1994年第35屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析

中華民國參加第35屆國際數學奧林匹亞競賽代表團
陳昭地*林哲雄**葉永南***柳賢+ 賴漢卿++ 共同執筆
*國立臺灣師範大學數學系所
**國立清華大學數學系所
***中央研究院數學研究所
+ 國立高雄師範大學理學院
++ 私立東海大學數學系

一、前　　言

國際數學奧林匹亞競賽（IMO）試題源自主辦國以外，各參與國在接受邀請繳交試題期限內提交0～6道題（陳昭地，民81年、民82年），再由主辦國試題委員會研究選出24～30題預選題，分屬代數、幾何、組合數學、數論等不同領域，經由各國領隊組成之主試委員會修訂票決選出6道題，依主題內容及易中難層次安排每天3道題的二份試題。本文的目的在於提出今年七月我國代表團所翻譯成的中文版試題，並針對這6題給出參考解答，評析解題重點，且就我國六位代表答題概況及本屆69個參與國385位學生代表得分統計加以比較評析，以供國內相關學者專家數學教師等輔導數學資優生之研究應用參考。

二、第35屆國際數學奧林匹亞競試試題

Version：Chinese　CHT第一天　1994年7月13日

1. 設m，n爲正整數$a_1, a_2, \cdots, a_m$爲$\{1, 2, \cdots, n\}$中的相異元素。如果$a_i+a_j \le n$，$1 \le i \le j \le m$，就有某個k，$1 \le k \le m$，使得$a_i + a_j = a_k$

   試證：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} \ge \dfrac{n+1}{2}$。

2. 等腰三角形ABC中，$AB=AC$。並設

   （Ⅰ）M爲線段BC的中點，O爲直線AM上的一點，且OB與AB互相垂直；

   （Ⅱ）Q爲線段BC上異於B，C的任一點；

(Ⅲ) E在直線AB上，F在直線AC上，且E，Q，F為共線的相異三點。

試證：OQ與EF互相垂直的充要條件為

$$QE=QF$$

3. 對於任意正整數k，$f(k)$表示集合$\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}$內的每一個元素用二進位表示後恰有3個1的元素之個數。

(a) 試證明對於每一正整數m，至少存在一個正整數k，使得$f(k)=m$。

(b) 試確定所有正整數m：對這樣的m恰有一個k使得$f(k)=m$。

每題7分，考試時間4.5小時

Version：Chinese　CHT第二天　1994年7月14日

4. 試求出所有有序正整數對(m, n)使得$\dfrac{n^3+1}{mn-1}$是一個正整數。

5. 設S為所有大於-1的實數所成的集合。試求出所有滿足下列兩個條件的函數$f: S\to S$。

(Ⅰ) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ 對S中所有x與y都成立；

(Ⅱ) $\dfrac{f(x)}{x}$在$-1<x<0$與$0<x$兩區間上都是嚴格遞增。

6. 試證存在一個滿足下列性質的正整數集合A：

對任意由無限多個質數所形成的集合S，存在$k\geq 2$與兩個正整數$m\in A$及$n\notin A$，m和n都是S中k個相異元素的乘積。

每題7分，考試時間4.5小時

三、第35屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

根據主辦單位確認公布之第三十五屆69個參與國共計385位競賽代表成績，參考前屆的分析方式（陳昭地，民國81年），列表如下，以供試題解答分析之參考。

表 1 第 35 屆 IMO全部參與競試學生之成績統計表
總人數 385 人

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	2.56	5.00	3.93	3.36	3.22	2.09	20.17
得分率	0.37	0.71	0.56	0.48	0.46	0.30	0.48
標準差	2.88	2.72	3.03	2.59	2.75	2.89	11.59
變異係數	113 %	184 %	130 %	130 %	117 %	72 %	57 %
難度指數	0.45	0.69	0.55	0.51	0.45	0.37	
鑑別指數	0.73	0.61	0.81	0.67	0.71	0.66	

表 2 金牌、銀牌、銅牌及未得獎牌分組成績統計表

表 2(a) 金牌獎（人數 30；成績≥ 40）

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	6.97	6.97	6.97	6.87	6.93	6.93	41.63
得分率	1.00	1.00	1.00	0.98	0.99	0.99	0.99
標準差	0.18	0.18	0.18	0.43	0.25	0.37	0.67
變異係數	3 %	3 %	3 %	6 %	4 %	5 %	2 %

表 2(b) 銀牌獎（人數 64； 40 >成績≥ 30）

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	5.22	6.94	6.62	5.73	5.30	4.08	33.89
得分率	0.75	0.99	0.95	0.82	0.76	0.58	0.81
標準差	2.37	0.39	1.03	2.07	2.16	3.11	2.62
變異係數	45 %	6 %	16 %	36 %	41 %	76 %	8 %

表 2(c) 銅牌獎（人數 98； 30 >成績≥ 19）

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	2.93	5.76	4.95	3.82	4.02	2.33	23.80
得分率	0.42	0.82	0.71	0.55	0.57	0.33	0.57
標準差	2.89	2.19	2.66	2.44	2.40	2.85	3.09
變異係數	99 %	38 %	54 %	64 %	60 %	122 %	13 %

表 2(d) 未得獎牌者（人數 193；成績< 19）

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	0.81	3.67	2.05	1.79	1.54	0.56	10.44
得分率	0.16	0.52	0.29	0.26	0.22	0.08	0.25
標準差	1.41	2.91	2.54	1.60	1.98	1.45	4.97
變異係數	175 %	79 %	124 %	89 %	158 %	256 %	48 %

表 3　1994 年第 35 屆國際數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及成績統計表

編號＼題次	1	2	3	4	5	6	總　分	獎　牌
CHT1	7	7	7	2	3	7	33	銀
CHT2	2	7	7	1	6	7	30	銀
CHT3	0	7	5	1	5	0	18*	榮譽獎
CHT4	3	7	7	7	6	1	31	銀
CHT5	3	7	7	7	3	7	34	銀
CHT6	0	7	7	3	0	7	24	銅
總　分	15	42	40	21	23	29	170	4 銀 1 銅 1 榮譽獎

* 以一分之差未能獲得獎牌而僅得榮譽獎，殊爲可惜。

表 4　1994 年第 35 屆國際數學奧林匹亞競試各題得分成績人數統計表

得分＼題次	1	2	3	4	5	6
0	151	52	104	52	96	210
1	60	25	30	66	53	35
2	33	12	18	72	40	30
3	15	26	19	42	29	7
4	10	17	11	21	22	4
5	13	14	19	20	23	8
6	11	12	36	11	38	3
7	92	227	148	101	84	88
總　人　數	385	385	385	385	385	385

表 5 1994 年第 35 屆 IMO前十名國家成績統計表

名次	國家＼題次	1		2		3		4		5		6		總計	
		總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均	總分	平均
1	美國	42	7.00	42	7.00	42	7.00	42	7.00	42	7.00	42	7.00	252	42.00
2	中國大陸	42	7.00	42	7.00	42	7.00	42	7.00	40	6.67	21	3.50	229	38.17
3	俄羅斯	29	4.83	42	7.00	40	6.67	42	7.00	40	6.67	31	5.17	224	37.33
4	保加利亞	36	6.00	42	7.00	42	7.00	34	5.67	41	6.83	28	4.67	223	37.17
5	匈牙利	35	5.83	42	7.00	42	7.00	37	6.17	31	5.17	34	5.67	221	36.83
6	越南	31	5.17	42	7.00	34	5.67	39	6.50	38	6.33	23	3.83	207	34.50
7	英國	36	6.00	40	6.67	37	6.17	28	4.67	35	5.83	30	5.00	206	34.33
8	伊朗	27	4.50	40	6.67	35	5.83	35	5.83	36	6.00	30	5.00	203	33.83
9	羅馬尼亞	18	3.00	42	7.00	37	6.17	41	6.83	33	5.50	27	4.50	198	33.00
10	日本	21	3.50	42	7.00	42	7.00	34	5.67	26	4.33	15	2.50	180	30.00
平均（60人）*		5.28		6.93		6.55		6.23		6.03		4.68		35.72	
總平均（385人）*		2.56		5.00		3.93		3.36		3.22		2.09		20.17	

註：1. *從平均得分來看，無論從前十名國家 60 位代表或全體參賽國家 385 位代表，可排出本屆易到難的題序爲 2，3，4，5，1，6，第 6 道題難度最高，而第 2 道題最簡易。

2. 其餘排名第 11 ～ 20 的國家如下（我國排名第 13 名）：

德國（175 分）、澳大利亞（173 分）、中華民國（170 分）、波蘭（170 分）、南韓（170 分）

印度（168 分）、烏克蘭（163 分）、香港（162 分）、法國（161 分）、阿根廷（159 分）

四、試題詳解及評析

問題1（法國）

【證】 可設 $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$

欲證：$a_1 + a_m \geqslant n+1$；$a_2 + a_{m-1} \geqslant n+1$，…；$a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$，$1 \leq i \leq m$；用反證法：

若有某一個 $1 \leq i \leq m$ 使 $a_i + a_{m+1-i} \leq n$，

則 $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \cdots < a_i + a_{m+1-i} \leq n$

於是 i 個數：$a_i + a_m$，$a_i + a_{m-1}$，…，$a_i + a_{m+1-i}$ 兩兩相異

且由題目假設條件它們都是等於原先比 a_i 大的某一個項 a_k 相等

但比 a_i 大的僅有 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$ 這（$i-1$）個項，此為矛盾。

於是得證：$a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$，$1 \leq i \leq m$。

應用 $a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$，$1 \leq i \leq m$ 得：

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) &= (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \cdots + (a_i + a_{m+1-i}) + \cdots \\ &\quad + (a_m + a_1) \\ &\geqslant m(n+1) \end{aligned}$$

故得證：$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \dfrac{n+1}{2}$

評析：

1. 本題為法國所設計，為一代數不等式的問題，原預估為第一天3道題中之最簡易題，其結果卻有192位（50%）得0分，而有92位（24%）得滿分，平均值2.56分，得分率0.37，成為第一天試題中之最難題；不過本題之鑑別指數0.73頗具鑑別力。

2. 解題重點：

(1) 充分掌握題目的條件：

① 當 $1 \in \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 時，則可知 $m = n$，而 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} = \dfrac{n+1}{2}$，不等式不證自明。

② 欲證之不等式左式為這 m 個數的算術平均數，可依大小排序而不影響原題意可用的條件。

(2) 窺出排序後，欲證得不等式之充要條件為 $a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$ 恒成立。

(3) 矛盾證法。

3. 討論：

(1) 本題條件之設計非常人工化，並不很自然，高中資優生不能太順利的了解題意。

(2) 本題涉及 m ，n 之自然數，很容易聯想到用數學歸納法去解題，結果卻徒勞無功碰一鼻子灰毫無成果。

(3) 我國六位學生代表只有陳和麟快速掌握解題線索，其解法跟參考解答很一致；其餘五位幾乎都不得其門而入或走入賊船，使得本題全隊只拿到15分，跟其他前十名國家相比，有明顯的差距，這題是使得我國今年無法進入前五名的關鍵題。

(4) 香港在這道題得到很出色的成績，在六道題中，這一題得到36分最高，這應是使香港本年得到個人與團體參賽來最佳成績的關鍵題。

問題2（亞美尼亞與澳大利亞）

【解】 （夏俊雄同學的證法）

$1°$ 先證明若 OQ 與 EF 互相垂直則 $\overline{QE}=\overline{QF}$

如圖 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{AM}$ 為中線，$\overline{OB}\perp\overline{AB}$ ，由等腰三角形的對稱性知 $\overline{OC}\perp\overline{AC}$ ，$\triangle OMB\cong\triangle OMC$

$\angle OCM=\angle OBM$

如圖 $\overline{OQ}\perp\overline{EF}$ ，連接 $\overline{OE}$ ，$\overline{OF}$

$\therefore \angle EBO=\angle OQE=90°$

$\therefore E$ ，B ，O ，Q 四點共圓。

故 $\angle QEO=\angle OBM$

又 $\angle OQF=90°=\angle OCF$

$\therefore O, Q, C, F$ 四點共圓

$\therefore \angle OFQ=\angle OCM\ (=\angle OBM)$

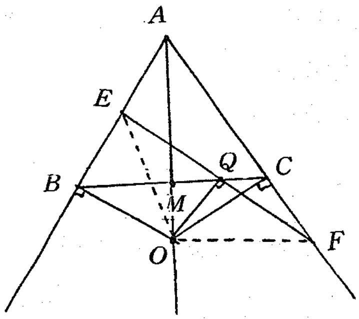
$\therefore \angle OFQ=\angle OEQ$

又 $\angle OQE=90°=\angle OQF$

$\overline{OQ}=\overline{OQ}$

$\therefore \triangle OQE\cong\triangle OQF$

故 $\overline{QE}=\overline{QF}$ 。



$2°$ 其次證明若 $\overline{QE}=\overline{QF}$ 則 $\overline{OQ}$ 與 $\overline{EF}$ 互相垂直

如右圖$\triangle ABC$中$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AM}$為中線，$\overline{QE}=\overline{QF}$

$\overline{OB}\perp\overline{AB}$同1.°的討論知

$\overline{OC}\perp\overline{AC}$，$\overline{OB}=\overline{OC}$

連接$\overline{OE}$，$\overline{OF}$，$\overline{OQ}$

過E點作平行$\overline{AC}$的直線

交$\overline{BC}$於Y點

$\therefore\angle QEY=\angle QFC$

又$\angle EQY=\angle FQC$（對頂角）

$\overline{QE}=\overline{QF}$

$\therefore\triangle YEQ\cong\triangle CFQ$

$\therefore\overline{EY}=\overline{CF}$

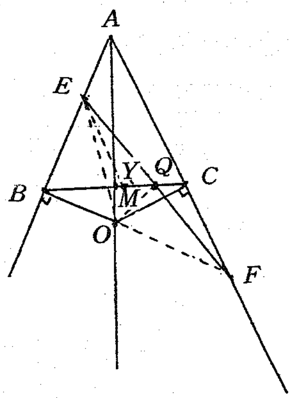
$\because\overline{EY}\parallel\overline{AC}$　$\therefore\angle EYB=\angle ACB=\angle ABC$

故$\triangle EBY$為等腰三角形　$\therefore\overline{BE}=\overline{EY}=\overline{CF}$

又$\angle EBO=90^\circ=\angle FCO$，$\overline{OB}=\overline{OC}$

$\therefore\triangle OBE\cong\triangle OCF$　$\therefore\overline{OE}=\overline{OF}$

$\because\triangle OEF$中，$\overline{OE}=\overline{OF}$，$Q$為$\overline{EF}$的中點　$\therefore\overline{OQ}\perp\overline{EF}$



評析：

1. 本題是結合亞美尼亞與澳大利亞原先設計的幾何題，預估為適中題，其結果為二天六道題中最簡易的題目，平均值5分，得分率0.71最高，得滿分的共計227位（59％）為六道題之冠，惟鑑別指數0.61應屬理想。

2. 解題重點：

(1) 等腰三角形中線性質；

(2) 四點共圓的條件；

(3) 全等三角形的條件；

(4) 綜合分析法。

3. 討論：

(1) 從表1中可知本題的變異係數最大，顯示各國參賽代表在解幾何題的差異性很大。

(2) 本題的解題知識工具僅涉及到國中三年級幾何教材範圍，若能冷靜分析題意，不難難創造出解題方法。

(3) 本題總共有十多個國家全隊都得滿分；我國六位參賽代表也不例外，黃暉娟同學使用解析幾何法解題，坐標設計得宜計算也就簡單；黃有章同學前半部使用解析幾何但坐標設計得有些麻煩；其餘三位同學也都很正確簡潔使用平面幾何法得到本題的完整證明。

問題 3（羅馬尼亞）

【解】 (a) 設 $g(k)$ 表示集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 內的每個元素用二進位表示恰有 3 個 1 的元素之個數；易知 $f(k)$ 和 $g(k)$ 隨著 k 的增加而遞增，且

$f(k) = g(2k) - g(k)$

於是

$$f(k+1) - f(k) = g(2k+2) - g(k+1) - (g(2k) - g(k))$$
$$= (g(2k+2) - g(2k)) - (g(k+1) - g(k))$$

由二進位表示法及 $g(k)$ 之意義知

$2k+2$ 在 $g(2k+2)$ 的計數中與 $k+1$ 在 $g(k+1)$ 的計數中，同時計在內或同時不計在內。

故知 $f(k+1) - f(k) = 1$ 或 0 完全決定於 $2k+1$ 在 $g(2k+1)$ 是計在內或不計在內，

綜合上述說明知 $f(k)$ 增加時不可能跳過任意正整數；另外，再注意

$$g(2^n) = g(2^n - 1) = {}_nC_3$$

因此 $f(2^n) = g(2^{n+1}) - g(2^n) = {}_{n+1}C_3 - {}_nC_3 = {}_nC_2$

得 $f(k)$ 隨著 k 的增大而遞增且沒有上界。

於是對每一個整數 m，總有一個正整數 k，使得 $f(k) = m$。

(b) 設 $f(k) = m$　恰有一解，則

$f(k+1) - f(k) = 1 = f(k) - f(k-1)$

而上左式成立 $\Longleftrightarrow$ $2k+1$ 算在 $g(2k+2)$ 的計數內 $\Longleftrightarrow$ k 的二進位表示法恰有 2 個 1。

同理，上面右式成立 $\Longleftrightarrow$ $(k-1)$ 的二進位表示法也恰有 2 個 1。

換言之 $f(k) = m$ 恰有一解 $\Longleftrightarrow$ k 與 $k-1$ 的二進位表示都恰有 2 個 1 $\Longleftrightarrow$ $k-1$ 的二進位最後一位數（個位數字）爲 1，而另一位數字 1 則出現在最後第二位（十位數字）以外的位數。

所以　$k = 2^n + 2$　其中　$n \geq 2$

此時 $f(k)=f(2^n+2)=g(2^{n+1}+4)-g(2^n+2)$

$=1+g(2^{n+1})-g(2^n)$

$=1+{}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}+1=\dfrac{n^2-n+2}{2}$

綜合以上之說明得 $f(k)=m$ 恰有一解的 m 值為

所有形如 ${}_nC_2+1=\dfrac{n^2-n+2}{2}$ 的正整數。

評析：

1. 本題為羅馬尼亞所設計，屬數論組合題，原先預估為難題，其結果仍然有148位（39％）得滿分，平均值3.93分，得分率0.56在六道題中第2高，而鑑別指數0.81最高。

問題4（澳大利亞）

【解】 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 為整數 $\Longleftrightarrow (mn-1)\mid(n^3+1)$

因 $(mn-1, m^3)=1$ （互質）

故 $(mn-1)\mid(n^3+1)\Longleftrightarrow m^3(n^3+1)$ 可被 $(mn-1)$ 整除

$\Longleftrightarrow (m^3n^3-1)+(m^3+1)$ 可被 $(mn-1)$ 整除

$\Longleftrightarrow (mn-1)\mid m^3+1$

所以，當正整數對 (m,n) 使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 為整數 $\Longleftrightarrow (n,m)$ 使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 為整數

當 $m=n$ 時，得 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=\dfrac{n^3+1}{n^2-1}=n+\dfrac{1}{n-1}$，故知 $\dfrac{n^3+1}{n^2-1}$ 為整數的充要

條件為 $\dfrac{1}{n-1}$ 是整數，亦即 $n=2$ 。

如此得到一個正整數對 $(2,2)$ 使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 為整數。

當 $m>n$ 時：若 $n=1$，則 $\dfrac{2}{m-1}$ 是整數 $\Longleftrightarrow m=2$ 或 3，得到數對 $(2,1)$，

$(3,1)$ 使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 都是整數。

若 $n \geqslant 2$，則因 $n^3+1 \equiv 1 \pmod{n}$，$mn-1 \equiv -1 \pmod{n}$ 得 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$

是整數 $\Longleftrightarrow$ 有一正整數 k 使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = kn-1$

此時　$kn-1 < \dfrac{n^3+1}{n^2-1} = n + \dfrac{1}{n-1}$

得　$(k-1)n < 1 + \dfrac{1}{n-1} \quad \Rightarrow \quad k=1$

所以，$n^3+1=(mn-1)(n-1)$

解得　$m = \dfrac{n^2+1}{n-1} = (n+1) + \dfrac{2}{n-1}$

而 m 爲正整數 $\Longleftrightarrow$ $(n-1)$ 爲正整數且 $(n-1) \mid 2$

$\Longleftrightarrow n=2$ 或 $3 \quad \Rightarrow \quad m=5$

故得 $(2,5)(3,5)$ 爲使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 是整數的數對；

綜合一開始之說明：正整數 (m,n) 使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 是整數 $\Longleftrightarrow$ (n,m) 使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$

是整數，故得 $(1,2)$，$(1,3)$，$(5,2)$，$(5,3)$ 也使 $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ 的值是整數

符合本問題的正整數對共有九組：$(2,2)$，$(2,1)$，$(1,2)$，$(3,1)$，$(1,3)$，$(2,5)$，$(5,2)$，$(3,5)$，$(5,3)$。

評析：

1. 本題爲澳大利亞所設計的簡易數論題，有101位（26％）得滿分，只有52位（14％）得0分；全體平均値3.36分，得分率0.48；鑑別指數0.67仍屬理想。

2. 解題重點：

(1) 從特例著手，如 $m=1,2,3,\cdots$ 決定符合條件的 n 值；得到 $(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,5)$，$(3,1)$，$(3,5)$，…等組解。

(2) 從特例中窺出解的特性：若 (m,n) 爲一解，則 (n,m) 亦爲一解？

(3) 利用 $(mn-1, m)=1$，$(mn-1, m^3)=1$ 等互質性質，說明解的對稱性。

(4) 設 $m=n$ 證出只有 $(2,2)$ 爲符合問題條件的數對。

(5) $\frac{n^3+1}{mn-1}$是整數的充要條件爲$\frac{n^3+1}{mn-1}=kn-1$其中k爲一個正整數。

3. 討論：

(1) 我國六位學生代表只有單中杰與黃有章二位得到滿分，其餘都僅得1～3分的部分分數，總共得到21分；跟前十名國家平均得分高達37.38分相距甚遠，與第一道題一樣，應爲我國此次競賽成績無法保持在前五名具關鍵性的另一道題。

(2) 本題給出正確的九組解答案始得1分；黃暉娟和夏俊雄都少得了1分，否則黃暉娟也能獲得銅牌獎了！眞可惜。

(3) 蘇柏青同學給出完整的九個解並用簡易的互質性質證得解的對稱性而得3分，只可惜無法再進行下去！

(4) 本題題型，對我國的中學生而言較生疏，應爲往後作類似競賽準備集訓活動的重點題材。

問題5（英國）

【解】 在條件（Ⅰ）中令y，$x\in S$且以$y=x$代入得

$f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x)$…………(*)

即每一$x\in S$，$v=x+(1+x)f(x)$ 恒使$f(v)=v$；以下討論所有可能使$f(u)=u$的解：

由條件（Ⅱ）知，$f(u)=u$至多有三個解：其一可能在區間$(-1,0)$內，一可能爲0，另一可能在區間$(0,\infty)$上：

(1) 設$f(u)=u$，$u\in(-1,0)$：

以$x=y=u$代入條件（Ⅰ）得

$f(u^2+2u)=u^2+2u$

而$0<u+1<1$，$u^2+2u=(u+1)^2-1$

所以$u^2+2u\in(-1,0)$於是$u=u^2+2u\Rightarrow u\notin(-1,0)$

(2) 設$f(u)=u$，$u\in(0,\infty)$同(1)可得$u\notin(0,\infty)$

由(*)式及以上的討論得知：

當$x\in S$時 $x+(1+x)f(x)=0$

即 $f(x)=-\frac{x}{1+x}$……………(**)

此時，當 $x \neq 0$ 時 $\dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{1+x}$ 在 $(0, \infty)$ 及 $(-1, 0)$ 兩區間上都是嚴格遞增，符合條件（Ⅱ）；

且當 $x, y \in S$ 時，

$$x + (1+x)f(y) = x - \frac{y(1+x)}{1+y} = \frac{x-y}{1+y}$$

而 $f(x+(1+x)f(y)) = f\left(\dfrac{x-y}{1+y}\right) = -\left(\dfrac{x-y}{1+y}\right) / \left(1+\dfrac{x-y}{1+y}\right) = \dfrac{y-x}{1+x}$

符合條件（Ⅰ）。

評析：

1. 本題爲英國所設計，屬代數－函數方程的問題，預估爲適中題，其結果共有96位（25％）得0分，而只有84位（22％）得滿分，爲得滿分人數最少的一道題，平均値3.22分，得分率0.46，鑑別指數0.71堪稱理想。

2. 解題重點：

(1) 代入特殊情形 $y = x$ 於條件中窺出尋求 $f(x) = x$ 的固定點。

(2) $\dfrac{f(x)}{x}$ 的嚴格遞增性質得出 $f(x) = x$ 至多有三個固定點。

(3) 探討 $f(x) = x$ 分別在區間 $(0, \infty)$，$(-1, 0)$ 都無固定點。

(4) 對每一 $x \in S$，$x + (1+x)f(x)$ 爲函數 f 在 S 中的固定點，排除(3)的情形得到

$x + (1+x)f(x) = 0$

從而得出 $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$。

(5) 檢驗(4)所得函數方程符合條件（Ⅰ），（Ⅱ）。

3. 討論：

(1) 本題也是我國中學生比較生疏的問題，跟1992年第一次在莫斯科參加第33屆IMO競賽一樣，那一屆的第二道題也是函數方程，六位代表沒有一位得到滿分，缺少了檢驗符合條件的過程都被扣了1分，至少全隊少得了5分；否則也許能排名在德國之前，全隊只得23分，而跟前十名國家得分比較，也是差距較大的一道題。

(2) 函數方程方面是近年來命題落點頻率很高的領域，今年我國集訓時雖然也很重視

函數方程的領域，但學生所得成績仍然偏低。

問題6（芬蘭）

【解】 設 p_j 爲第 j 個質數，即 $p_1=2$，$p_2=3$，……

令 A 爲所有形如 q_1 個質數 $q_1<q_2<\cdots<q_{q_1}$ 的乘積 $q_1\times q_2\times\cdots\times q_{q_1}$ 組成的集合

即 $A=\{2\times3,2\times5,2\times7,\cdots\}\cup\{3\times5\times7,3\times5\times11,\cdots\}$

$\cup\{5\times7\times11\times13\times17,\cdots\}\cup\{7\times11\times13\times17\times19\times23\times29,\cdots\}$

$\cup\cdots\cdots$

若 S 爲任意無限個質數所形成的集合，則可將 S 表成

$S=\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$，其中 $2\le r_1<r_2<r_3<\cdots$

取 $k=r_1$，$m=r_1\times r_2\times\cdots\times r_k$，$n=r_2\times r_3\times\cdots\times r_{k+1}$

則 $m\in A$，$n\notin A$，

故知所建造的集合 A 符合本題的要求。

評析：

1. 本題爲芬蘭所設計，屬數論構造法解題的問題，預估爲最高難度的問題，其結果全體參賽代表有210位（55％）得0分，而有88位（23％）得滿分，平均值只得2.09分，得分率0.30，惟鑑別指數爲0.66仍高。

2. 解題重點：

(1) 充分理解題意，避免誤解，否則前功盡棄！

(2) 全體質數爲無限多個且可依序排成一個數列；

(3) 任意無限多質數所組成的集合也可依序排成一個數列。

3. 討論：

(1) 原先本道題是不應該會出現在這次競賽上，但因主試委員會票選出一道屬數學遊戲－離散數學領域內的問題，其中第一部分被指出是一本競賽書上的一道練習題，臨時耗了漫長討論時間再換本題，各國領隊有關人員疲勞不堪，頗多怨言。

(2) 本題對一般國內中學生很生疏，不易了解題意，但這次我們的集訓得宜，六位學生代表在本題的表現可圈可點，有四位得到滿分，雖然全隊僅得29分，已比前十名國家的平均得分28分略高，在全部69參賽國家中本題我國排名第六名，跟第2道、第3道兩題一樣，屬於我國在這屆發揮正常水準的一道題。

(3) 大陸的六位學生代表，有三位看不懂大陸使用的中文試題（跟我們使用的不同版

本）繳白卷未作答，全隊僅得21分非常出乎意料之外，明顯落在我們六位代表之後。

五、結論與展望

從以上之成績統計及試題解答評析，可以綜合提出以下的結論：

1. 本屆試題領域重點落在代數、數論及平面幾何，偶有綜合題出現；惟獨缺少離散數學或組合數學等重點領域的問題。
2. 本屆試題一般說來比過去二屆都有明顯地偏易（陳昭地，民81年，民82年），金牌獎的成績幾乎達到滿分（40分以上），略有疏忽或書寫表達欠清或欠嚴謹詳細易遭扣分，些微之差就可能無法獲得金牌，可能使數學能力頗具天賦的青年學生，喪失得金牌獎的機會；惟就整體看來，69個參賽國家水準差距頗大，整個試題之難度及鑑別度仍具要求。
3. 我國參賽六位學生，整體看來雖然成績稍有進步，但因其他國家進步很大，獲得四銀一銅一榮譽獎已屬不易，而以些微的成績未能進入前十名，殊爲可惜。
4. 本屆六道試題，我國六位代表整體看來在第二、三及第六道表現出過去水準，但在第一、四及第五道則表現異常，値得檢討改進集訓策略，提高競賽績效與榮譽。

另外，由於過去累積參加七次國際數學競賽輔導的實際經驗，我們也有如下的展望:

1. 大衆傳播媒體及相關雜誌出版單位，雖然偶有出現有關國際數理競賽的訊息（張翠芬，民83年；數學傳播，民83年；參考資料4），惟仍應更積極廣泛的傳播，透過全體熱心的數理教師的傳播，吸引更多、更優秀的中學生參與相關活動，旣可提昇科教教學的品質，激發數理資優生的創造力，又可獲得更具資格、更合適的數理資優生來參與國際數理競賽，獲得更高的榮譽，並奠定往後繼續研究科學學術的深厚基礎與機會。
2. 今年中國大陸仍爲超級強隊，而美國以上屆第七名落在我國之後，今年亦躍昇爲特超級強隊，全隊六位代表均獲得滿分，確屬不易，都擁有衆多人口及積極有效的教育政策之配合，比較能得到最適合的學生代表；其他的國家成績分布消長不一，只有未來有更吸引學生的升學政策配合，加之以199 8年在台灣主辦第39屆IMO的有利時機，配合宣傳及實施更精緻有效的輔導策略，應能在往後每年一度的國際數學奧林匹亞競賽得到第一等強國之林的成績，明揚海內外爲國爭光。

六、參考資料

1. 陳昭地(民81年),一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析,科學教育月刊第152期(81年9月),33～51。
2. 陳昭地(民82年),一九九三年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析,科學教育月刊第163期(82年10月),48～72。
3. 國立臺灣師範大學科學教育中心(民82年6月),國際數學奧林匹亞(I):數理科奧林匹亞競賽專輯(二)。
4. 中央研究院數學研究所(民83年6月),奧林匹亞專題,數學傳播第18卷第2期(83年6月出版),1～25。
5. 張翠芬(民83年),國際數理奧林匹亞競賽深度報導,中國時報第18版(83年8月4日)。
6. O'Halloran, Peter J.(1993), The 34th International Mathematical Olympiad,Mathematics Competitions, Vol.6, No.1, 40～46.
7. IMO 94 Contest Results (94 IMO Jury Committee).
8. 35th IMO Problems and Solutions Shortlisted for the Jury (1994 Hong Kong).