代數知多少

劉曼麗 [1*] 洪有情 [2]

[1] 國立屏東大學　科學傳播學系

[2] 國立臺灣師範大學　數學系

壹、前言

代數在數學的發展上扮演著很重要的角色。而在國中與高中的數學教材中更是佔有極重的份量。代數最大的特色乃是引進文字符號 (letters)，並讓文字符號也能進行運算。尤其是，用文字符號來表示數，跨越在算術中使用的數只侷限於已知數（已知該數值）。而被文字符號所表示的數除了是已知數還可以是未知數，可以是特定數也可以是一般數（指定範圍中的任一數），可以是常數也可以是變數（指定範圍中的數可任意變動）。除了文字符號的意義與運算外，代數也討論著各種抽象化的結構，例如探討群，環、體的「抽象代數」以及向量空間的「線性代數」。高中以下所學的代數是「初等代數」。基於代數是數學課程中的一個主要成份，本文旨在介紹代數的內涵與其重要性，先限於初等代數，以國中為主。希望透過本文的解說與點出，帶領讀者一窺代數究竟，知道它的來龍去脈與精彩處，也因而對數學課程中的代數教材脈絡有所認識與了解。

*為本文通訊作者

貳、代數內涵

初等代數關注的是用文字符號來表示數，探討的是用符號進行的運算與性質以及用符號解題與求解的各種方法，還有變數之間的關係也是代數中的重頭戲。據此，本節將分成代數概念、代數運算、性質與解題方法、代數解題等三部分並擇要來陳述之。

一、代數概念

瞭解代數概念，首重瞭解文字符號的記法、意義與由其所延伸的新概念以及文字符號可發揮的作用。

（一）文字符號的記法、意義與延伸的新概念

學習代數就要學習先和文字符號打交道，瞭解符號是如何約定。習慣上，我們會選用英文字母來當代數的符號，如 a、b、c、…、x、y、z 等等，有時為了精簡與易於傳達，也常在字母下標處再加入數字或字母，如 x_1、x_2、…、x_n 等等。由於運算符號中的乘法符號「×」常會和文字符號「x」混淆，所以又在代數中約定改以「·」作為乘號，例如將 $a\times b$ 寫成 $a\cdot b$。在不誤解下，甚至連「·」也省略了，直接用 ab 表示 $a\times b$，

用 $5a$ 表示 $5\times a$（$a\times 5$ 也寫成 $5a$，不寫成 $a5$）。另外，為了簡潔，也常將文字符號連加的記法、連乘的記法改成簡記法，例如 $x+x+x$ 簡記為 $3x$（其實算術中的連加也與乘法連結）、$x\cdot x$ 簡記為 x^2（x 的二次方或 x 的平方）、$x\cdot x\cdot x$ 簡記為 x^3（x 的三次方或 x 的立方）...等等。x^n（x 的 n 次方）即 n 個 x 連乘，稱為指數式。

代數是建立在算術的基礎上，曾出現在算術中的算式、等式也因文字符號的參與而擴充了一些新概念與新名詞。如 $2x+3$、$4x+y$ 之類的(含有文字符號的算式)稱為「代數式」，而 $2x+3=15$、$4x+y=5$、$x^2-2x+1=7$ 之類的(含有文字符號的等式)則稱為「方程式」。另外，我們會依據文字符號的數目和次方來為方程式分類，如 $2x+3=15$ 這一類的稱為一元一次方程式，又如 $4x+y=5$ 之類的稱為二元一次方程式、而 $x^2-2x+1=7$ 之類的則稱為一元二次方程式等等。特別的，由數和文字符號進行加法和乘法運算所成的算式則稱為多項式，例如 $2x^3+(-3)x^2+9x+1$（通常記為 $2x^3-3x^2+9x+1$）稱為 x 的多項式，它共有四項，而三次項、二次項、一次項及常數項分別為 $2x^3$、$-3x^2$、$9x$ 及 1，其中的 2、-3、9 就分別稱為三次項、二次項及一次項的係數。多項式的次數是依據文字符號的最高次數而定，此多項式的最高次為三次，故稱為三次多項式。還有，分子、分母均為多項式的式子稱為分式（或有理式），若方程式中含有分式就稱為分式方程式（或有理方程式）。如將方程式中的「等號」改成「大於」或「小於」的符號就有了「不等式」。學習代數，最重要的就是首要理解符號可代表數以及用符號與數構成算式的意義。學習用文字符號來表徵數量與關係，並能將數學問題用文字符號進行列式，形成關係式（如方程式或不等式），以做為解題的跳板。

（二）文字符號的作用

文字符號是由算術學習轉為代數學習的必要要素，在數學學習中佔有重要地位。由於文字符號常因使用方式扮演不同角色而有不同作用。文字符號至少具有下列幾種角色：

1. 可作為未知數

在算術中的文字題（應用問題）都是用已知數列出算式來求解，例如「爸爸今年 47 歲，剛好是哥哥年紀的 3 倍又多 2 歲，那麼哥哥今年幾歲？」此題的解題想法是要用逆向思維來列式:「3 倍又多 2 歲」為 47 歲，所以先減 2，剛好是哥哥年紀的 3 倍，所以再除以 3 後即可得到哥哥的年紀。因而列式為 $(47-2)\div 3$，由計算得到答案 15，合併後可寫成 $(47-2)\div 3=15$。其實這題也可改用順向思維來列式，因有文字符號可先幫忙卡位。也就是先引入文字符號代表問題中待求的數（暫時還不知是多少），如用 x 歲表示哥哥今年的年齡，然後依題意直接把數量之間的關係用算式表之，得到 $3x+2=47$，這是由該問題所產生的方程式，而方程式中的文字符號 x 就是未知數。在這個方程式中，所做的運算為先「乘以 3」再「加 2」，恰好和算術上

的運算相反。最後可透過等量公理或移項法則以求出此方程式中的未知數。

2. 可作為一般數

在算術裡看到的只有數，並沒有一般化的通則(洪有情，2017)。例如在算術裡要描述何謂偶數？何謂奇數？我們只能舉出一些偶數和奇數的例子，或者說「能被 2 整除的整數是偶數，不能被 2 整除的整數是奇數」。對於偶數和奇數的樣式還是無法得知。但透過文字符號表達就可以說：像 $2n$（n 為整數）這樣的數是偶數、像$2n+1$（n 是整數）的數就是奇數，也就是說 $2n$ 是偶數一般化的形式表徵、$2n+1$ 是奇數一般化的形式表徵，其中的 n 可當成任一整數。此時的文字符號 n 就是一般數。又如加法交換律，在算術裡只能用數舉例說明 3+6= 6+3、15+28= 28+15 等等；但在代數裡就可寫成$a+b=b+a$，a, b 可為任何數。這是用文字符號一般化的使然。又若我們要討論某一類方程式，例如二元一次方程式時，$4x+y=5$、$x-3y+1=0$、...、寫不完，此時我們又可再引進文字符號當成常數，將二元一次方程式寫成一般式 $ax+by+c=0$，其中 $a\neq0$, $b\neq0$ 而 a, b, c 為一般數。同樣地，討論 x 的 n 次多項式時，也可引進文字符號當成常數將其寫成一般式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中的係數 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ 即為一般數。

3. 可作為變數

有些問題主要是探討整體變化情形，對於「某一個數的數值是多少」，並不是那麼重要。這時將數進行變動就成了我們所要關注的焦點，因而有了變數概念的需求。文字符號也可作為變數用來討論變化的情形。例如二元一次方程式$ax+by+c=0$中的 x 與 y 皆當成變數，可任意變動，且保持$ax+by+c=0$ 的關係。只要其中一個數值給定，另一數值即可確定；這種 (x,y) 有無窮多組，在坐標平面上，其圖形為一條直線。由於二元一次方程式皆具有此特性故又稱為直線方程式。另外，若 $a=0$，則表示的直線為水平線；而 $b=0$，則表示的直線為鉛直線。又如出現在二元二次方程式 $x^2+y^2=4$ 中的 x 與 y 也皆為變數，在坐標平面上的圖形為一圓。還有一點值得注意的是若將二元一次方程式中的兩個變數 x 與 y 分置等號的兩邊而改寫成 $y=ax+b$ 的形式，就可看成變數 y 是依變數 x 而定，延伸到 y 是 x 的函數概念了（見第 15~16 頁）。因 $y=ax+b$ 的等號右邊是一個一次多項式，故稱為 y 是 x 的一次函數；同樣地，$y=ax^2+bx+c$ 的等號右邊是一個二次多項式就稱 y 是 x 的二次函數。像一次函數和二次函數之類的函數是由多項式表出，也稱為多項式函數。

4. 可作為不定元

基於文字符號可代表數的觀點，我們將文字符號作為未知數、一般數及變數等多重角色來使用。而這些表示數的文字符號，就具有與數一樣的運算通性，如結合律、交換律、分配律等等。事實上，在數學裡除了數以外還有一些可資運算的情形也值得探討與研究，同樣地，我們仍使用文字符號來表示，也就是此文字符號能做

運算，具有數的運算通性卻不一定是用來表示一個數,例如可表示矩陣或函數等等。當我們只關心某個符號的運算而不計較它的實質時，就稱此符號為不定元。若需要時，就可對此符號賦予種種實際的意義並定義其運算方法,進而引伸出有關的性質。多項式中的文字符號即為不定元。只含一個不定元的多項式通常叫做單元多項式，含有一個以上不定元的多項式叫做多元多項式，而多項式及其運算是高等代數的基礎。

由上所知，只有在特定情境下，才能確定文字符號的作用。單一個二元一次方程式中的 x, y 是變數；但二元一次聯立方程式中的 x, y 卻是未知數（兩個二元一次方程式同時成立就合稱二元一次聯立方程式)。甚至於,含文字符號的算式即使有同樣的長相,在不同情境下就有不同的作用。例如，x^2+2x+1 看成多項式，則 x 是不定元； $y=x^2+2x+1$ 是多項式函數，則 x 是變數；$x^2+2x+1=0$ 是方程式，則 x 是未知數。

除了上述的 4 種作用，我們還可用文字符號來表示成公式的通式，在公式中用符號取代，將使表達更為簡潔。例如我們已知正方形的周長公式為「邊長×4」、正方形的面積公式為「邊長×邊長」，有了文字符號就可簡記成「正方形的周長=$a\times 4$」、「正方形的面積=$a\times a$」，其中 a 為正方形的邊長。總之，文字符號的多種用途，為代數發揮了強大作用，提升了在數學上用文字符號進行思考與探究的威力及解決問題的效能。

二、代數運算、性質與解題方法

代數的出現打破了原先只能使用已知數來運作，而代表數的文字符號仍能進行如算術中的運算與解題，將算術層次向前推進了一大步。學習代數，也要學習代數運算與性質、代數式的化簡與解題的各種方法，才能於列式後將未知數求解出來。

（一）代數運算

代數的四則運算符號仍沿用+、−、×、÷符號，也仍然遵守著算術中的四則混合運算規則及指數律。由於文字符號的介入，運算的對象除了數、符號還有代數式，因此要理解符號如何與符號或與數之間進行運算，還要知悉同類項（文字符號與次數均相同的項）才能合併的原則，而同類項合併就如同算術中的數必須是同單位才能合併處理。

基本上，代數運算可分成程序性的和結構性的(洪有情，2017)。程序性的運算指的是算術運算，運算的對象是數，施行的運算是計算性的。例如在代數式 $3x+4y$ 中，分別以 2 和 5 代替 x 和 y，計算 $3\times 2+4\times 5$，得到 26，結果是一個數。結構性指的是另一種運算，它運算的對象不只是數還有文字符號或代數式，強調的是代數的運算規則，所施行的運算不只是計算性的。例如 $3x+2x$ 的運算結果為 $5x$，$(2x+1)+(3x-y+1)$ 的運算結果為 $5x-y+2$。進行結構性的運算只能將代數式化簡，運算的結果仍為代數式。由算術到代數即可看成是由程序性概

念轉成結構性概念的過程(Kieran, 1992)。

（二）代數運算性質

文字符號可代表數，所以和數具有相同的運算性質和規則。代數的四則運算仍然滿足交換律、結合律、分配律等運算三律、指數律以及去括號規則。運算三律常用來簡化運算，而結合律還可用來節省括號的使用。據此，在做一次式的加減法運算時，將同類項合併，即可看成是直接將有相同文字符號的合併在一起、將數字合併在一起，再各自進行內部運算，例如：

$3x+2y+5-x+y-1$

$=(3x-x)+(2y+y)+(5-1)=2x+3y+4$

同樣地，在做單項式（只有一項的式子）的乘法運算時，即看成是將式子中各數(係數）相乘以及對相同文字符號進行指數相加（指數式滿足指數律），例如：

$(3xy^2)\cdot(2xy)\cdot(4x^2y^3)$

$=(3\cdot2\cdot4)\cdot(x\cdot x\cdot x^2)\cdot(y^2\cdot y\cdot y^3)=24x^4y^6$

由於在算術中使用的都是數，即使不用運算三律來簡化計算，仍可算出其值。例如 $99\times3=(100-1)\times3=300-3=297$（用分配律），或直接用乘法直式算則也可計算出答案為 297。又如：

$98+15+2=98+2+15=115$（用交換律）

$98+15+2=113+2=115$（直接由左而右算）

但在代數運算時，因需要將同類項進行合併，就非得利用運算三律。舉例如下：

$2x+2y-1+x-y+5=2x+x+2y-y-1+5$（如不用交換律，同類項無法湊合在一起）

$=3x+y+4$（結合律）

又如：

$x(x+1)-1+2x=x^2+x-1+2x$（如不用分配律，括號內的代數式就不能運作導致運算停頓）

$=x^2+x+2x-1$（交換律）

$=x^2+3x-1$（結合律）

還有，關於去括號規則，在算術中不用也行，例如 $9-(-3+7)=9-4=5$，但在代數中就非用不可，例如：

$x-(-3x+7)=x+3x-7=4x-7$

所以在化簡代數式的運算過程中除了數的計算外都是不斷的在使用運算三律、指數律與去括號規則，讓符號的運作流暢，也因而使得運算三律、指數律與去括號規則對於代數運算更顯重要。

另外，結合文字符號、代數運算與運算三律，還可形成一些很重要的結果，直接拿來運用。如二次式乘法公式，就常用來簡化運算或協助多項式的因式分解。以下簡單說明如何運用二次式乘法公式：

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$（和的平方），可用於簡化計算 1001^2 如下：

$1001^2=(1000+1)^2=1000^2+2\times1000\times1+1^2=\ldots$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$（差的平方），可用於簡化計算 999^2 如下：

$999^2=(1000-1)^2=1000^2-2\times1000\times1+1^2=\ldots$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$（平方差），可用於簡化計算 1001×999 如下：

$1001\times999=(1000+1)\times(1000-1)$

$=1000^2-1^2=\ldots$

（三）解題方法

用代數解應用問題或數學問題時，常

會引進未知數來代表問題中待求的數，並依據題意列出關係式(算式)，接著求出未知數所代表的數值。解題方法就是指透過符號操作和運算法則求出未知數的方法。如果列出的關係式是方程式或不等式，求未知數的過程就稱為「解方程式」或「解不等式」。

就解方程式而言，各類方程式皆有其特殊解法，例如解一元一次方程式的等量公理或移項法則、解二元一次聯立方程式的代入消去法或加減消去法、及解一元二次方程式的因式分解法或配方法或代公式解；而解分式方程式經化簡後會回歸到用解方程式的方法來處理。還有，解一元一次不等式的做法類似解一元一次方程式，只是在不等式左右同乘除一負數時會使不等式符號改變方向(如大於符號就變成小於符號)。至於解方程式或不等式這些重要的運算法則，在國中數學教科書中皆有詳盡解說。

三、代數解題

在國小的數學課程裡，關於四則應用問題或生活情境中的數學問題，例如年齡問題、水流問題、雞兔同籠問題等，我們都是用算術解法來解題。但遇到較困難或較複雜的問題時，要列出數學算式就不是那麼容易了。此時若改用代數解法就會使解題難度降低，代數解法有未知數的輔助可使列式有著力點。代數解法的程序又有一般性，通常其步驟依序為：設未知數→列關係式→求未知數。還有，要導出一般化公式或證明某些性質時也非代數莫屬，算術解法就做不到。以下透過一些例子來說明用代數解題的優點。

例 1(年齡問題)已知父親現年是兒子現年的 7 倍，3 年後，父親年齡是兒子的 5 倍，問父子現年各幾歲？

此題是問父子現年幾歲，先設子現年為 x 歲，則依題意父現年為 $7x$ 歲，3 年後父子年齡分別為 $7x+3$、$x+3$。再依題意「3 年後父親年齡是兒子年齡的 5 倍」，列出關係式為 $7x+3= 5(x+3)$。這是一個一元一次方程式，由移項法則得出：

$(7-5)x =5\times3-3$

所以 $x =(5\times3-3)\div(7-5)= 6$

求出子現年 6 歲、父現年 42 歲。其實求解未知數的最後一個式子 $(5\times3-3)\div(7-5)$ 正是此題算術解法的數學算式，可以由代數解法倒推而得(洪有情，2017)。此題改以算術解題的思維來想：從「3 年後父年」減去 5×3 歲即得「子現年」的 5 倍，即從「父現年」減去 $(5\times3-3)$ 歲得到「子現年」的 5 倍。又父現年是子現年的 7 倍，故 $(5\times3-3)$ 剛好是子現年的 $(7-5)$ 倍，所以子現年 $=(5\times3-3)\div(7-5)$。算術的解題思維與代數迥異，代數解法是透過設未知數然後依據題意直譯成關係式，而此題的算術解法須透過題意的逆向思維才能將問題數學化，列出算式。

另外，本題待求的未知數有兩個，可設子現年為 x 歲、父現年為 y 歲，依題意可列出兩個關係式：$y= 7x$、$y+3= 5(x+3)$。由此列出的式子是一個二元一次聯立方程式，再由代入消去法或加減消去法的運算

法則得出 $x=6$、$y=42$。如從坐標平面上來看，就能連結到幾何，求此二元一次聯立方程式的解就是找出對應這兩個二元一次方程式 $y=7x$ 與 $y+3=5(x+3)$的兩條直線交點。

雞兔同籠問題是一個很熟悉的四則應用問題，請讀者也試著用算術解法與代數解法都做做看，就會發現算術解題與代數解題是兩個互逆的解題思維。另外，有些問題用代數解法涉及多元或多次方程式或其它形式的關係式（如下兩例），若用算術解法難度就很高甚至無法做到，這就是算術不能而代數能的犀利之處。

例 2（面積問題）證明所有周長一定的矩形中，以正方形面積為最大。

這是一個證明題。矩形周長一定，可設周長為 a（常數）並設矩形的長為 x，則寬為$\frac{a}{2}-x$。矩形面積＝長×寬＝$x(\frac{a}{2}-x)=-x^2+\frac{a}{2}x$，看成矩形面積是 x 的二次函數，利用配方法的運算法則得出 $-x^2+\frac{a}{2}x=-(x-\frac{a}{4})^2+\frac{a^2}{16}\leq\frac{a^2}{16}$，取 $x-\frac{a}{4}=0$ 即可得出函數的最大值，因此當 x 為$\frac{a}{4}$時，面積最大為$\frac{a^2}{16}$。此時長寬皆為$\frac{a}{4}$，故此矩形為正方形時面積最大。這個由代數得出的證明就可讓我們將結果應用於生活中，也就是對任意的一條繩子只要將其圍成正方形就可得出最大範圍。試想如果沒有代數，要怎麼證明呢？

例 3（速率問題）叔叔開車以固定速率從甲地到相距 300 公里的乙地，若叔叔改以每小時增加 10 公里的固定速率，則會提早 1 小時到達乙地。問叔叔原先的速率為每小時幾公里？

此題是問原先的速率，就設原先的速率為每小時 x 公里，依題意列出關係式為 $\frac{300}{x}=\frac{300}{x+10}+1$。這是一個分式方程式，化簡後得到一個一元二次方程式為 $x^2+10x-3000=0$，利用因式分解法即可求出未知數 x 為 50。所以叔叔原先的速率為每小時 50 公里。試想如果沒有代數，要怎麼做呢？

另外，代數也可支援幾何方面的問題，藉助代數便可將幾何圖形的一般式表示出來。我們都知道通過任意兩點可決定一條直線，僅此而已；有了代數與解題方法，在坐標平面上就可用直線方程式把直線表達出來。例如坐標平面上通過 $A(1,-1)$與 $B(3,2)$兩點的直線 L 的方程式就可透過設直線方程式一般式$ax+by+c=0$（a, b, c 為常數）來求出。由於 A、B 兩點的 x 坐標不相等，直線 L 不是鉛直線；A、B 兩點的 y 坐標也不相等，直線 L 亦不是水平線，因此直線 L 的一般式也可改寫成 $y=ax+b$（a, b 為常數，$a\neq0$），然後將$(1,-1)$與$(3,2)$兩點代入直線方程式 $y=ax+b$ 中得到二元一次聯立方程式，再由解二元一次聯立方程式，求出此直線方程式為 $y=\frac{3}{2}x-5$（或 $3x-2y-5=0$），讓直線得以用形式被表徵出來。還有，很多純幾何問題也需用到代數方法求解，例如「$\overline{AB}=48$，P 為$\overline{AB}$上一點，將$\overline{AP}$四等分，並將它圍成一正方形 $PQRS$；將$\overline{PB}$三等分，並將它圍成一正三角

形 PTU。問 P 點在何處時，$\triangle PQU$ 面積最大？」此題之圖與解法請見附錄。此題是先設 $\triangle PTU$ 的邊長為 x，利用正三角形的高及面積公式，依題意得到 $\triangle PQU$ 面積為 x 的二次函數，利用配方法的運算法則或代二次函數圖形頂點公式即可得出函數的最大值，即未知數 x 為 8 時，$\triangle PQU$ 有最大面積 12。若無代數，這個幾何問題的處理方法是否會很棘手呢？

從上面的幾個例子讓我們瞭解到用代數來解題的重要性，瞭解如何使用代數來解決四則應用問題或生活情境中的數學問題，也約略的看到用代數可做為推理與證明工具以及可用來解幾何問題。如對照算術解法，就感受到算術的難而代數的易或算術的不能而代數的能。用代數的解題過程是先引進文字符號代表未知數，再依據題意列出關係式（可能是方程式、不等式或函數等），此關係式可能還需要用到一般化的公式（如前例幾何問題中的正三角形的高及面積公式），最後再利用關係式的不同類型的運算法則求出未知數的數值。從代數解法中，我們也瞭解到在解題過程中，理解代數概念、熟練代數運算與其性質及解題的各種方法是解題成功的關鍵。

參、代數重要性

代數挾符號優勢，站在算術上大放異彩，成算術未竟之事。代數之所以重要乃是能使用文字符號與運算來進行解題並有固定的解題步驟來依循，而更重要的是代數思維，可以將算術一般化、能進行推理與證明、能尋找變數間的關係以及描述函數關係的模式。本節即以代數解法使解題具有優勢、代數能表示出一般化的形式以及代數能支援其他數學領域等要項來說明代數在數學上的重要性。

一、代數解法使解題具有優勢

用代數進行解題可經由設未知數、列式、求未知數這樣的程序來得到問題的解答。所以代數解法是簡潔的、有一般性。對照算術，代數解法因程序化而易於遵循；算術解法則不然，它是隨著問題的類型而定的，沒有統一的步驟。另外，代數因有文字符號的使用，順著題意就可直接將數學問題簡明的表達出來，讓列式有跡可循，而算術解法則需要對於給定問題的已知數據及所給條件先做綜合歸納，因而增加列式的困難度。尤其是在代數解法中若要用到多元或多次的方程式求解，改用算術解法求解，困難度就更高了。因此，相較於算術解法，代數解法易於用來解決複雜的問題。

二、代數能表示出一般化的形式

在算術裡只有數，而運算的對象也只能是數，所以無法進一步表達一般化的結果。在代數裡，因有了文字符號代表數，就能藉助符號對數的已知規律、規則及運算性質進行一般化，也就是歸納出已知數值的關係，用符號形式表達出。因此代數可將算術一般化，更易於表達和通用，有助於解題、進行抽象思考與推理證明。例如，觀察下列圖形的規律(洪有情，2017)：

從圖形中，我們發現的規律是後面圖形的圓圈數比前面相鄰的多 3。在算術裡，我們只能對特定的圖形說出它的圓圈數，如第 4 個圖形有 10 個圓圈，但在代數裡，就可用文字符號將圖形圓圈數用一般化表示，即第 n 個圖形有$(3n-2)$個圓圈，而 n 為任意正整數。若問第 100 個圖形有多少個圓圈，只要將$n=100$代入$(3n-2)$中計算後即可得知，而不需先知道第 99 個圖形的圓圈數。又如大家所熟悉的費布納西（Fibonacci）數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ,…，即第 1 項是 1、第 2 項是 1，從第 3 項開始，後面的項是它前兩項之和。如果我們用文字符號a_n表示第n項，則費布納西數列可寫成$a_1=1$，$a_2=1$且$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，n 為任意正整數。此種寫法就是費布納西數列關係式的一般化表示，它是二階遞迴數列。有了這種一般化表示，我們可進一步推導出（例如利用特徵方程）$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ 是第 n 項的一般化表示。洪有情(2017)也指出一般化的好處讓我們不需再一一討論特定的一元一次方程式如 $2x+5=0$ 之類的解，我們只需討論一般式$ax+b=0$的解即可。同樣地，我們也可用一元二次方程式的一般式$ax^2+bx+c=0$導出其解$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$(稱為公式解)。因此，對特定的一元二次方程式求解時，如 $3x^2+2x-1=0$，只要以 $a=3$，$b=2$，$c=-1$ 代入公式解中即可算出答案。

另外，將算術一般化後，我們就可用代數來推理與證明有關數學的一些關係或性質，這是算術所不能及的。例如有了奇數和偶數的一般式，我們就能證明任兩個偶數的和仍為偶數，但任兩個奇數的和就不再是奇數了。證明如下：

1. 若甲、乙皆為偶數，則可設甲$=2m$，乙$=2n$（m, n 為整數）
   因此，甲+乙$=2m+2n=2(m+n)$，可知甲、乙之和為偶數。
2. 若甲、乙皆為奇數，則可設甲$=2m+1$，乙$=2n+1$（m, n 為整數）
   因此，甲+乙$=(2m+1)+(2n+1)=2(m+n+1)$，可知甲、乙之和為偶數。

三、代數能支援其他數學領域

符號的使用，對數學而言是一件大事，而符號體系的增長也促進了其他數學概念的發展，尤以函數概念最為顯著。函數通常用來表達變化，涉及尋找適合的模式來描述變化的關係。簡單來說，函數是用來表示兩個變量或兩個變數間的關係；其定義為：設 x 和 y 為兩個變動的量，若對任意給定的一個變數 x 值都恰有一個變數 y 值與它對應，這種特殊的對應關係，稱為函數，此時稱 y 是 x 的函數，y 值是隨著 x 值而確定，稱 x 為自變數、y 為應變數。我們通常用 $f, g, h, \varphi, \psi, \tau, \sigma$ 等單一字母來代表一個函數。若 y 是 x 的函數，可表示為 $y=f(x)$。除此之外，函數也有其它表示方式，如 $y=x^2$ 也可記為 $y=f(x)=x^2$，或 $f(x)=x^2$，或 $f:x\to x^2$ 等等。早期的

函數概念是一種輸入－輸出的程序性概念(Kieran, 1992)，文字符號使得函數中應變數與自變數的關係能被具體的表示出來，函數概念因而提升到結構化層次。

還有，文字符號的引入加上笛卡兒坐標系的創立，使得方程式及函數都能與幾何圖形連結，而在坐標平面或坐標空間有了對應的圖形。例如：一次函數 $y=ax+b$ 在坐標平面上的圖形為一條直線，二次函數 $y= ax^2+bx+c$ 的圖形為一拋物線，方程式 $x^2+y^2 = r^2$ 的圖形為一圓（圓心為原點、半徑為 r）等等。有了方程式與圖形的連結，使得純幾何的問題可以用解析幾何來處理而變得容易多了，例如我們可以透過坐標平面點的坐標與直線方程式，求出已知點到已知線的距離（定點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $ax+by+c=0$（其中 $a^2+b^2 \neq 0$）的距離為 $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$）。

肆、結語

使用文字符號於數學中可謂代數的一大成就。而代數的興起也正是有了文字符號當利器，藉助其代表數的功能，記錄生活情境中的數學問題或關係以協助解決問題，另外還可探討變數之間的關係，這些新觀念都為算術注入了活水，也為我們在數學的學習上打開了新的一扇門。代數因使用文字符號表示數的概念而多了一些用途更有助於進行思考與探究。代數又因文字符號的助長使解題具有優勢並能協助解決幾何問題以及促進函數概念的發展，而符號又可用來表達一般化的結果並成為解題、推理與證明的重要工具。代數的引入為數學創造出很多的價值與應用，既是通往高深數學的橋樑又是生活與職場上不可或缺的解題與思考工具。

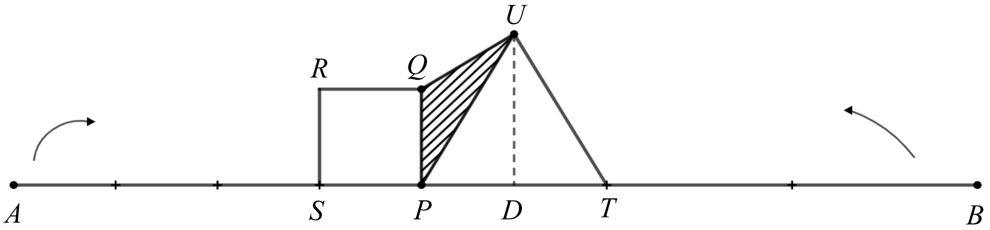
伍、參考文獻

洪有情(2017)。算術與代數。載於劉曼麗(主編)，**國小數學與其教材之知識補給站**，205-230。屏東市：國立屏東大學。

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

附錄：

（幾何問題）如圖，$\overline{AB}=48$，P 為 $\overline{AB}$ 上一點，將 $\overline{AP}$ 四等分，並將它圍成一正方形 $PQRS$；將 $\overline{PB}$ 三等分，並將它圍成一正三角形 PTU，問 P 點在何處時，$\triangle PQU$ 面積最大？



解：設 $\triangle PTU$ 的邊長為 x

則 $\overline{BP}=3x$，$\overline{AP}=48-3x$，正方形 $PQRS$ 之邊長為 $\dfrac{48-3x}{4}=12-\dfrac{3}{4}x$

$\triangle PTU$ 的高 $\overline{UD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{PT}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$\overline{PD}=\dfrac{1}{2}\overline{PT}=\dfrac{1}{2}x$

$\triangle PDU$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\triangle PTU$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=\dfrac{\sqrt{3}}{8}x^2$

梯形 $PQUD$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\left(\overline{PQ}+\overline{UD}\right)\times\overline{PD}$

$$=\frac{1}{2}\left(12-\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\times\frac{1}{2}x=3x+\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{3}{16}\right)x^2$$

$\triangle PQU$ 面積 = 梯形 $PQUD$ 面積 $-\triangle PDU$ 面積

$$=\left(3x+\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{3}{16}\right)x^2\right)-\frac{\sqrt{3}}{8}x^2=-\frac{3}{16}x^2+3x$$

上式為二次函數，利用配方法或代二次函數圖形頂點公式，可得到

當 $x=8$時，有最大值 12

因此當 P 點在 $\overline{AB}$ 的中點時，$\triangle PQU$有最大面積 12