

83 年臺灣省立高中聯合招生考試 數學科試題評析

林炎全
臺灣省中等學校教師研習會

一、引 言

儘管教育的理想要排斥升學主義，教育主管們力事扭轉考試領導教學的現象，但誰也無法否認升學考試對中學教學的影響力，只要有升學競爭，這種影響力就會存在，短期之內，我們的教育制度無論怎麼改革，升學競爭仍將繼續影響中學的教學，但是我們也不必先入為主認定這種影響必然是負面的，透過高水準的命題過程，使考題呈現活潑思考，讓學生發揮創意；則能帶動學校的教學，走向理解啟發，創造思考，如此，升學考試就能對教學產生正面的影響。此外，升學考試以篩選適於升學的學生為主要目的，試題的鑑別功能也是很重要的。

臺灣省高中聯合招生考試影響的層面既廣且深，一方面臺灣省和高雄市共用考題，參予的學生多；另一方面，許多要升學的國中學生，都是以升高中為第一個選擇，其次是五專，再次是高職。所以高中的升學考試較受關注。本文將對今年度的臺灣省高中聯招考試數學科試題進行分析與批判，主要的目的在拋磚引玉，希望透過廣泛的討論，能使聯招的命題水準不斷提高；使升學考試能對國中的數學科教學產生前述的正面影響。

二、逐題分析

今年臺灣省高中聯招考試數學科試題（見附件）分為三部分：選擇題（30分）、填充題（30分）和綜合題（60分）。首先我們就各部分逐題分析如下：

1. 選擇題部分

選擇有六題，每題五分。第1題是絕對值的概念及數的加減。這題很容易，可以說是基本概念的直接應用，是基本分數題。第2題屬於數值三角形，要學生根據所給的直角三角形，判斷其中一個銳角的正切（ $\tan$ ）值之範圍。如果題目直接告訴學生用直尺或圓規量，就變得單純又容易，沒有這些說明使這個問題顯得渾沌不明。數學習慣上，圖形可以用來顯示次序，如直線上一點在另一點的上方、下方等等；或位置，如點是否

在線上，點在圓的內部或外部等等。但是線的長短，角、面積和體積的大小等，則必須在題目中說明或在圖上附註；除此之外，只能憑數學知識判斷。例如因 C 介於 A, B 之間而判斷 $AB > AC$ 。不能因為圖上一線段是另一段的兩倍長，就做數學認定前者是後者的兩倍，而據以推論。美國 GRE 考試，數學部分的考題，就有這種聲明。這種不成文的數學常規，雖不一定有絕對的約束力，但如高中聯招這樣重大的考試，出這種易引致爭論的題目，總是不宜。也有參予閱卷老師認為學生使用的圓規精確度不一，得出的答案有兩種（註一）。第 3 題是等比數列與乘方的綜合題。對於概念清楚的考生，所要做的只有判斷 3 的幾次方大於 100，對於概念不清楚的考生，也可以逐項列出判斷。這樣雖然不一定是命題者所預期的方式，仍然能夠得分。第 4 題是關於二次函數的概念。最好的作法是從函數圖形的性質著手，不必計算就能看出答案。對於平方的概念，清楚的考生只要比較 $|83 - 83|$ ， $|-83 - 83|$ ， $|1994 - 83|$ 以及 $|-1994 - 83|$ 的大小就能找到答案。最辛苦的方法是算出各函數值，再比較大小。第五題是標準分解式的應用；直接就各個 b 算 (a, b) 所花的功夫也差不多。筆者不知道命題先生的預期；以過程評價，用標準分解式來處理，應得較高的評等。第 6 題是關於二元一次方程式及不等式的考題。選項各點都不是固定的點，它們的座標都含有不定元。雖然課本上有類似的例題，但選項(D)頗具挑戰性，它使問題的難度加深。筆者大膽懷疑這一題答對的考生，是根據試題的說明把選項(D)排除，不一定能知道這點與所給的直線之關係。

2. 填充題部分

填充題計六題，每題五分。第 1 題是分配律的應用，重複使用分配律兩次，很快就能找到答案。直接乘開再做加減運算，也可以辛苦地找到答案。但時間所耗不貲，頗不經濟。第 2 題係加成與折扣的百分比計算。它的原理並不難，但問題稍有轉折，並不是直接代公式就能解決。一般中等程度的考生，只要臨場不亂，應能得分。第 3 題是平方數的判斷。這個題目的敘述，可能有語意上的含混。“文華要將大小相同正方形磁磚 2000 塊，不經切割且無破損，鋪成一個最大正方形區域，那麼鋪成之後還剩幾塊磁磚？”題目內容好像要求把 2000 塊磁磚用完。如果做此解釋，則答案有兩個可能：(1) 不經過切割且無破損，不可能用 2000 塊正方形磁磚鋪出一塊正方形區域；所以全部磁磚都剩下來。(2) 如果順著題意，鋪成之後磁磚就全部用完，沒有剩下來。但是從問題最後所要的答案來推測，命題先生似乎不做此想。筆者在此試擬本題的內容：“文華有大小相同正方形磁磚 2000 塊，不經切割且無破損，鋪一塊正方形區域後，最少剩幾塊磁磚？”。第 4 題是一元二次方程式的問題，但是題目本身卻看不到一元二次方程式的影

子。解法可令 b/a 為 x ，則 a/b 為 $1/x$ ，代入後將原式化為 x 的二次方程式再解之；也可以將兩邊乘以 ab ，再將它視為 a 的二次方程式（ b 視為常數）或 b 的二次方程式（ a 視為常數）解之。一般程度的考生應能得分，但是心情緊張或粗心大意的考生可能會疏於注意 $a > b$ 的條件而列出兩個答案。第5題所涉及的單元是長方形的性質，包括面積和對角線的性質。直接應用這些性質就能算出答案，這一題應屬簡單。第6題接續第5題的圖形，與第5題比較，這題顯然較難，可以循下列幾個方向思索：(1) 做輔助線 MP ，再用 $\triangle BMP + \triangle CMP = \triangle BMC$ 的關係；(2) 考慮特殊情形 $P=C$ 時， $PR=0$ ， PQ 就是 $\triangle BMC$ 過 C 的高。不論用哪種方式思考，都得先算出對角線的長，做輔助線是一般學生較感困難的，以特殊情形作答是冒險的，除非有敏銳且正確的判斷能力，才能運作無誤；否則常常會掉進陷阱。

3. 綜合題部分

綜合題計六大題，占60分；各題配分不一。第1題是關於圓的切線之證明題。直線是否為圓的切線，證明常採取圓心與直線之距離或直線與圓交點的個數；平面幾何裡最常用的判斷方法是直線是否垂直過交點的半徑（如果直線與圓不相交，自然就不是切線）。所以做輔助線半徑 OB 是很自然的。這一題應可劃歸中等難度。第2題在國中數學課程中似乎找不到對應的單元。從國中現行教科書的內容推論，可行的做法是繪出聯立不等式 $x \geq 3$ ， $y \geq 15$ ， $4000x + 700y \leq 30000$ 的圖形，再算出圖形中格子點（即座標為整數的點）的個數。這種方法對於數據不大的問題應是可行。但是第三個不等式的數據不小，繪圖時只能取很小的單位長，如此答案的正確性需視繪圖的精確度而定，而非數學方法的問題。以代數方法，利用整數的分散性進行窮舉也可以做。但是這種方法離現行課程稍遠，涉及排列組合的加法原理。若考生沒有預識能力，以 y 進行窮舉，將會做得很辛苦。總之，筆者認為這題屬高難度，數學能力特優的考生才能得分。第3題是測試綜合能力的好題目。考生必須把兩張表中未被墨汁塗污的數據，對照綜合分析，才能求出答案。它所使用的數學方法並不難，需借助於聯想或靈感的不多。中上程度的考生應可得分。第4題屬數值三角的問題；也涉及三角形的一些基本性質，如內角和等於180度，直角三角形兩銳角互餘等。(1)、(2)兩小題比較容易；(3)涉及無理數的運算及特殊三角形（30-60-90）邊長之比，難度稍高。第5題是關於比例及相似三角形，另加少許代數運算。但是本題的附圖可能引起困擾，因為圖中直線 BP ， CS 的交點與 AD 邊尚有一段距離。依據這個圖，恐難算出 AB 的最小值。第6題是這份考卷唯一的作圖題。組合等長線段、等角以及平行線等基本作圖，就可以完成。未能確實把握三角形相

似條件的考生，可能無從下手。

三、綜合評論

根據以上的逐題分析，筆者對今年臺灣省高中聯招數學科考題，有以下幾點評論：

1. 試題鑑別度高：入學考試的主要目的在篩選學生，考題的鑑別功能是重要的考量因素。綜觀這份試卷，各種難度的試題適度地分配其間。較容易的試題如選擇第 1、2 題，填充第 1、5 題，綜合第 4 題的(1)共約占 20 多分；較難的題目如綜合 2、3 題也約占 20 多分，其餘占分也是均勻分配在各階難度的試題。考生的數學程度，應能適度地表達在其考試成績。
2. 試題分佈均勻：受限於題目的形式和考試的時間，不可能出很多題目來涵蓋國中三年數學課程的每一細部。這份考卷共計 18 題，它們涵蓋了國中數學課程絕大部分的重要單元。一百二十分總分之中，幾何約占五十多分，代數約占六十多分。有些題目是幾何概念與代數計算的綜合。這樣的分配，大致上與幾何及代數在國中數學課程中，所占的份量比例相當。
3. 試題內容活潑：這些試題，都不需要很難的技巧就能解決；但是也很少有直接套用公式就能解開。大多需要經過幾個轉折，活用常見的各種公式、性質或方法，所以對數學有整體認識，融會貫通的考生能得較高的成績。死記公式硬背解題技巧的考生，就施展不開，專研考古題，努力做題型分析只得事倍功半。這樣的考題頗能引導學校的數學教學，走向正確的方向。
4. 試題的配分與解題所耗事功不一致：選擇題和填充題每題都是五分。但是其中有容易者如選數第 1、2 題或填充第 5 題，幾乎不需要做什麼計算或推理，就能解決；也有繁難如選擇第 4 題或填充第 6 題，與前述那些容易的題目比較，綜合題的配分也大多相對偏低。配分與事功不一致，可能會影響整份試卷的鑑別功能。
5. 部份試題的敘述不明確：如逐題分析所言，部份試題如選擇第 2 題、填充第 3 題以及綜合第 5 題。選擇第 2 題和填充第 5 題，對圖形的引用態度不一；填充第 3 題則問題敘述可能有不同的解釋。命題的老師，以專業素養，可能對題目敘述前後對照或圖文對照，而將含意做必要且合適的延伸，但是國中畢業的考生可能大部分還欠缺這種能力。

四、結論與建議

基於以上討論，今年臺灣省高中聯招考數學科試題，雖然有些許小瑕疵，大體而言，是一份高水準的試題。考試之後，曾有老師在電視上評論今年的考題，認為要面對這種考題，課本是不夠的。因而有人擔心這種評論會誤導學生投入補習班（註二）。筆者無法得知在電視上做評論的老師是如何教學。就整份試卷而言，如果能把課本內容融會貫通，應能得90分以上。要得滿分，當然得加一點天份。如果只是活剝生吞，死記硬背，即使課本之外再加上參考書，甚至補習班，仍然只能得些許的分數。馴獸師式的教學是不行的。這份試卷對國中數學教學的正面影響，勝過幾百場的宣導和研習！在升學考試競爭的情況一時還無法改變的前提下，筆者藉此再次呼籲教育主管及參與升學考試命題的老師們，善用考試對教學的影響力，使它發揮正面的功能。

其次，我們對於升學考試的命題，提出以下幾點建議：

1. 選擇或填充等封閉式測驗題，只能看到考生給出的答案，而無法看到其思索的方式和歷程。對於同一個問題，不同的處理方式可以顯示不同的認知水準，應給予相稱的評價。封閉式的考題顯然不具備這種功能，只需直覺反應，不涉及方法選擇或前景判斷的試題，才適合採取這種測驗方式。換句話說，基本定義和直接代公式就得到結果的問題，才適於封閉式測驗題。
2. 相對的，我們建議計算和填充等開放式的測驗題的評分，應有其必要的彈性。局部給分或階段性給分，已是目前的共識。筆者在此提出另一種彈性——針對不同的思索方式或歷程，給予不同的評分。這當然會增加閱卷工作的麻煩，但為增加考試的評鑑功能，這是值得嘗試的方向。
3. 隨著第1項，我們建議封閉式測驗題應多出幾題，但每題的配分減少，因為這種考題都是較容易的，每題配分自然不能太高。題目多，才能對國中三年的數學課程，做比較細部的涵蓋，使各重要單元均被納入，而無偏重某部份的現象。
4. 聯招考試，參加的考生品級不一。問題內容的文字敘述以及圖形的對照，應力求簡明確定。但是必要的說明還是不能省略，以免一題多義，讓考生捉摸猜測，招致困擾。
5. 風聞聯招考試的形式，除了國文作文，將改變為全部是選擇題。筆者不願意相信這是真的，但是要在此呼籲所有數學界同好，共同來預防這種事情的發生。這完全與“對學校教學有正面影響”的期望背道而馳。同時筆者也建議有這種意圖的有權人

士，翻讀大學聯考從電腦閱卷到現在的變革歷程，慎重將事。

註一：聯合報 83.7.14 中部版。

註二：中國時報 83.7.11，11 版時論廣場。

參考資料

國民中學數學一～四冊，選修數學上、下冊。

附 件

數學科試題

第一部分：選擇題（每題 5 分，共 30 分）

說明：本部分共有 6 題，每題都有(A)、(B)、(C)、(D)四個選題，其中只有一個選項是正確答案。

1. $|5-3| - |5-8| + |-2-3|$ 的值是多少？

(A) -6 (B) 0 (C) 4 (D) 10

2. 根據圖(-)，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，設 $m = \tan A$ ，判斷下列那一個是 m 正確的範圍？

(A) $0 < m < 1$ (B) $1 < m < 2$ (C) $2 < m < 3$ (D) $m > 3$

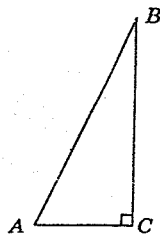


圖 (-)

3. 等比數列 $100, 100 \times \frac{1}{3}, 100 \times \frac{1}{9}, \dots$ ，從第幾項開始就會小於 1？

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

4. 設 $f(x) = 1994(x-83)^2 + 709$ ，下列那一個函數值最大？

(A) $f(83)$ (B) $f(-83)$ (C) $f(1994)$ (D) $f(-1994)$

5. 設 a, b 為正整數， $a = 3 \times 5^2 \times 7^3$ ，且最大公因數 $(a, b) = 35$ ， b 可以是下列那一個數？

(A) 65 (B) 70 (C) 105 (D) 175

6. 在坐標平面上，下列那一個點在直線 $2x - y + 2 = 0$ 的下方？

(A) $(x, 2x+1)$ (B) $(x, 2x+2)$ (C) $(x, 2x+3)$ (D) $(2x, 4x+2)$

第二部分：填充題（每題5分，共30分）

1. 求 $1296 \times 0.58 - 196 \times 0.58 + 1296 \times 0.42 - 196 \times 0.42$ 的值。_____。
2. 益台百貨公司將貨品的成本加4成作為定價。某次年終大拍賣，該公司希望將成本100元的玩具，依定價打折售出還賺12元。那麼該打幾折？_____折。
3. 文華要將大小相同的正方形磁磚2000塊，不經切割且無破損，鋪成一個最大的正方形區域。那麼鋪成後還剩幾塊磁磚？_____塊。
4. 設 $a > b$ ，且 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 3$ ，求 $\frac{b}{a}$ 的值。_____。
5. 如圖(二)，在矩形 $ABCD$ 中，兩對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 相交於 M 。設 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 8$ ，求 $\triangle AMD$ 的面積。_____。
6. 承接第5題， P 為 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{PQ}$ 垂直 $\overline{BD}$ 於 Q ， $\overline{PR}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於 R 。求 $\overline{PQ} + \overline{PR}$ 的值。_____。

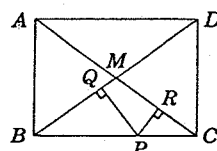


圖 (二)

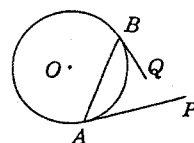


圖 (三)

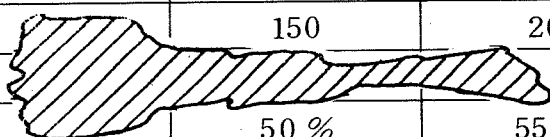
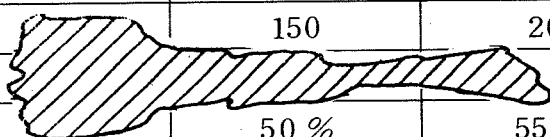
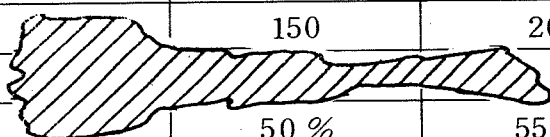
第三部分：綜合題（六大題，共60分）

1. 如圖(三)， $\overline{AB}$ 是圓 O 的一弦， $\overline{PA}$ 切圓 O 於 A ，且 $\angle PAB = \angle QBA$ 。試證： $\overline{QB}$ 是圓 O 的切線。
(10分)
2. 台益公司將舉辦模彩活動，打算以30000元的預算購買首獎與貳獎禮物各若干份。首獎微波爐每台4000元，貳獎烤麵包機每台700元。在不超過預算的情形下，首獎至少3份，貳獎至少15份，那麼購買禮物的方法有幾種？(12分)(須寫出計算過程)
3. 表(一)、(二)為武陵籃球隊參加三場比賽的投籃、進籃及命中率統計表，其中斜線部分被墨水所塗污。
問：(1) 武陵隊第二場的命中率是多少？_____ %。(5分)
(2) 武陵隊第一場與第三場獲勝，那麼獲勝這兩場的總命中率是多少？_____ %。(5分)

表 (一)

場次	第一場	第二場	第三場
投籃次數	100		
進籃次數			
命中率	52 %		70 %

表 (二)

場次	第一場	第一、二場	第一、二、三場
總投籃次數		150	200
總進籃次數			
總命中率		50 %	55 %

4. 如圖(四)，在 $\triangle ABC$ 中，兩高 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 相交於 H ，

且 $\angle BAC = 75^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$

- (1) 求 $\angle HBD$ 等於多少度？度。(2分)
- (2) 試證： $\triangle BDH \cong \triangle ADC$ 。(5分)
- (3) 設 $\overline{BC} = 5$ ，求 $\overline{AD}$ 的長。(5分)(須寫出計算過程)

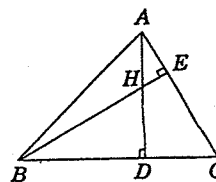


圖 (四)

5. 如圖(五)， $ABCD$ 為長方形紙板，長(即 $\overline{BC}$)60公分， $PQRS$ 為邊長20公分的正方形。文心想沿 $\overline{BP}$ 、 $\overline{CS}$ 的方向剪出一個三角形，那麼此紙板的寬(即 $\overline{AB}$)至少需要多少公分？(8分)(須寫出計算過程)

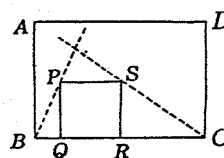


圖 (五)

6. 如圖(六)， $ABCD$ 為一梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{QR}$ 為一已知線段，試作梯形 $PQRS$ 使與梯形 $ABCD$ 相似，且 $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ 。(8分)
- (寫出作法並作圖，不必證明)

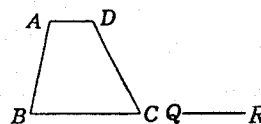


圖 (六)