

北半球任一處日出及日落的時刻及當時太陽的方位

劉惟明

臺北市園藝花卉職業工會

本文中之常數：赤道面與黃道面的交角為 23.5° 、一太陽日為 24 小時、一年為 365.24 日。

本文中小數位數多之計算數字，除秒數以外，採小數點以下 10 位有效數字。

名詞解釋：

日出線：某一瞬間地球上各日出地點的連線。

日落線：某一瞬間地球上各日落地點的連線。

日時間：以 xxx.xxxxxxxxxx 數字格式表示以日為單位的時間計量。

子夜線：在北極圈內子夜時的各地點之連線，為某一經度線在北極圈內的一部份。

正午線：在北極圈內正午時的各地點之連線，為某一經度線在北極圈內的一部份，與子夜線相差經度 180° 而相對。

東經度 E° ：同慣常之東經度，但 $0^\circ \leq E^\circ \leq 360^\circ$ 。若某處西經度為 W° ，其東經度 $E^\circ = 180^\circ + (180^\circ - W^\circ)$ 。

本文假設各地的海拔高度皆為 0、太陽距離地球遙遠故為點光源且光線皆平行照射到地球、地球的大氣層不會折射或散射日光、地球為正球形及地球公轉軌道為圓形，但實際上各地的海拔高度不一且有地形屏障、從地球看太陽的視角為 0.53° 故照射到地球的光線略為不平行、地球的大氣層會折射或散射日光、地球為橢球形及地球公轉軌道為橢圓形、本文使用之常數與實際值略有誤差，加上人為的時區劃分、換日與置閏，以下地球表面任一處日出及日落的理論時刻及當時太陽的理論方位，與實際略有差異。

本文接續前文（「極圈內任一處永晝或永夜的期長」，科學教育月刊，第 456 期，10~12 頁，112 年 3 月），進一步探討相關之地球天文現象：預測北半球任一處日出及日落的時刻及當時太陽的方位。

首先觀察若干處日出及日落的時刻及當時太陽的方位之明顯案例。圖 1 顯示在春分、夏至、秋分、冬至時的陽光來向。由本圖亦可推知春分、夏至、秋分、冬至時，在圖中地球正面的日出線及在地球背面對稱位置的日落線，則：

1. 北極圈上的情況：夏至時，日出時刻 0 時，太陽由北方升起；日落時刻 24 時，太陽由北方落下，永晝在北極圈上出現一瞬間。春、秋分時，日出時刻 6 時，太陽由東方升起；日落時刻 18 時，太陽由西方落下。冬至時，日出時刻 12 時，太陽由南方升起；日落時刻 12 時，太陽由南方落下，永夜在北極圈上出現一瞬間。
2. 赤道上的情況：夏至時，日出時刻 6 時，太陽由東偏北 23.5° 升起；日落時刻 18 時，太陽由西偏北 23.5° 落下。春、秋分時，日出時刻 6 時，太陽由東方升起；日落時刻 18 時，太陽由西方落下。冬至時，日出時刻 6 時，太陽由東偏南 23.5° 升起；日落時刻 18 時，太陽由西偏南 23.5° 落下。

若指定日出時太陽方位以東方為 0° ，偏北為正值，偏南為負值；日落時太陽方位以西方為 0° ，偏北為正值，偏南為負值，可得下表：

時刻、太陽方位 ↘		夏至		春、秋分		冬至	
北極圈 (緯度 66.5°N)	日出	0	90°	6	0°	12	-90°
	日落	24	90°	18	0°	12	-90°
赤道 (緯度 0°N)	日出	6	23.5°	6	0°	6	-23.5°
	日落	18	23.5°	18	0°	18	-23.5°

以上內容可作為初步瞭解北半球某些特殊地點在特定時令時日出及日落的時刻及當時太陽的方位之約略概念，以下擬以此為基礎，精確推論北半球任一處日出及日落的時刻及當時太陽的方位。

附帶地，由圖 1 更可推知：

1. 自春分至秋分但不含春分及秋分：
 - (1) 北半球各地日出時太陽方位東偏北，且緯度愈高愈偏北，各地夏至時最偏北；日落時太陽方位西偏北，且緯度愈高愈偏北，各地夏至時最偏北。
 - (2) 除赤道外，北半球各地日出時刻早於 6 時，且緯度愈高愈早，各地夏至時最早；日落時刻晚於 18 時，且緯度愈高愈晚，各地夏至時最晚。
2. 自秋分至春分但不含秋分及春分：
 - (1) 北半球各地日出時太陽方位東偏南，且緯度愈高愈偏南，各地冬至時最偏南；日落時太陽方位西偏南，且緯度愈高愈偏南，各地冬至時最偏南。
 - (2) 除赤道外，北半球各地日出時刻晚於 6 時，且緯度愈高愈晚，各地冬至時最晚；日落時刻早於 18 時，且緯度愈高愈早，各地冬至時最早。

假設地球表面任一處自春分起已過 T 日時間， $0 \leq T \leq 91.31$ 表示春分到夏至之間， $91.31 \leq T \leq 91.31 \times 2$ 表示夏至到秋分之間， $91.31 \times 2 \leq T \leq 91.31 \times 3$ 表示秋分到冬至之間，

$91.31 \times 3 \leq T \leq 91.31 \times 4$ 表示冬至到次年春分之間。春分到秋分之間 ($0 \leq T \leq 91.31 \times 2$)，陽光可及處沿子夜線到達圖 2 之 A 點。若 $0 \leq T \leq 91.31$ ，則日出日落線所形成的地球切面與地軸之間的夾角 $\alpha^\circ = 23.5^\circ \times (T \div 91.31)$ ；若 $91.31 \leq T \leq 91.31 \times 2$ ，則 $\alpha^\circ = 47^\circ - 23.5^\circ \times (T \div 91.31)$ 。計算 $K = R \cos 23.5^\circ$ (R 為地球半徑)、 $M = K \tan \alpha^\circ$ 、圖 3 中之北極圈半徑 $r = R \sin 23.5^\circ$ 、 $\theta^\circ = \cos^{-1}(M/r)$ ($0^\circ \leq \theta^\circ \leq 90^\circ$)、日出處之午夜後日出時刻 (單位：日時間) $= \theta^\circ \div 360^\circ$ 、日落處之午夜前日落時刻 (單位：日時間) $= \theta^\circ \div 360^\circ$ 等計算式，得知自春分起經過 T 日時間 ($0 \leq T \leq 91.31 \times 2$)，北極圈上日出與日落處之日出與日落時刻。

上段是以北極圈 (緯度 66.5°N) 上日出及日落處為例，如欲知北極圈內非永晝或非永夜時、北極圈上、或北半球北極圈外，緯度 $\beta^\circ\text{N}$ ($0^\circ \leq \beta^\circ \leq 90^\circ$) 圈上日出與日落處之日出與日落時刻，可重新計算 $K = R \cos(90^\circ - \beta^\circ)$ 、 $M = K \tan \alpha^\circ$ 、緯度 $\beta^\circ\text{N}$ 圈的半徑 $r = R \sin(90^\circ - \beta^\circ)$ 、 $\theta^\circ = \cos^{-1}(M/r)$ ($0^\circ \leq \theta^\circ \leq 90^\circ$)、日出處之午夜後日出時刻 (單位：日時間) $= \theta^\circ \div 360^\circ$ 、日落處之午夜前日落時刻 (單位：日時間) $= \theta^\circ \div 360^\circ$ 等計算式，得知自春分起經過 T 日時間 ($0 \leq T \leq 91.31 \times 2$)，北半球非永晝或非永夜區域，且在緯度 $\beta^\circ\text{N}$ 圈上，日出與日落處之日出與日落時刻。

例 1：將赤道 $\beta^\circ = 0^\circ$ 代入上式， $K = 0$ ， $M = 0$ (任意 α° ， $0^\circ \leq \alpha^\circ \leq 23.5^\circ$)， $r = R$ ， $\theta^\circ = \cos^{-1}(0/R) = 90^\circ$ ，日出處之午夜後日出時刻 $= \theta^\circ \div 360^\circ = 0.25$ 日，即上午 6 時；日落處之午夜前日落時刻 $= \theta^\circ \div 360^\circ = 0.25$ 日，即午夜前 6 時，相當於 18 時。

例 2：臺北市位於北緯 25° ，若該市及其周邊地區海拔高度皆為 0，其最早可能的日出時刻及最晚可能的日落時刻為當該市日出或日落時恰逢夏至。將 $\beta^\circ = 25^\circ$ 、 $\alpha^\circ = 23.5^\circ$ 代入上式， $K = R \cos(90^\circ - 25^\circ) = 0.4226182617R$ ， $M = K \tan 23.5^\circ = 0.4226182617R \times 0.4348123750 = 0.1837596501R$ ， $r = R \sin(90^\circ - 25^\circ) = 0.9063077870R$ ， $\theta^\circ = \cos^{-1}(M/r) = \cos^{-1}(0.1837596501R / 0.9063077870R) = 78.3018112189^\circ$ ，日出處之午夜後日出時刻 $= \theta^\circ \div 360^\circ = 0.2175050312$ 日，相當於上午 5 時 13 分 12 秒，較上午 6 時 (春、秋分時日出時刻) 早 46 分 48 秒；日落處之午夜前日落時刻 $= \theta^\circ \div 360^\circ = 0.2175050312$ 日，即午夜前 5 時 13 分 12 秒，相當於 18 時 46 分 48 秒，較 18 時 (春、秋分時日落時刻) 晚 46 分 48 秒。

例 3：A、B 二處同位於北緯 33.25° ，B 處的時間較 A 處慢 18 小時 45 分 28.0 秒 (日時間 0.7815743441 日)，春分到夏至期間，A 處某日日出的當地時間為上午 5 時 30 分 42.8 秒 (日時間 0.2296620370 日)，B 處下一個日出之當地時間為何？

解： $K = R \cos(90^\circ - 33.25^\circ) = 0.5482932295R$ ， $r = R \sin(90^\circ - 33.25^\circ) = 0.8362861558R$ ， $\theta^\circ = 360^\circ \times 0.2296620370 = 82.678333200^\circ$ ， $M/r = \cos \theta^\circ = 0.1274396893$ ，

$M=0.1274396893 \times 0.8362861558R=0.1065760479R$, $\alpha^\circ=\tan^{-1}(M/K)=\tan^{-1}(0.1065760479R/0.5482932295R)=10.9998630998^\circ$, A 處該日日出時已過春分日時間 $T=\alpha^\circ \div 23.5^\circ \times 91.31=42.7403191337$ 日 ; A 處該日日出時, B 處已過春分日時間亦為 T 。假設再過 x ($0 < x < 1$) 日時間到達 $T'=T+x$ 日時間時 (仍在春分到夏至期間), B 處有下一個日出。 $\alpha'^\circ=23.5^\circ \times (T' \div 91.31)$, $M'=K \tan \alpha'^\circ$, $\theta'^\circ=\cos^{-1}(M'/r)$, B 處下一個日出的日時間 $=\theta'^\circ \div 360^\circ$, 即 $0.2296620370-0.7815743441+x=\theta'^\circ \div 360^\circ$, 此等式內隱含的三角函數及反三角函數為超越函數 (如: 正弦函數可表示為一無窮級數), 無法用數學式精準計算, 故此等式需以 trial and error (嚐試錯誤) 法重覆校正求 x 的解, 正解為 $x=0.7811909107$ 日時間 (附錄 1), 即 B 處下一個日出的日時間為 0.2292786036 日, 相當於上午 5 時 30 分 9.7 秒。

例 4: A 處位於北緯 33.25° , 春分到夏至期間, A 處今天的日出時刻為上午 5 時 59 分 19.5 秒 (日時間 0.2495312853 日), A 處 90 天後的日出時刻為何?

解: $K=R \cos(90^\circ-33.25^\circ)=0.5482932295R$, $r=R \sin(90^\circ-33.25^\circ)=0.8362861558R$, $\theta^\circ=360^\circ \times 0.2495312853=89.8312627080^\circ$, $M/r=\cos \theta^\circ=0.0029450171$, $M=0.0029450171 \times 0.8362861558R=0.0024628770R$, $\alpha^\circ=\tan^{-1}(M/K)=\tan^{-1}(0.0024628770R/0.5482932295R)=0.2573650392^\circ$, A 處今天日出時已過春分日時間 $T=\alpha^\circ \div 23.5^\circ \times 91.31$ 日 $=1.0000000736$ 日, 約 90 天後仍在春分到夏至期間, 但接近夏至。A 處 90 天後日出時已過春分日時間 $T'=1.0000000736$ 日 $+x$ 日。若以 $x=90$ 代入, $\alpha'^\circ=23.5^\circ \times (T' \div 91.31)=23.4202168627^\circ$, $M'=K \tan \alpha'^\circ=0.2374973974R$, $\theta'^\circ=\cos^{-1}(M'/r)=73.5014793502^\circ$, 90 天後日出的時刻 $=\theta'^\circ \div 360^\circ=0.2041707760$ 日, 相當於上午 4 時 54 分 0.4 秒, 但此為北緯 33.25° 另一處 (B 處) 日出的時刻, 非 A 處, 因為 B 處日出時, A 處的時間為 90 天後的上午 5 時 59 分 19.5 秒, 已過日出。B 處在 A 處西方, 經度差 $89.8312627080^\circ-73.5014793502^\circ=16.3297833578^\circ$, 故必須 $89 < x < 90$, 使得 B 處與 A 處的經度差為 0° , 即 B 處為 A 處, 以計算式表示為 $(x \text{ 日後的 } \theta'^\circ)=\theta^\circ-(90-x) \times 360^\circ$ 。以該式計算 x 隱含三角函數與反三角函數的運算, 此皆為無法計算精準值的超越函數, 故需以 trial and error (嚐試錯誤) 法重覆校正求 x 的解, 正解為 89.9546658068 日, 即 A 處 90 天後日出的時刻為 $0.2495312853-(90-89.9546658068)=0.2041970921$ 日時間, 相當於 90 天後上午 4 時 54 分 2.6 秒。

註: 夏至時, 北極圈 (緯度 $66.5^\circ N$) 上的日出時刻為 0 時, 赤道 (緯度 $0^\circ N$) 上的日出時刻為 6 時, 但緯度 $33.25^\circ N$ 圈上的日出時刻非 $(0+6) \div 2=3$ 時, 此歸因於地球表面為球曲面, 非平面。

秋分到次年春分之間($91.31 \times 2 \leq T \leq 91.31 \times 4$)，陽光可及處沿正午線到達圖 4 之 B 點。若 $91.31 \times 2 \leq T \leq 91.31 \times 3$ ，則日出日落線所形成的地球切面與地軸之間的夾角 $\lambda^\circ = 23.5^\circ \times (T \div 91.31) - 47^\circ$ ；若 $91.31 \times 3 \leq T \leq 91.31 \times 4$ ，則 $\lambda^\circ = 94^\circ - 23.5^\circ \times (T \div 91.31)$ 。計算 $K = R \cos 23.5^\circ$ (R 為地球半徑)、 $M = K \tan \lambda^\circ$ 、圖 5 中之北極圈半徑 $r = R \sin 23.5^\circ$ 、 $\theta^\circ = \cos^{-1}(M/r)$ ($0^\circ \leq \theta^\circ \leq 90^\circ$)、日出處之午夜後日出時刻(單位：日時間) $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ$ 、日落處之午夜前日落時刻(單位：日時間) $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ$ 等計算式，得知自春分起經過 T 日時間 ($91.31 \times 2 \leq T \leq 91.31 \times 4$)，北極圈上日出與日落處之日出與日落時刻。

上段是以北極圈(緯度 66.5°N)上日出及日落處為例，如欲知北極圈內非永晝或非永夜時、北極圈上、或北半球北極圈外，緯度 $\beta^\circ \text{N}$ ($0^\circ \leq \beta^\circ \leq 90^\circ$) 圈上日出與日落處之日出與日落時刻，可重新計算 $K = R \cos(90^\circ - \beta^\circ)$ 、 $M = K \tan \lambda^\circ$ 、緯度 $\beta^\circ \text{N}$ 圈的半徑 $r = R \sin(90^\circ - \beta^\circ)$ 、 $\theta^\circ = \cos^{-1}(M/r)$ ($0^\circ \leq \theta^\circ \leq 90^\circ$)、日出處之午夜後日出時刻(單位：日時間) $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ$ 、日落處之午夜前日落時刻(單位：日時間) $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ$ 等計算式，得知自春分起經過 T 日時間 ($91.31 \times 2 \leq T \leq 91.31 \times 4$)，北半球非永晝或非永夜區域，且在緯度 $\beta^\circ \text{N}$ 圈上，日出與日落處之日出與日落時刻。

例 5：承例 2，臺北市最晚可能的日出時刻及最早可能的日落時刻為當該市日出或日落時恰逢冬至。將 $\beta^\circ = 25^\circ$ 、 $\lambda^\circ = 23.5^\circ$ 代入上式， $K = R \cos(90^\circ - 25^\circ) = 0.4226182617R$ ， $M = K \tan 23.5^\circ = 0.4226182617R \times 0.4348123750 = 0.1837596501R$ ， $r = R \sin(90^\circ - 25^\circ) = 0.9063077870R$ ， $\theta^\circ = \cos^{-1}(M/r) = \cos^{-1}(0.1837596501R / 0.9063077870R) = 78.3018112189^\circ$ ，日出處之午夜後日出時刻 $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ = 0.2824949688$ 日，相當於上午 6 時 46 分 48 秒，較上午 6 時(春、秋分時日出時刻)晚 46 分 48 秒；日落處之午夜前日落時刻 $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ = 0.2824949688$ 日，即午夜前 6 時 46 分 48 秒，相當於 17 時 13 分 12 秒，較 18 時(春、秋分時日落時刻)早 46 分 48 秒。

接著探討日出及日落時太陽的方位(陽光來向)。

1. 北半球在春分到秋分之間某日出時刻的情況：圖 6 顯示北半球在春分到秋分之間某日出時刻的陽光來向。陽光來向在 A 處的地平面(切平面)上，亦在 A 處的經線(子夜線)切線上。在 A 處的日出日落線與在 A 處的緯線切線相切。D 處日出時，陽光來向、在 D 處的日出線切線、在 D 處的經線切線、及在 D 處的緯線切線同在 D 處的地平面(切平面)上，故陽光來向與「A 及 D 二處切平面之交線」平行。在 D 處的緯線切線與陽光來向之間的夾角，即為所欲求之 D 處日出時太陽方位角。該角以東方為 0° ，偏北為正值，偏南為負值。該角難以直接用 A 與 D 二處切平面之空間立體關係分析，但可將該角拆解為 A 與 D 二處之「平面的緯度角度變化」及「平面的經度角度變化」。

二部份，再予以合併求出該角，作法如下：

如圖 7，將 D 處相對於 A 處的經緯度變化拆解為 C 處相對於 A 處的緯度變化 γ° ，及 D 處相對於 C 處的經度變化 θ° （同前探討日出及日落時刻之 θ° 角）。如圖 8，假設一「xy 地軸」三度空間直角座標系之 xy 平面與緯線圈平面平行，將 A、C、D 三處合併於此空間座標的原點，並將 A、C 處之經線切線與緯線切線、A、C、D 處之切平面法線合併於此空間座標系中，使得 A、C 處之經線切線及切平面法線在「x 地軸」平面上，緯線切線在 y 軸上；D 處之緯線切線在 xy 平面上。由圖 9，得知 D 處之緯線切線與 C 處之緯線切線的夾角 θ° 為 C、D 處之經度差。圖 10 顯示圖 8 中與 D 處相關之資訊，其中 ω° 即為所欲求之 D 處日出時太陽方位角，為一三度空間中的角度，算法如下：

假設圖 10 中之 $\underline{FG} \parallel y$ 軸、 $\underline{GH} \parallel$ 地軸，則 $\underline{DG} \perp \underline{GF}$ 、 $\underline{DG} \perp \underline{GH}$ 、 $\underline{GF} \perp \underline{GH}$ 。若 $\underline{DG} = h$ ，則 $\underline{GF} = h \times \tan(90^\circ - \theta^\circ)$ 、 $\underline{DF} = h \div \cos(90^\circ - \theta^\circ)$ ， $\underline{GH} = h \times \tan(\alpha^\circ)$ 、 $\underline{DH} = h \div \cos(\alpha^\circ)$ 。 $\underline{FH} = (\underline{GF}^2 + \underline{GH}^2)^{0.5} = h(\tan^2(90^\circ - \theta^\circ) + \tan^2(\alpha^\circ))^{0.5}$ 。 $\underline{FH}^2 = \underline{DF}^2 + \underline{DH}^2 - 2 \times \underline{DF} \times \underline{DH} \times \cos(\omega^\circ)$ （餘弦定理），

$$\begin{aligned}\omega^\circ &= \cos^{-1} \frac{\left[\frac{h}{\cos(90^\circ - \theta^\circ)}\right]^2 + \left[\frac{h}{\cos(\alpha^\circ)}\right]^2 - h^2[\tan^2(90^\circ - \theta^\circ) + \tan^2(\alpha^\circ)]}{2 \times \frac{h}{\cos(90^\circ - \theta^\circ)} \times \frac{h}{\cos(\alpha^\circ)}} \\ &= \cos^{-1} \frac{\left[\frac{1}{\cos(90^\circ - \theta^\circ)}\right]^2 + \left[\frac{1}{\cos(\alpha^\circ)}\right]^2 - [\tan^2(90^\circ - \theta^\circ) + \tan^2(\alpha^\circ)]}{2 \times \frac{1}{\cos(90^\circ - \theta^\circ)} \times \frac{1}{\cos(\alpha^\circ)}}\end{aligned}$$

陽光來向東偏北（ $\underline{DF}$ 逆時針方向轉 ω° 到達 $\underline{DH}$ ）。

例 6：夏至時，在赤道日出處的太陽方位角： $\alpha^\circ = 23.5^\circ$ ， $\theta^\circ = 90^\circ$ ， $\tan(90^\circ - \theta^\circ) = 0$ ， $\cos(90^\circ - \theta^\circ) = 1$ ，

$$\begin{aligned}\omega^\circ &= \cos^{-1} \frac{1 + \frac{1}{\cos^2(\alpha^\circ)} - \tan^2(\alpha^\circ)}{\frac{2}{\cos(\alpha^\circ)}} = \cos^{-1} \frac{\cos^2(\alpha^\circ) + 1 - \sin^2(\alpha^\circ)}{2 \cos(\alpha^\circ)} \\ &= \cos^{-1} \frac{2 \cos^2(\alpha^\circ)}{2 \cos(\alpha^\circ)} = \cos^{-1} \cos(\alpha^\circ) = \alpha^\circ = 23.5^\circ.\end{aligned}$$

例 7：春分時，在赤道日出處的太陽方位角： $\alpha^\circ = 0^\circ$ ， $\theta^\circ = 90^\circ$ ， $\tan(90^\circ - \theta^\circ) = 0$ ， $\cos(90^\circ - \theta^\circ) = 1$ ， $\tan(\alpha^\circ) = 0$ ， $\cos(\alpha^\circ) = 1$ ， $\omega^\circ = \cos^{-1}(2/2) = 0^\circ$ 。

例 8：春分時，在北極圈日出處的太陽方位角： $\alpha^\circ = 0^\circ$ ， $\theta^\circ = 90^\circ$ ， $\tan(90^\circ - \theta^\circ) = 0$ ， $\cos(90^\circ - \theta^\circ) = 1$ ， $\tan(\alpha^\circ) = 0$ ， $\cos(\alpha^\circ) = 1$ ， $\omega^\circ = \cos^{-1}(2/2) = 0^\circ$ 。此例結果與例 7 者相同，與緯度（圖 6

中之 β° 角) 無關, 即圖 1 中春、秋分時, 各日出處在同一經線上, 各處 $\omega^\circ=0^\circ$, 春、秋分日出線與某一經線重合。

參考圖 3, 以圖 7 中之經線 1 所在的地球縱切面為鏡面, 與 D 處對稱的日落處 $\check{D}$ ($\check{D}$ 處緯度=D 處緯度; $\check{D}$ 處東經度-經線 1 東經度=經線 1 東經度-經線 2 東經度, 但若($\check{D}$ 處東經度-經線 1 東經度) $>0^\circ$, $\check{D}$ 處東經度再減去 360° ; 但若(經線 1 東經度-經線 2 東經度) $>0^\circ$, 經線 1 東經度再減去 360°), 於日落時之太陽方位同 D 處日出時, 但以西方為 0° , 故可計算 D 處日出時之太陽方位, 得知對稱日落處 $\check{D}$ 的日落時之太陽方位。

2. 北半球在秋分到次年春分之間某日出時刻的情況: 可比照上述「北半球在春分到秋分之間某日出時刻的情況」之方式予以分析。圖 11 顯示北半球在秋分到次年春分之間某日出時刻的陽光來向。陽光來向在 B 處的地平面(切平面)上, 亦在 B 處的經線(正午線)切線上。在 B 處的日出日落線與在 B 處的緯線切線相切。D 處日出時, 陽光來向、在 D 處的日出線切線、在 D 處的經線切線、及在 D 處的緯線切線同在 D 處的地平面(切平面)上, 故陽光來向與「B 及 D 二處切平面之交線」平行。在 D 處的緯線切線與陽光來向之間的夾角, 即為所欲求之 D 處日出時太陽方位角。該角以東方為 0° , 偏北為正值, 偏南為負值。該角難以直接用 B 與 D 二處切平面之空間立體關係分析, 但可將該角拆解為 B 與 D 二處之「平面的緯度角度變化」及「平面的經度角度變化」二部份, 再予以合併求出該角, 作法如下:

如圖 12, 將 D 處相對於 B 處的經緯度變化拆解為 C 處相對於 B 處的緯度變化 γ° , 及 D 處相對於 C 處的經度變化 θ° (同前探討日出及日落時刻之 θ° 角)。如圖 13, 假設一「xy 地軸」三度空間直角座標系之 xy 平面與緯線圈平面平行, 將 B、C、D 三處合併於此空間座標的原點, 並將 B、C 處之經線切線與緯線切線、B、C、D 處之切平面法線合併於此空間座標系中, 使得 B、C 處之經線切線及切平面法線在「x 地軸」平面上, 緯線切線在 y 軸上; D 處之緯線切線在 xy 平面上。由圖 14, 得知 D 處之緯線切線與 C 處之緯線切線的夾角 θ° 為 C、D 處之經度差。圖 15 顯示圖 13 中與 D 處相關之資訊, 其中 ω° 即為所欲求之 D 處日出時太陽方位角, 為一三度空間中的角度, 算法如下:

假設圖 15 中之 $\underline{FG} \parallel y$ 軸、 $\underline{GH} \parallel$ 地軸, 則 $\underline{DG} \perp \underline{GF}$ 、 $\underline{DG} \perp \underline{GH}$ 、 $\underline{GF} \perp \underline{GH}$ 。若 $\underline{DG}=h$, 則 $\underline{GF}=h \times \tan(90^\circ-\theta^\circ)$ 、 $\underline{DF}=h \div \cos(90^\circ-\theta^\circ)$, $\underline{GH}=h \times \tan(\lambda^\circ)$ 、 $\underline{DH}=h \div \cos(\lambda^\circ)$ 。 $\underline{FH}=(\underline{GF}^2+\underline{GH}^2)^{0.5}=h(\tan^2(90^\circ-\theta^\circ)+\tan^2(\lambda^\circ))^{0.5}$ 。 $\underline{FH}^2=\underline{DF}^2+\underline{DH}^2-2 \times \underline{DF} \times \underline{DH} \times \cos(\omega^\circ)$ (餘弦定理),

$$\omega^\circ = \cos^{-1} \frac{\left[\frac{h}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)} \right]^2 + \left[\frac{h}{\cos(\lambda^\circ)} \right]^2 - h^2 [\tan^2(90^\circ-\theta^\circ) + \tan^2(\lambda^\circ)]}{2 \times \frac{h}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)} \times \frac{h}{\cos(\lambda^\circ)}}$$

$$=\cos^{-1} \frac{\left[\frac{1}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)}\right]^2 + \left[\frac{1}{\cos(\lambda^\circ)}\right]^2 - [\tan^2(90^\circ-\theta^\circ) + \tan^2(\lambda^\circ)]}{2 \times \frac{1}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)} \times \frac{1}{\cos(\lambda^\circ)}}$$

因為陽光來向為東偏南（DF順時針方向轉 ω° 到達 DH），故計算出的 ω° 應加一負號成為負值。

參考圖 5，以圖 12 中之經線 1 所在的地球縱切面為鏡面，與 D 處對稱的日落處 $\check{D}$ （ $\check{D}$ 處緯度=D 處緯度； $\check{D}$ 處東經度-經線 1 東經度=經線 1 東經度-經線 2 東經度，但若（ $\check{D}$ 處東經度-經線 1 東經度） $<0^\circ$ ， $\check{D}$ 處東經度再加上 360° ；但若（經線 1 東經度-經線 2 東經度） $<0^\circ$ ，經線 1 東經度再加上 360° ），於日落時之太陽方位同 D 處日出時，但以西方為 0° ，故可以 D 處日出時之太陽方位得知對稱日落處 $\check{D}$ 的日落時之太陽方位。

例 9：承例 2 及 5，臺北市夏季觀察到的日出時太陽的方位與冬季觀察到的日出時太陽的方位，二方位之間視角寬最大為幾度？臺北市夏季觀察到的日落時太陽的方位與冬季觀察到的日落時太陽的方位，二方位之間視角寬最大為幾度？

解：臺北市（ $\beta^\circ=25^\circ$ ）夏季日出時太陽的方位東偏最北及日落時太陽的方位西偏最北的時刻為當該市日出或日落時恰逢夏至（ $\alpha^\circ=23.5^\circ$ ）。由例 2， $\theta^\circ=78.3018112189^\circ$ ，

$$\omega^\circ=\cos^{-1}$$

$$\frac{\left[\frac{1}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)}\right]^2 + \left[\frac{1}{\cos(\alpha^\circ)}\right]^2 - [\tan^2(90^\circ-\theta^\circ) + \tan^2(\alpha^\circ)]}{2 \times \frac{1}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)} \times \frac{1}{\cos(\alpha^\circ)}} = 26.1020255979^\circ \text{ (日出東偏北，日}$$

落西偏北)

臺北市冬季日出時太陽的方位東偏最南及日落時太陽的方位西偏最南的時刻為當該市日出或日落時恰逢冬至（ $\lambda^\circ=23.5^\circ$ ）。由例 5， $\theta^\circ=78.3018112189^\circ$ ，

$$\omega^\circ=\cos^{-1}$$

$$\frac{\left[\frac{1}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)}\right]^2 + \left[\frac{1}{\cos(\lambda^\circ)}\right]^2 - [\tan^2(90^\circ-\theta^\circ) + \tan^2(\lambda^\circ)]}{2 \times \frac{1}{\cos(90^\circ-\theta^\circ)} \times \frac{1}{\cos(\lambda^\circ)}} = 26.1020255979^\circ \text{ (日出東偏南，日}$$

落西偏南)

故臺北市夏季觀察到的日出時太陽的方位與冬季觀察到的日出時太陽的方位，二方位之間視角寬最大為 $26.1020255979^\circ + 26.1020255979^\circ = 52.2040511958^\circ$ ；臺北市夏季觀察到的日落時太陽的方位與冬季觀察到的日落時太陽的方位，二方位之間視角寬最大亦為 52.2040511958° 。

例 10：A 處位於(0°E, 0°N)，B 處位於(270°E, 23.5°N)。A 處於春分到夏至之間某日的日出時刻為 6 時，日出時太陽的方位為正東方。A 處自該日日出起 270.2 日時間後，B 處首次日落的時刻及當時太陽的方位為何？

解：A 處該日日出時刻為 6 時，相當於日時間 $6 \div 24 = 0.25$ 日， $\theta^\circ = 360^\circ \times 0.25 = 90^\circ$ 。A 處日出時太陽的方位為正東方， $\omega^\circ = 0^\circ$ 。將此 θ° 及 ω° 代入下式求 α°

$$\cos(\omega^\circ) = \frac{\left[\frac{1}{\cos(90^\circ - \theta^\circ)}\right]^2 + \left[\frac{1}{\cos(\alpha^\circ)}\right]^2 - [\tan^2(90^\circ - \theta^\circ) + \tan^2(\alpha^\circ)]}{2 \times \frac{1}{\cos(90^\circ - \theta^\circ)} \times \frac{1}{\cos(\alpha^\circ)}}$$

通常需用 trial and error 法求 α° ，本題正解為 $\alpha^\circ = 0^\circ$ ，故 A 處該日日出時，該處自春分起已過 $T = \alpha^\circ \div 23.5^\circ \times 91.31 = 0$ 日時間，即該處該日日出時恰逢春分。A 處自該日日出起 270.2 日時間後，A 處的時間為 $0.25 + 270.2 - 270 = 0.45$ 日，即上午 10 時 48 分；B 處為 $0.45 + (270^\circ - 0^\circ) \div 360^\circ - 1 = 0.2$ 日，即同日上午 4 時 48 分，但 A、B 二處同為 $T = 270.2$ 日。因為 $91.31 \times 2 \leq 270.2 \leq 91.31 \times 3$ ，故 A、B 二處的季節同在秋分到冬至之間， $\lambda^\circ = 23.5^\circ \times (270.2 \div 91.31) - 47^\circ = 22.5400284744^\circ$ 。緯度 23.5°N 圈的半徑 $r = R \sin(90^\circ - 23.5^\circ) = 0.9170600744R$ ，在 23.5°N 環線上的 $K = R \cos(90^\circ - 23.5^\circ) = 0.3987490689R$ ，該時刻在 23.5°N 的 $M = K \tan \lambda^\circ = 0.3987490689R \times 0.4150322938 = 0.1654937407R$ ， $\theta^\circ = \cos^{-1}(M/r) = 79.6033767752^\circ$ ，日出處之午夜後日出時刻 $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ = 0.2788795090$ 日，相當於 6 時 41 分 35.2 秒；日落處之午夜前日落時刻 $= 0.5 - \theta^\circ \div 360^\circ = 0.2788795090$ 日，相當於 17 時 18 分 24.8 秒，或 0.7211204910 日，該時刻 B 處當日的時間為 0.2 日，尚未達日落時刻，故 B 處在該時刻之後首次日落在當日稍後。假設 B 處再過 x 日時間後首次日落， $0 < x < 1$ ， $T' = 270.2 + x$ （仍在秋分到冬至之間），使得以 T' 計算之日落日時刻 $= 0.2 + x$ 。trial and error 法得 $x \doteq 0.5209272908$ 日，並得 $\lambda'^\circ \doteq 22.6740969372^\circ$ 、 $\theta'^\circ \doteq 79.5338247039^\circ$ ，故 B 處日落日時刻為 $0.2 + x = 0.7209272908$ 日，相當於 17 時 18 分 8.1 秒；

$$\omega^\circ = \cos^{-1} \frac{\left[\frac{1}{\cos(90^\circ - \theta'^\circ)}\right]^2 + \left[\frac{1}{\cos(\lambda'^\circ)}\right]^2 - [\tan^2(90^\circ - \theta'^\circ) + \tan^2(\lambda'^\circ)]}{2 \times \frac{1}{\cos(90^\circ - \theta'^\circ)} \times \frac{1}{\cos(\lambda'^\circ)}} = 24.8568741892^\circ$$

故 B 處日落時太陽的方位為西偏南 24.8568741892° 。

例 11：承例 10，A 處自該日日出起 273.9 日時間後，B 處首次日落的時刻及當時太陽的方位為何？

解：承例 10，A 處自該日日出起 273.9 日時間後，A 處的時間為 $0.25 + 273.9 - 274 = 0.15$ 日，即上午 3 時 36 分；B 處為 $0.15 + (270^\circ - 0^\circ) \div 360^\circ = 0.9$ 日，即 21 時 36 分，但 A、B 二處同為 $T = 273.9$ 日。因為 $91.31 \times 2 \leq 273.9 \leq 91.31 \times 3$ ，故 A、B 二處的季節同在秋分到冬至

之間， $\lambda^{\circ}=23.5^{\circ}\times(273.9\div 91.31)-47^{\circ}=23.4922790494^{\circ}$ 。緯度 23.5°N 圈的半徑 $r=R\sin(90^{\circ}-23.5^{\circ})=0.9170600744R$ ，在 23.5°N 環線上的 $K=R\cos(90^{\circ}-23.5^{\circ})=0.3987490689R$ ，該時刻在 23.5°N 的 $M=K\tan\lambda^{\circ}=0.3987490689R\times 0.4346521511=0.1733171405R$ ， $\theta^{\circ}=\cos^{-1}(M/r)=79.1060278574^{\circ}$ ，日出處之午夜後日出時刻 $=0.5-\theta^{\circ}\div 360^{\circ}=0.2802610337$ 日，相當於 6 時 43 分 34.6 秒；日落處之午夜前日落時刻 $=0.5-\theta^{\circ}\div 360^{\circ}=0.2802610337$ 日，相當於 17 時 16 分 25.4 秒，或 0.7197389663 日，該時刻 B 處當日的時間為 0.9 日，已過日落時刻，故 B 處在該時刻之後首次日落在次日。假設 B 處再過 x 日時間後首次日落， $0<x<1$ ，但若 $x\geq 91.31\times 3-273.9=0.03$ ，陽光來向將在冬至時折返。先以 $x=0.03$ 測試， $T'=273.9+x=273.93$ （冬至）， $\lambda'^{\circ}=23.5^{\circ}\times(T'\div 91.31)-47^{\circ}=94^{\circ}-23.5^{\circ}\times(T'\div 91.31)=23.5^{\circ}$ ，計算 $M'=K\tan\lambda'^{\circ}$ 、 $\theta'^{\circ}=\cos^{-1}(M'/r)=79.1019629274^{\circ}$ ，冬至時日落處的日時刻為 $1-(0.5-\theta'^{\circ}\div 360^{\circ})=0.7197276748$ 日，因為 B 處的時間為 $0.9+0.03=0.93$ 日，故 B 處非冬至時的日落處。假設 B 處自冬至起再過 y 日時間後，即自春分起再過 $T''=91.31\times 3+y$ 日時間後，首次日落， $0<y<1$ ，B 處日落時的時刻為 $0.93+y-1$ 日時間（假設 $y>0.07$ ），計算 $\lambda''^{\circ}=94^{\circ}-23.5^{\circ}\times(T''\div 91.31)$ 、 $M''=K\tan\lambda''^{\circ}$ 、 $\theta''^{\circ}=\cos^{-1}(M''/r)$ ，使得 $1-(0.5-\theta''^{\circ}\div 360^{\circ})=0.93+y-1$ 。trial and error 法得 $y=0.7900245352$ 日（ $y>0.07$ ），並得 $\lambda''^{\circ}=23.2966753195^{\circ}$ 、 $\theta''^{\circ}=79.2088326842^{\circ}$ ，故 B 處日落日時刻為 $0.93+y-1=0.7200245352$ 日，相當於 17 時 16 分 50.1 秒；

$$\omega^{\circ}=\cos^{-1}\frac{\left[\frac{1}{\cos(90^{\circ}-\theta'^{\circ})}\right]^2+\left[\frac{1}{\cos(\lambda'^{\circ})}\right]^2-\left[\tan^2(90^{\circ}-\theta'^{\circ})+\tan^2(\lambda'^{\circ})\right]}{2\times\frac{1}{\cos(90^{\circ}-\theta'^{\circ})}\times\frac{1}{\cos(\lambda'^{\circ})}}=25.5476104436^{\circ}$$

故 B 處日落時太陽的方位為西偏南 25.5476104436° 。

本文之圖形皆以 PowerPoint 軟體繪製，受限於該軟體的精度，每個角度有 $-1.0\sim 0^{\circ}$ 的誤差。

讀者可參考本文的分析方法，自行分析南半球任一處日出及日落的理論時刻及當時太陽的理論方位。

有興趣的讀者可將本文介紹的內容撰寫成電腦程式，經由一組已知的參考地點（經緯度）、當地某日日出或日落的理論時刻及理論陽光來向，快速計算別處他日日出或日落的理論時刻及理論陽光來向。

附錄 1：以 trial and error（嚐試錯誤）法重覆校正求例 3 中 x 的解（配合 Excel 軟體進行計算，但 Excel 軟體的角度單位為弧度量，並且 Excel 計算與手工計算略有誤差）。

解： $\beta^{\circ}=33.25^{\circ}$ ， $K=R\cos(90^{\circ}-\beta^{\circ})$ （ R 可設為 1）， $r=R\sin(90^{\circ}-\beta^{\circ})$ （ R 可設為 1），猜測 x 值，代入 $T'=T+x$ ，計算 $\alpha'^{\circ}=23.5^{\circ}\times(T'\div 91.31)$ 、 $M'=K\tan\alpha'^{\circ}$ 、 $\theta'^{\circ}=\cos^{-1}(M'/r)$ ，B 處下一

個日出的日時間 $=\theta^{\circ}\div 360^{\circ}$ ，當 x 值猜測正確時， $\text{error}=(0.2296620370-0.7815743441+x)-(\theta^{\circ}\div 360^{\circ})=0$ 。因為 x 可能是無理數，需有適當猜測 x 值的方法，使得 error 快速趨近於 0。在「數值分析」中有些系統性快速求算近似解的方法，但該主題已超出中學程度課程範圍，故本文不採用該等方法。本文提供一較為簡易的方法，其原理為：對於任何一複雜的函數 $\text{error}=f(x)$ ，當 x 在一個非常小的範圍內時， error 與 x 的關係趨近於直線。故可先猜測二個 x 值，計算 $\text{error}_1=f(x_1)$ 、 $\text{error}_2=f(x_2)$ ，以 Excel 軟體求出通過 (x_1, error_1) 、 (x_2, error_2) 二點的直線方程式 $\text{error}'=m_1(x)+b_1$ ，計算當 $\text{error}'=0$ 時的 x 值 x_3 ，再計算 $\text{error}_3=f(x_3)$ ，若 error_3 足夠小， x_3 可視為正解；否則以 (x_3, error_3) 及 (x_1, error_1) 、 (x_2, error_2) 二者之一（ x_1 與 x_2 中較接近 x_3 者），再重複求新的直線方程式 $\text{error}'=m_2(x)+b_2$ ，計算當 $\text{error}'=0$ 時的 x 值 x_4 ，...

以 Excel 軟體求出通過 (x_1, error_1) 、 (x_2, error_2) 二點的直線方程式 $\text{error}'=m_1(x)+b_1$ 的方法說明如下：按序輸入 x_1 、 x_2 的值至 Excel 的 A 行，及 error_1 、 error_2 的值至 B 行，選取全部 A、B 行，在頁面上端頁籤選取〈插入〉/〈圖表〉/〈散佈圖〉之左上的點圖，產生的圖形之細節調整不在本文中贅述。在圖中任一數值點上按滑鼠右鍵，選取〈加上趨勢線〉，在〈趨勢線選項〉中選取〈線性〉，並勾選〈圖表上顯示公式〉，關閉對話框後圖形中即顯示直線及其方程式。本類型的題目在方程式中需較精密的係數，可在點擊方程式後按滑鼠右鍵，選取〈趨勢線標籤格式〉/〈數值〉/〈類別〉中的「數值」，即可調整係數所需的小數位數。

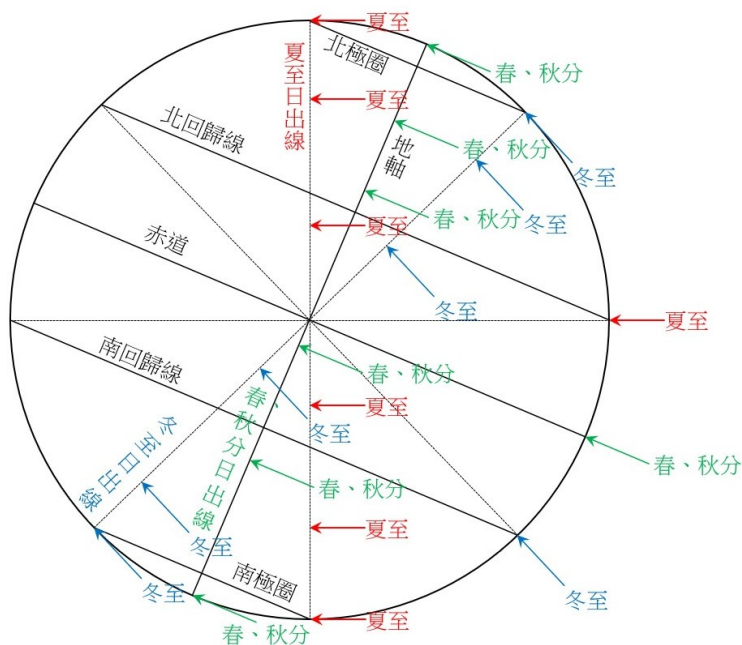


圖 1：春分、夏至、秋分、冬至時陽光來向合併圖

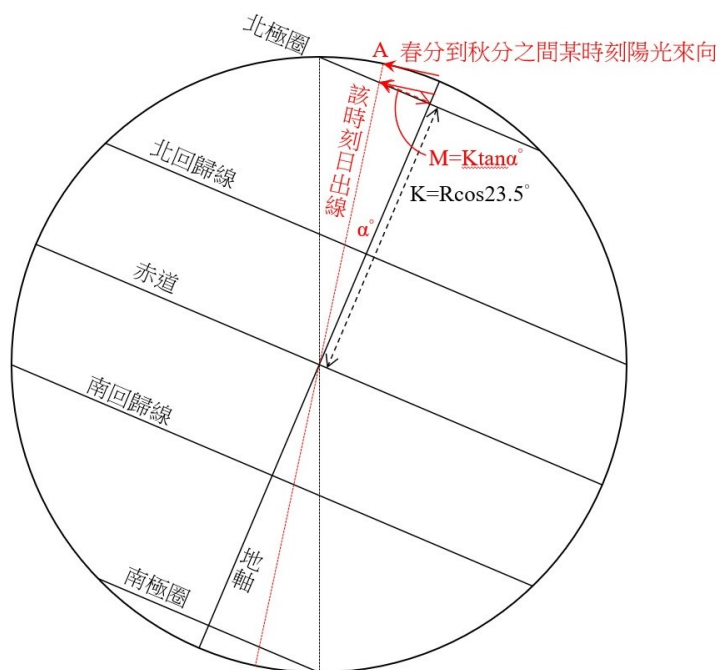


圖 2：春分到秋分之間，陽光可及處沿子夜線到達圖中之 A 點

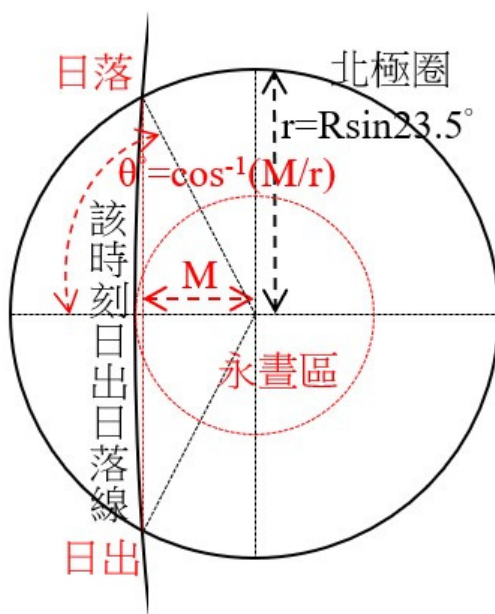


圖 3：春分到秋分之間北極圈上視平面圖

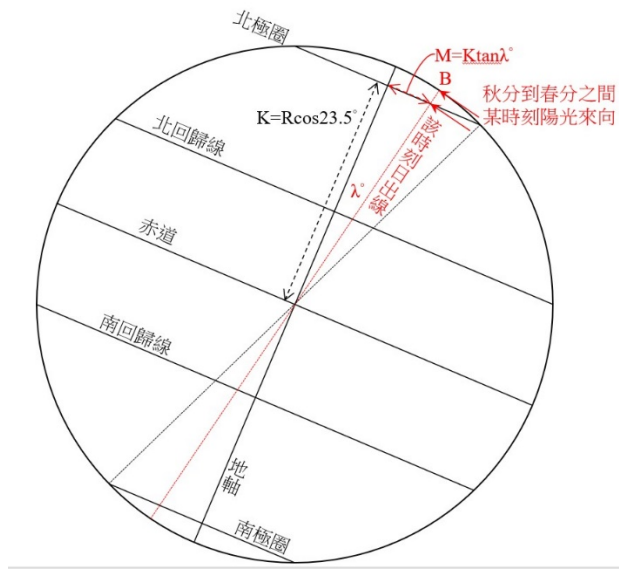


圖 4：秋分到次年春分之間，陽光可及處沿正午線到達圖中之 B 點

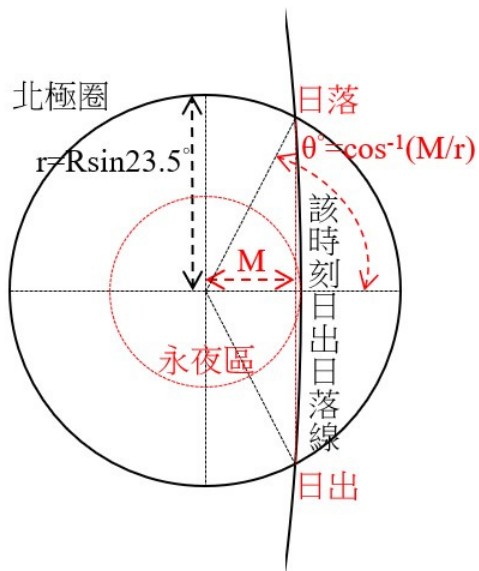


圖 5：秋分到次年春分之間北極圈上視平面圖

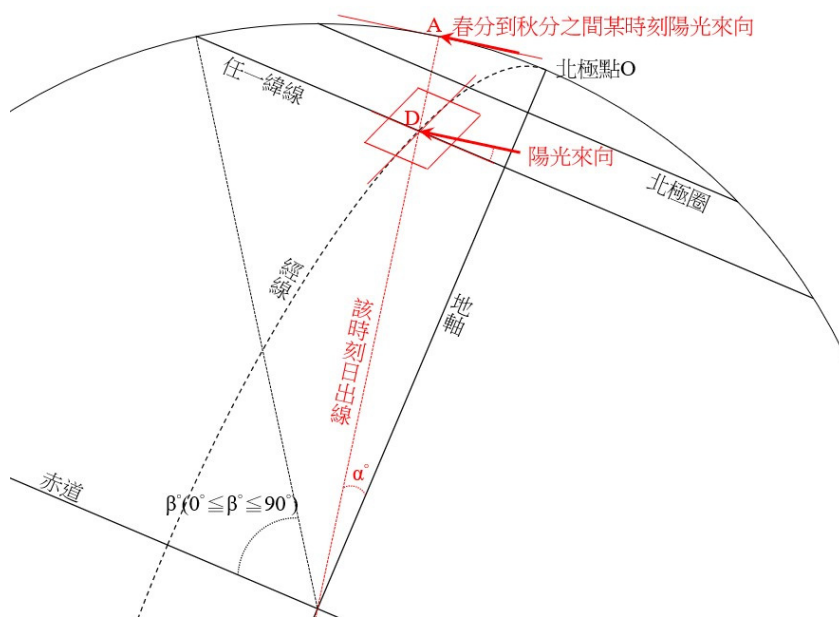


圖 6：北半球在春分到秋分之間某日出時刻的陽光來向

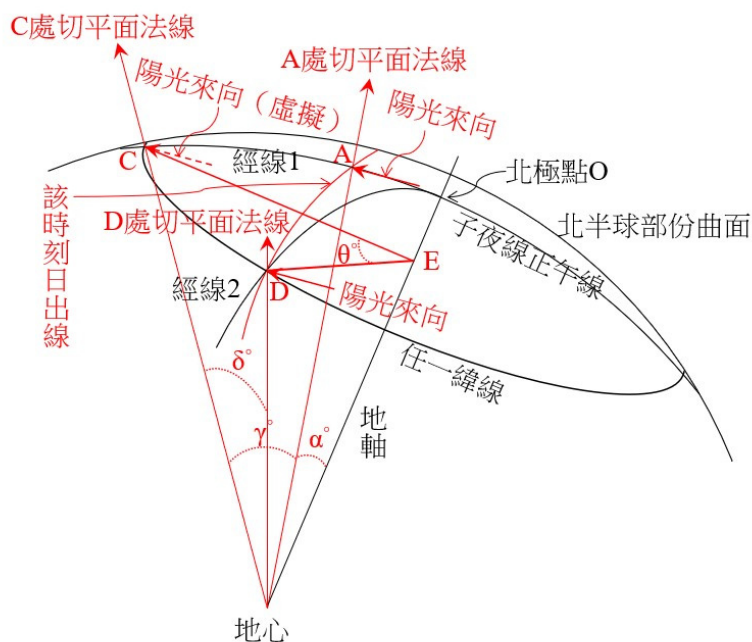


圖 7：春分到秋分期間分解陽光來向角度立體示意圖(未按比例)

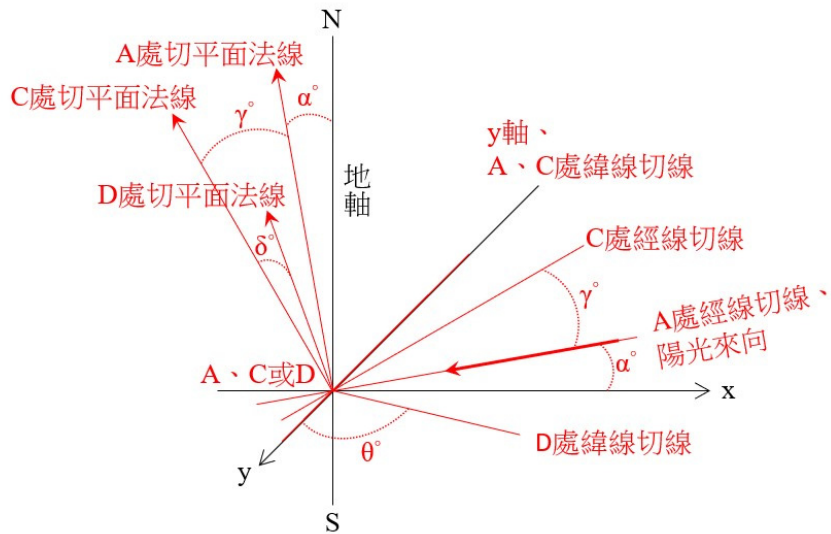


圖 8：圖 7 之 A、C、D 三處合併於空間座標的原點，其經線切線、緯線切線、切平面法線之相對位置

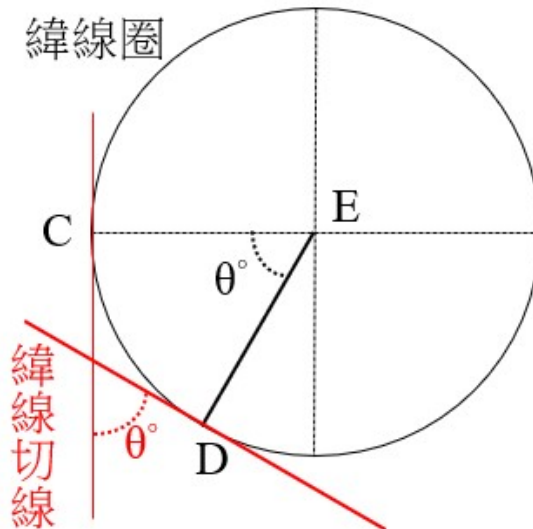


圖 9：圖 7 之 C、D 二處所在之緯線圈的上視示意圖(未按比例)

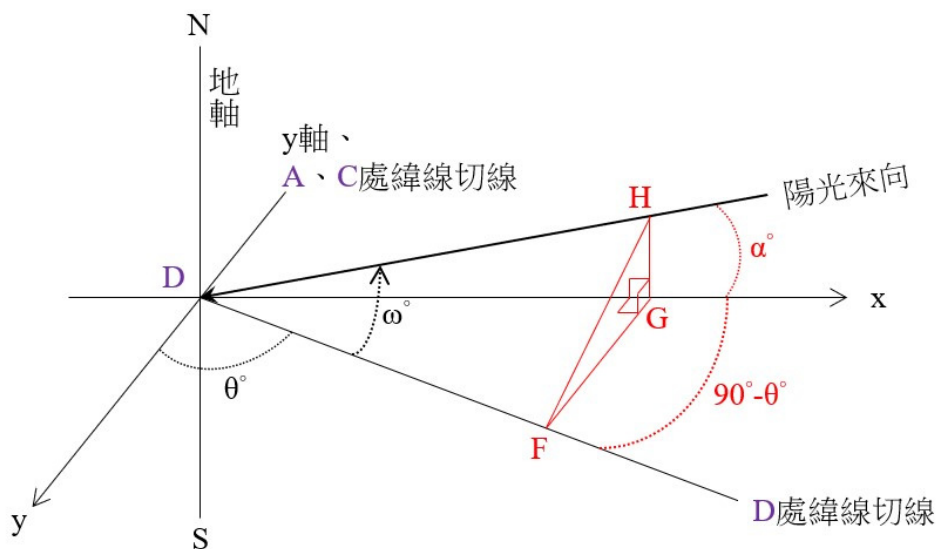


圖 10：圖 8 中與 D 處相關之資訊

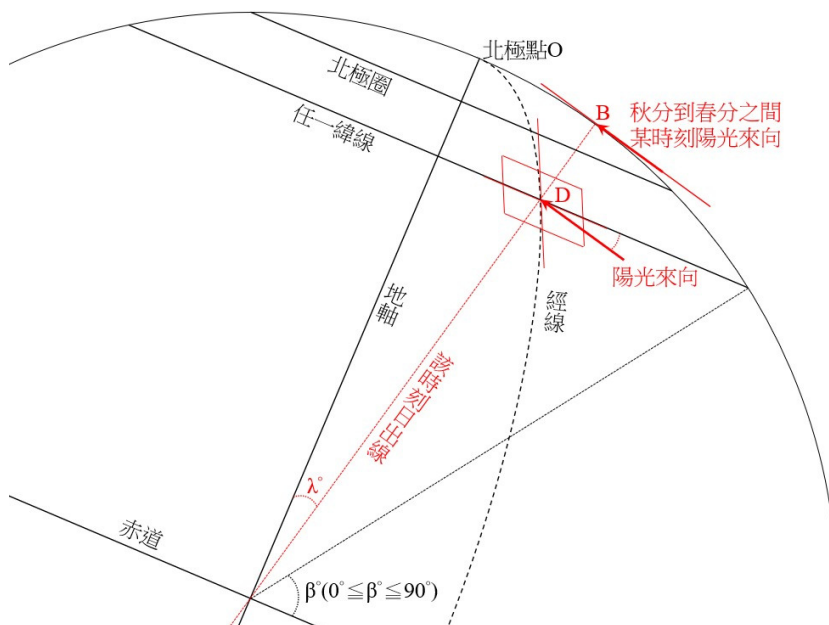


圖 11：北半球在秋分到次年春分之間某日出時刻的陽光來向

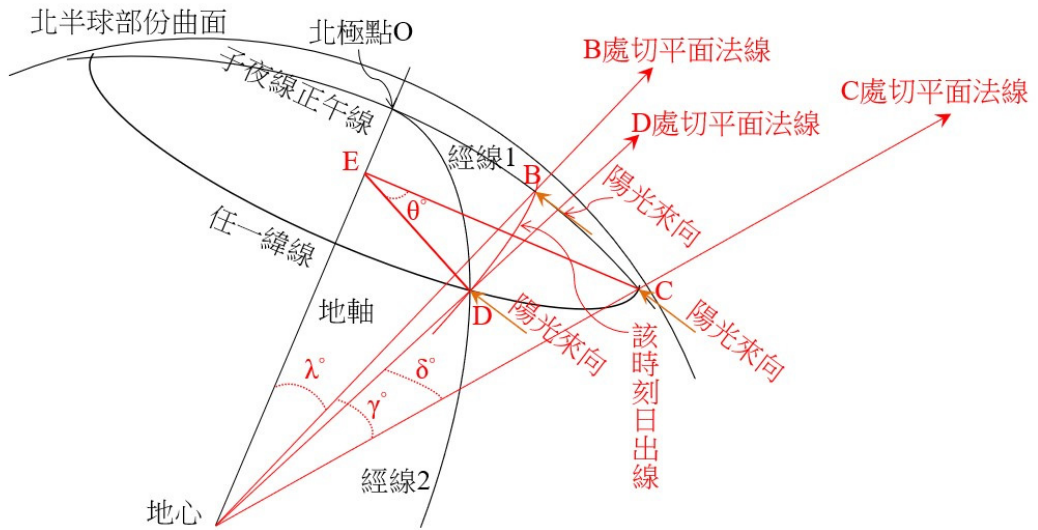


圖 12：秋分到次年春分期間分解陽光來向角度立體示意圖(未按比例)

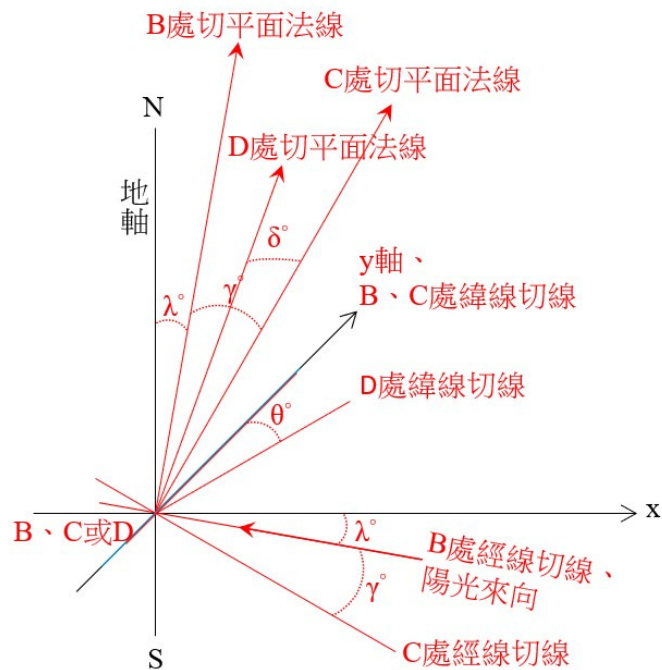


圖 13：圖 12 之 B、C、D 三處合併於空間座標的原點，其經線切線、緯線切線、切平面法線之相對位置

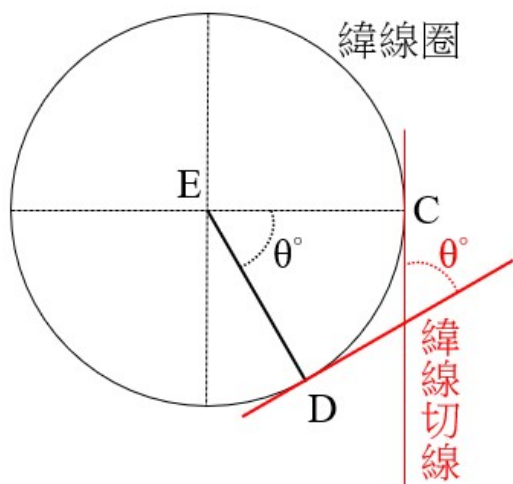


圖 14：圖 12 之 C、D 二處所在之緯線圈的上視示意圖(未按比例)

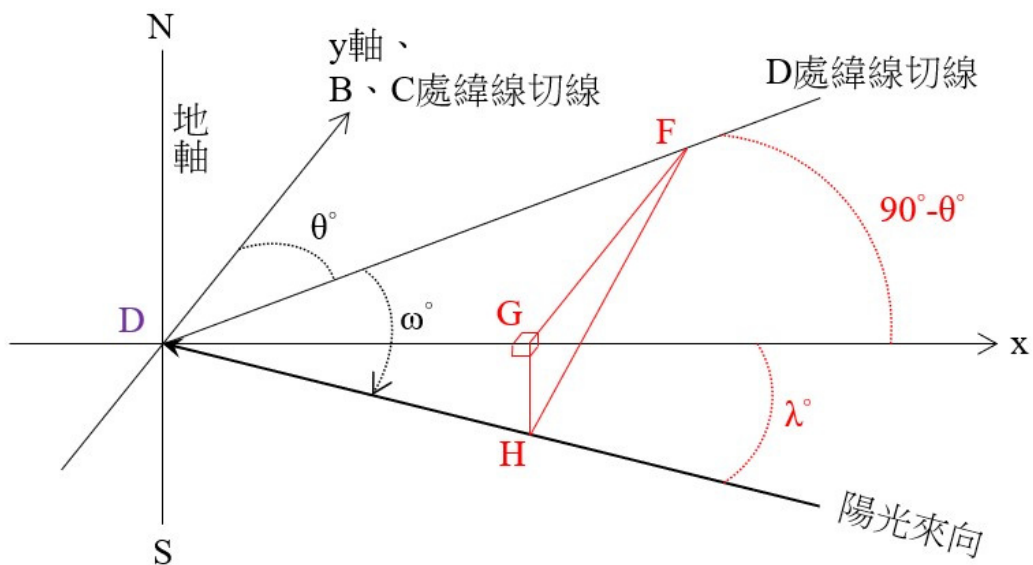


圖 15：圖 13 中與 D 處相關之資訊