 3$。

【證明】

因為 a,b,c 為正實數，

所以 $\dfrac{b+c}{4}+\dfrac{a^2}{b+c}\geq 2\sqrt{\dfrac{b+c}{4}\cdot\dfrac{a^2}{b+c}}=a$

同理 $\dfrac{c+a}{4}+\dfrac{b^2}{c+a}\geq b$，$\dfrac{a+b}{4}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq c$，

將上述三式相加得

$$\frac{b+c}{4}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{c+a}{4}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{a+b}{4}+\frac{c^2}{a+b}\geq a+b+c，$$

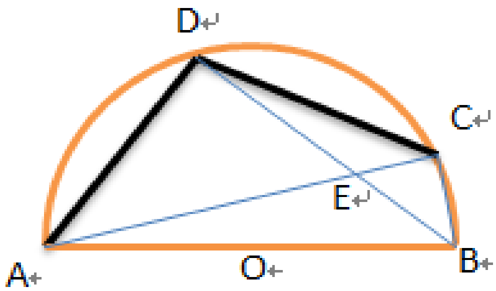
即 $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$，

又 $abc=8$，所以 $\dfrac{a+b+c}{2}\geq\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=3$，

故 $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq 3$。

問題編號
16303

以 O 為圓心，線段 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓上，C, D 為半圓上相異兩點。已知 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ 且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 兩弦交於 E 點，如圖所示。若 $\overline{AB}=10,\ \overline{AD}=6$，試求線段 $\overline{AE}$ 的長度。



【簡答】 7.5

【詳解】

因為 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ 所以 $\angle ABE=\angle DBC$

且 $\angle BAC=\angle BDC$（ $\overset{\frown}{BC}$ 弧所對的圓周角相等)

所以 $\Delta ABE\sim\Delta DBC$（AA 相似）

又因為 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ 所以 $\overline{AD}=\overline{CD}=6$

且線段 $\overline{AB}$ 為直徑 $\Rightarrow\ \angle ADB=90°$

$\Rightarrow\ \Delta ADB$ 為直角三角形

可得 $\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

又 $\Delta ABE \sim \Delta DBC \;\Rightarrow\; \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \;\Rightarrow\; \dfrac{10}{\overline{AE}}=\dfrac{8}{6} \;\Rightarrow\; \overline{AE}=7.5$

問題編號
16404

在某次活動中，原計畫每兩個人都要恰好握一次手，但有 4 個人各握了兩次手之後就離開了，整個活動共握了 60 次手，求參加活動的總人數。

【簡答】 15

【詳解】

設參加活動的總人數為 $n+4$，先離開的 4 人之間握手次數為 k，

則 $0\le k\le \dfrac{3\times 4}{2}=6$，又 $\dfrac{n(n-1)}{2}=60-(8-k)$，

因此 $n(n-1)=104+2k\le 116 \Rightarrow n\le 11$，

經檢驗 $n=11$，$k=3$，參加活動的總人數為 15 人。

問題編號
16505

<u>建仔</u>、<u>小綠</u>與<u>阿成</u>結伴出國旅遊搭乘高鐵，若高鐵有 12 節車廂，並且隨機的選取其中完全不相鄰 3 節車廂設置廁所，以下是他們的對話：

<u>阿成</u>：「只剩第 1、5、6 節車廂有位子可訂，中間一點的車廂比較會有廁所，所以訂第 6 節好了！」

<u>小綠</u>：「我看反而是第 1 節車廂有廁所的機率最大喔？」

<u>建仔</u>：「我算了一下，第 5、6 節車廂有廁所的機率其實一樣大！第 1 節的還在算⋯」

你能幫忙分別算出第 1、5、6 節車廂有廁所的機率嗎？

【簡答】 第 1 節車廂機率為 $\frac{36}{120}$、第 5 節車廂機率為 $\frac{29}{120}$、第 6 節車廂機率為 $\frac{29}{120}$

【詳解】

第 1、5、6 節車廂有廁所的機率分別為 $\frac{36}{120}$、$\frac{29}{120}$、$\frac{29}{120}$

所有廁所的配置有

$(8+7+6+...+1)+(7+6+5+...+1)+(6+5+4+...+1)+...+1=120$ 種。

第 1 節車廂有廁所的有 $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ 種，故機率為 $\frac{36}{120}$

第 5 節車廂有廁所的有 $3\times6+1+4+3+2+1=29$ 種，故機率為 $\frac{29}{120}$

第 6 節車廂有廁所的有 $4\times5+2+1+3+2+1=29$ 種，故機率為 $\frac{29}{120}$