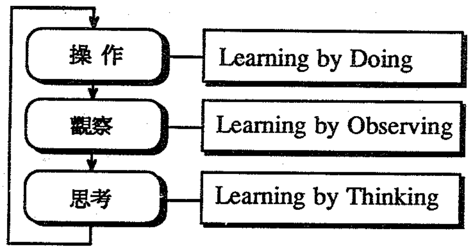
使幾何教學活潑化一摺紙及剪紙篇

謝豐瑞
國立臺灣師範大學數學系

中等學校的教學目標之一乃是希望能使學生由學習中培養創造、推理及思考的能力。而平面幾何的學習不但與日常生活息息相關更是能達成此一目標之一有效途徑。然而，如何能經由學習靜態的知識而引發動態的思考、推理、及創造的能力，則是一大學問。

以教師的角度來看，如何才能使這種靜態的知識活起來呢？首先，我們需要來看看學習幾何的歷程；在幾何學習的歷程中，我們希望學生能經由實際的動手操作、謹慎的觀察來探索幾何的性質、進而思考而發現幾何的奧秘及學習幾何的方法。這種操作、觀察、及思考的教學歷程使得學生能夠手腦並用，正是一種培養創造思考能力的有效方法。



在許許多多的幾何教學活動中，摺紙及剪紙是一種非常重要的教學工具，它不但有助於教學的活潑化，使得學習歷程充滿趣味，更能使學生由操作及觀察中，心領神會幾何性質而達到教學目標。在這兒，我們將來看看摺紙及剪紙這種饒富趣味的教學工具在幾何教學上的運用。

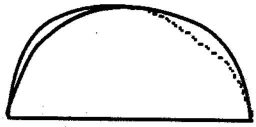
幾何圖形創造

只要我們手中有一張紙，就可以教學生玩無中生有的遊戲，這種活動可以培養學生的創造能力，學生必須自己建構出一種滿足數學性質的成品。從學習成就的觀點來看，學生必須了解所學過的數學性質，將其統整，而後創造，此時，主動的學習將被引發。從學習動機的角度而言，這種活動包括了操弄且具有挑戰性，是引發動機的好工具。

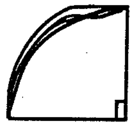
以下，我們將舉一些可以使學生動手去創造的幾何圖形：

(1)　摺出直角

首先拿任一張紙，摺出一平角，如圖（1 a），將此平角對摺，如圖（1 b），由定義“兩直線相交，所成相鄰兩角相等，則此兩角爲直角”，知所得之角爲直角。



圖（1a）



圖（1b）

(2)　摺出一線段的垂直平分線及中點

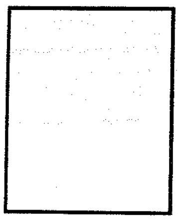
上面的摺法，可同時摺出一線段的垂直平分線及中點。

(3)　摺出角平分線

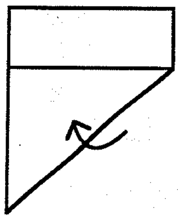
只需將一角的兩邊疊合即可。

(4)　摺出正方形

利用正方形就是鄰邊相等的矩形的性質，就可以將一張矩形的紙如圖（2 a） 摺成一正方形。以短邊爲正方形的一邊，將短邊摺到長邊，如圖（2b）使邊疊合，就可在長邊上取出正方形的邊長。



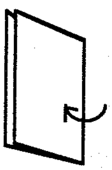
圖（2a）



圖（2b）

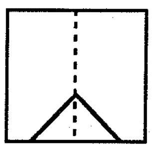
(5)　摺出等腰三角形

對稱的圖形可利用紙的對摺呈現出來，等腰三角形即爲一對稱的圖形，如圖（3a，3b）的摺法，攤開即得等腰三角形，如圖（3c）。



圖（3a）

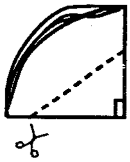
圖（3b）



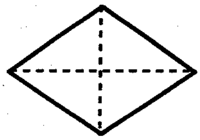
圖（3c）

(6) 摺出菱形

利用四邊形的對角線互相垂直平分，則此四邊形爲菱形的性質，摺出一菱形。取一張紙，如上述(1)中摺直角的紙，摺出直角，如圖（4a），沿虛線從圖中直線的一邊剪向另一邊（或摺起），攤開即得一菱形，如圖（4b）。



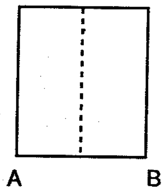
圖（4a）



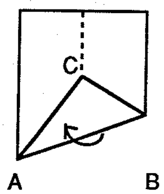
圖（4b）

(7) 摺出正三角形

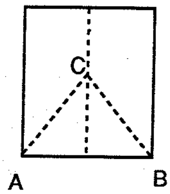
正三角形也可看成對稱的圖形。取一張矩形的紙，要摺出以 $\overline{AB}$ 爲一邊的正三角形。先摺出 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，如圖（5a），固定 A 點，將 $\overline{AB}$ 邊摺起、使 B 點落在垂直平分線上，得出一點 C，如圖（5b），這時 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 等長，根據垂直平分線的性質，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 也等長，所以△ABC 就是一個正三角形，如圖（5c）。



圖（5a）



圖（5b）

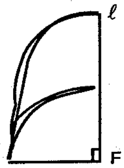


圖（5c）

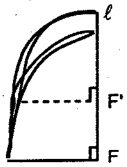
註：圖（5b）的摺痕就是這個直角的一條三等分線。

(8) 摺出平行線

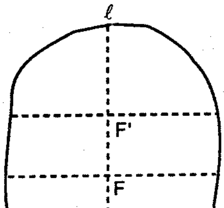
利用平面上兩條直線如果同時垂直於同一直線，那麼這兩條直線就會平行的性質，就可以很容易的摺出平行線。先摺出一直線 ℓ，取直線上一點 F，摺出一直角，如圖（6a），再取另一點 F'，摺出另一直角，如圖（6b），攤開，線 ℓ 以外的摺痕即爲平行線，如圖（6c）。



圖（6a）



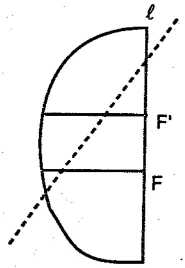
圖（6b）



圖（6c）

(9) 摺出等腰梯形

利用上法摺出平行線後，再依圖（7）摺出與 ℓ 不平行（視梯形定義而定）的一條摺痕即得。



圖（7）

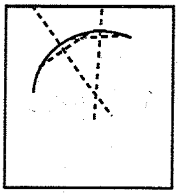
(10) 摺出一弧的圓心

教師也可利用摺紙活動來提昇學生的認知層次。

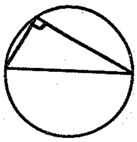
認知層次

知識 → 理解 → 應用 → 分析 → 綜合 → 評鑑

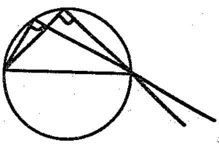
例如，利用摺出一弧的圓心這類活動，學生可以由了解一些有關圓心的性質提昇到應用這些性質而找出一弧的圓心。教師可以發給每位同學一張畫有一弧的白紙，並請學生盡可能的利用所學過的性質摺出圓心。學生可利用弦的垂直平分線必過圓心的性質，摺出兩條垂直平分線，其交點即爲圓心，如圖（8 a）。



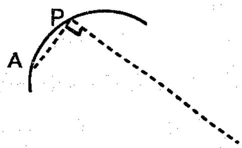
圖（8a）



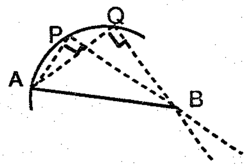
圖（8b）



圖（8c）



圖（8d）



圖（8e）

當然，仍會有學生利用兩次對摺弧或其它方法作出。若學生無法想出其它的摺法，教師可提示利用直徑的圓周角爲90度的性質，如圖（8b）。

若學生仍無法摺出，可畫圖（8c）提示。

此時學生應能摺出圓心了。亦即，在圓弧上固定一點 A，任取另一點 P，過 P 點，摺出 $\overline{AP}$ 的垂線，如圖（8d），再在弧上取異於 A、P 的任一點 Q，過 Q 點，摺出 $\overline{AQ}$ 的垂線，則點 A 與這兩條垂線的交點 B 的連線即爲此弧的直徑，如圖（8e），再作此線

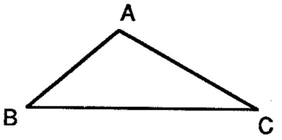
段的中點，即得出圓心。

註：有些學生會利用切線的方法，先摺出兩條切線，再分別摺出它們過切點的垂線，找出交點。這種方法在摺出切線時，就需要先知道圓心的位置，不然會造成很大的誤差（一點無法決定一直線），所以，並不是一個好方法。然而，學生用這種方法可顯示出他利用了一些圓的性質，值得得到鼓勵。

幾何性質驗證

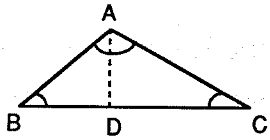
摺紙及剪紙除了可使學生動動腦來創造幾何圖形外，更可以用來驗證許多幾何性質。

(1) 三角形之三內角和為 180 度，如圖（9a）。

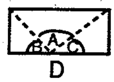


$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$

圖（9a）



圖（9b）



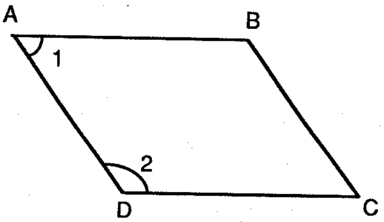
圖（9c）

首先，摺出高、垂足為D，如圖（9b）。將A點摺至與D點重合，將B，C點摺至D點，這個時候學生就可看出三個內角被拼成一平角了，如圖（9c）。

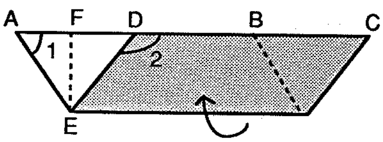
註：我們也可以附帶看出這個矩形的面積為原三角形的一半。由此，可導出三角形的面積公式。

(2) 驗證平行四邊形兩鄰角互補

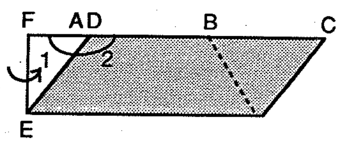
欲驗證$\angle 1 = \angle 2$，如圖（10a），首先，將平行四邊形對邊摺起，使對邊重疊，如圖（10b），再將$\triangle ADE$沿$\overline{EF}$對摺，如圖（10c），就可看出$\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$。



圖（10a）



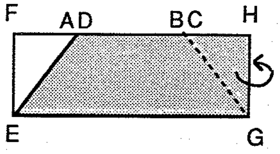
圖（10b）



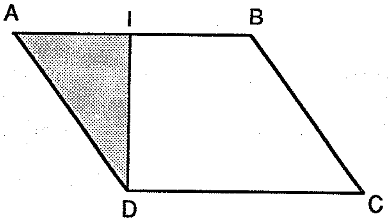
圖（10c）

(3) 驗證平行四邊形面積為底×高及對邊相等

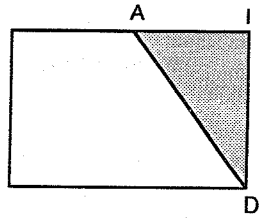
如果再將圖（10c）的$\overline{BC}$依同樣的方法摺成如圖（11a），則可看出平行四邊形$ABCD$的面積為矩形$FHGE$的兩倍，進而導出平行四邊形的面積公式。



圖(11a)



圖(11b)

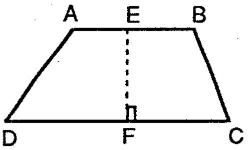


圖(11c)

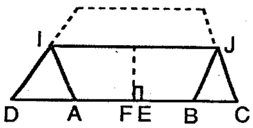
當然，也可以利用過D點剪$\overline{AB}$的垂線，如圖(11b)，再將△ADI補到$\overline{BC}$上，如圖(11c)，而導出平行四邊形的面積公式以及平行四邊形對邊相等性質。

(4) 驗證梯形的面積等於（上底＋下底）×高÷2

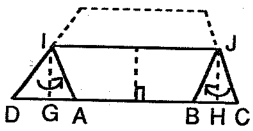
在梯形$ABCD$上，摺出一垂直於$\overline{CD}$的線段（可省略），如圖(12a)，將$\overline{AB}$摺向$\overline{CD}$使E與F重合，得出摺痕$\overline{IJ}$，如圖(12b)，再將△IDA以$\overline{IG}$為軸對摺，△JCB以$\overline{JH}$為軸對摺，如圖(12c)，得出矩形$IGHJ$，如圖(12d)。



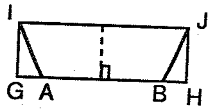
圖(12a)



圖(12b)



圖(12c)



圖(12d)

此時，原梯形的面積即為矩形$IGHJ$面積的兩倍。

梯形面積＝矩形面積×2

$$= (\overline{GH} \times \overline{IG}) \times 2$$

$$= ((\overline{AB} + \overline{CD}) \div 2) \times (\overline{EF} \div 2) \times 2$$

$$= (\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{EF} \div 2$$

註：也驗證了平行線同側內角互補。

(4) 驗證三角形的三邊的中垂線交於一點（外心），並鼓勵學生觀察銳角、鈍角、直角三角形的情形，圖形略。

(5) 驗證三角形的三個角平分線交於一點（內心），並鼓勵學生觀察銳角、鈍角、直角三角形的情形，圖形略。

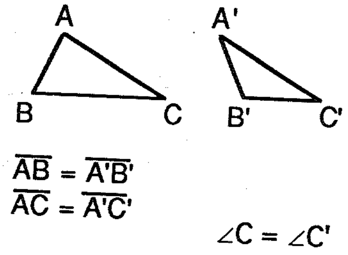
(6) 驗證三角形的三邊的中線交於一點（重心），並鼓勵學生觀察銳角、鈍角、直角三角形的情形，圖形略。

(7) 驗證三角形的三垂線交於一點（垂心），並鼓勵學生觀察銳角、鈍角、直角三角

形的情形，圖形略。

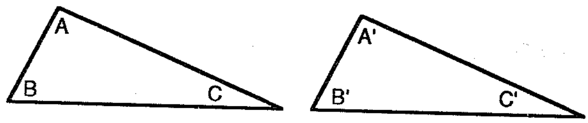
(8) 驗證ＳＳＡ不能保證兩三角形全等。

摺紙及剪紙也可與啓發式教學法合用。例如，在驗證ＳＳＡ不能保證兩三角形全等的性質時，即可使用。下圖的兩三角形中，有兩雙對應邊等長，一雙對應角相等，但這兩個三角形不全等，如圖（13a）。

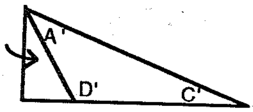


圖（13a）

教師可請學生剪出兩個同樣大小，形狀如△ABC的三角形，如圖（13b），其中一個標出ABC，另一個標出$A'B'C'$，再將△$A'B'C'$的$\overline{A'B'}$邊摺起，做出過A'點的垂線，標出點D'，如圖（13c），沿$\overline{A'B'}$將△$A'D'C'$剪下。接著，教師提出諸如“這兩個三角形，△ABC和△$A'D'C'$中有幾個邊相等？是那些？”等問題，使學生思考，進而發現ＳＳＡ不能保證兩三角形全等的性質。接下來，教師亦可提出問題，讓學生思考並比較ＳＡＳ與ＳＳＡ的異同點。



圖（13b）



圖（13c）

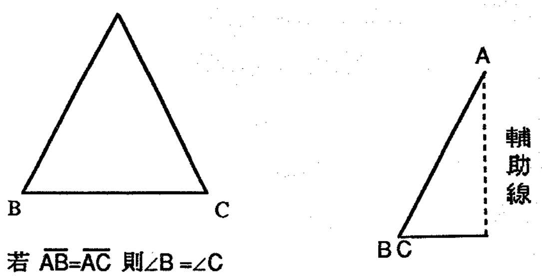
輔助線的建構

常會有一些學生在解幾何證明題時問教師爲什麼要這樣做（如果他們習慣發問的話），尤其是爲什麼要畫這條輔助線。許多教師會回答“你題目做多了就會看出來了”，或是“這些都是專家經過很多年才解出來的”。這些都沒錯。然而，這些是屬於消極的回答。當學生提出這類的問題時，他正處於徬徨的情境，他所期望的是一個正面的，有建設的回答。所以，此時，教師若能提供一些方法使學生能“有跡可循”，將對學生更有助益。而摺紙與剪紙對於找出輔助線即有頗大的用處。

摺紙與剪紙在找出輔助線上的應用並沒有一定的原則。通常，我們可以試試看將已知條件摺一摺，當所給的角或線段有某種數的關係時（相等，大於，小於），將它們經由摺紙與剪紙比一比；我們也可以試試看將未知條件比一比，將所要證的角或線段的關係利用摺紙比一比。下面我們來看看一些例子。

(1) 等腰三角形定理

等腰三角形定理：若一三角形之兩腰相等，則其兩角相等，如圖（14a）。

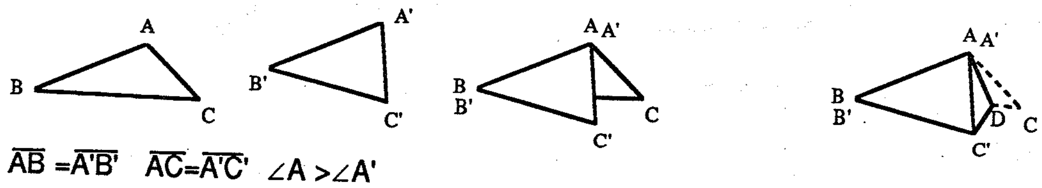


圖（14a）　　圖（14b）

要看看$\angle B$和$\angle C$相不相等，只要將這兩角比一比就好了。將$\triangle ABC$對摺使兩邊疊合，如圖（14b），這時原三角形被摺爲兩全等三角形，於是，我們可以利用三角形全等的證明導出兩角相等。所以，剛才的摺痕就是證明所需的輔助線。

(2) 樞紐定理

在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，$\overline{AB}=\overline{A'B'}$，$\overline{AC}=\overline{A'C'}$，$\angle A$大於$\angle A'$，則$\overline{BC}$的長度大於$\overline{B'C'}$的長度，這就是所謂的樞紐定理，如圖（15a）。

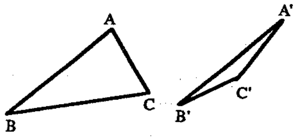


圖（15a）　　圖（15b）　　圖（15c）

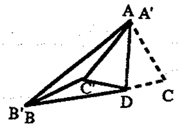
我們也可以用摺紙的方式得出輔助線來輔助這個定理的證明。將兩三角形的一雙相等的對應邊$\overline{AB}$與$\overline{A'B'}$疊合，如圖（15b），接著，因爲$\overline{AC}$與$\overline{A'C'}$等長，且A與A'重合，所以我們可以固定A點，將$\overline{AC}$摺起來，使C與C'重合，如圖（15c）。

假設摺痕與$\overline{BC}$的交點是D，我們可以看出$\overline{BC}$的長，等於$\overline{BD}$的長加$\overline{DC'}$的長，觀察$\triangle BDC'$，因爲三角形兩邊之和大於第三邊，所以$\overline{BD}$加$\overline{DC'}$大於$\overline{B'C'}$，也就是$\overline{BC}$大於$\overline{B'C'}$。這樣就證明了樞紐定理。由剛才的操作性證明，我們發現證明樞紐定理所需的輔助線就是$\overline{AD}$與$\overline{DC'}$，其中$\overline{AD}$就是$\angle C'AC$的分角線。

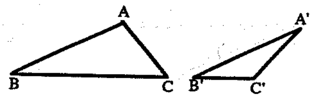
上面的情形，C'在$\triangle ABC$的外部；如果C'在$\triangle ABC$的內部或在$\overline{BC}$邊上，找出輔助線的原理都是一樣的，如圖（15d，15e，15f，15g）。



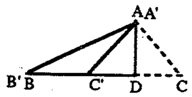
圖(15d)



圖(15e)

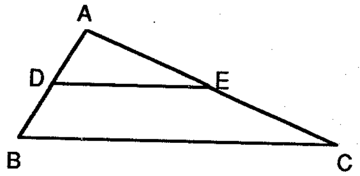


圖(15f)

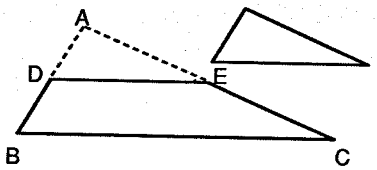


圖(15g)

(3) 三角形兩邊中點連線性質



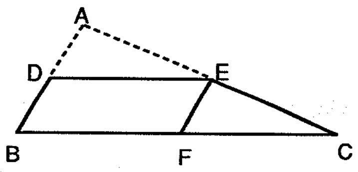
圖(16a)



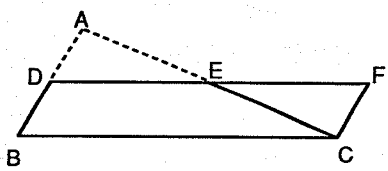
圖(16b)

在△ABC中，D爲$\overline{AB}$的中點，$\overline{DE}$平行於$\overline{BC}$，欲證E爲$\overline{AC}$的中點，如圖(16a)。

因爲要證$\overline{AE}=\overline{EC}$，那麼可將$\overline{AE}$與$\overline{EC}$比比看，剪下△$ADE$，如圖(16b)，因爲$\overline{AE}$與$\overline{EC}$等長，那麼$\overline{AE}$與$\overline{EC}$就能疊合，我們可以將△$ADE$平移下來比，如圖(16c)，也可以將△$ADE$旋轉過來比，如圖(16d)。



圖(16c)

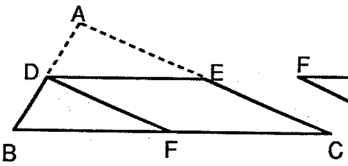


圖(16d)

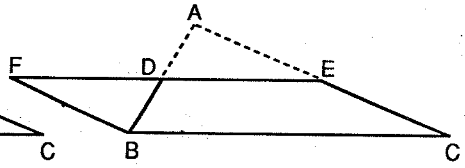
在平移的情形中，我們發現D點被平移到$\overline{BC}$上，爲了方便，將這點令爲F點，如圖(16c)，此時，因爲∠A跟∠CEF相等，可知$\overline{EF}$平行於$\overline{AB}$。因此，要證明這個定理，我們就要先過E做$\overline{AB}$的平行線段，再證△ADE與△EFC爲全等三角形。

如果由旋轉將$\overline{AE}$與$\overline{EC}$疊合，我們就可以得到如圖(16d)的圖形，此時輔助線就是過點C作$\overline{AB}$的平行線、並延長$\overline{DE}$使它們相交於F點。

除了上述的方法，我們也可以經由已知$\overline{AD}=\overline{DB}$，而將$\overline{AD}$與$\overline{DB}$比一比，同樣的，剪下△$ADE$，欲將$\overline{AD}$與$\overline{DB}$疊合，可以將△$ADE$平移下來比，如圖(16e)，也可以將△$ADE$旋轉過來比，如圖(16f)，而輔助線也就自然找出來了。



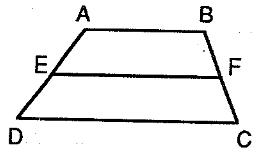
圖（16e）



圖（16f）

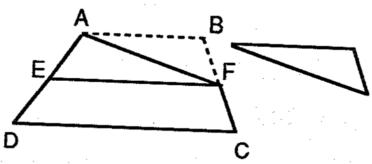
(4) 梯形兩邊中點連線平行於兩底且其長為兩底和的一半

已知梯形$ABCD$，$\overline{AB}$平行於$\overline{CD}$，E為$\overline{AD}$的中點，F為$\overline{BC}$的中點，如圖（17a），則$\overline{EF}$平行於$\overline{CD}$，且$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})$。

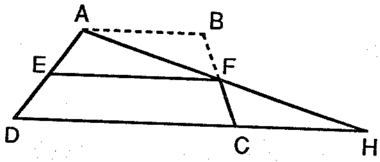


圖（17a）

這個題目無法一眼看出如何證明（如果學生不曾看過如何證明），假如又想不出要怎麼證，這時只好求助輔助線。怎麼找呢？既然已知$\overline{BF}=\overline{FC}$，就把它們比比看，所以必須剪下$\overline{BF}$，如果學生知道我們可以用到三角形兩邊中點連線平行於第三邊且其長等於第三邊的一半，那麼他就可能會在剪的時候儘量剪成三角形，於是一種可能的剪法是沿$\overline{AF}$將$\triangle ABF$剪下，如圖（17b），經過旋轉及平移後得到如圖（17c）的圖形，於是可以看出$\triangle FHC$全等於$\triangle FAB$， 這時輔助線就可以找出來了，而經由證明$\triangle FHC$全等於$\triangle FAB$，再運用三角形兩邊中點連線性質，我們即可證出所求。



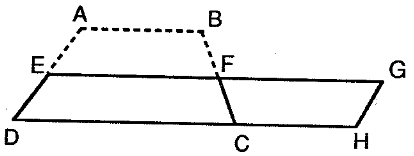
圖（17b）



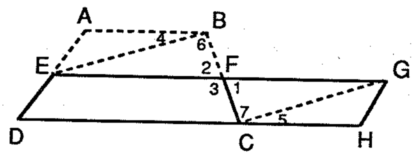
圖（17c）

然而，事實上，這個題目對學生而言，應是很難的。因為，他們所接觸過的證明題多半是有關證明兩線段相等或兩角相等，很少有機會證明兩線段平行或一線段的長為另一線段的一半等的問題，而如果他們又沒想到三角形中點連線性質的話，那麼，就不會想到上面的證法，於是，一種最自然的剪法就是沿$\overline{EF}$剪一刀，把四邊形$ABFE$剪下來，經過旋轉和平移得到如圖（17d）的圖形，仔細觀察後可知E、F、G三點共線，

且D、C、H三點也共線，於是$EFGHCD$爲平行四邊形，$\overline{EF}$平行於$\overline{CD}$，我們也看出$\overline{EF}=\overline{GF}$，也就是$\overline{EF}$長爲$\overline{AB}+\overline{CD}$的一半，



圖（17d）



圖（17e）

從上述的操作性證明，我們知道，只要證出$EFGHCD$爲平行四邊形，且$\overline{EF}=\overline{GF}$，於是我們在證明時要作出點$G$和點$H$。怎麼作呢？當然作輔助線的方法不是唯一的。茲討論兩種：

(一) 延長$\overline{DC}$並在其上取點H，使$\overline{CH}=\overline{AB}$，過點$H$作$\overline{ED}$的平行線，在此線上取一點$G$，使$GH$的長度等於$ED$的長度，這時只要證明$E$，$F$，$G$共線就可知$EFGHCD$爲一平行四邊形了。

欲證E，F，G共線，如圖(17e)，只須證出$\angle 1=\angle 2$，則

$\because \angle 2+\angle 3=180^\circ$，$\therefore \angle 1+\angle 3=180^\circ$，所以$E$，$F$，$G$共線。

欲證$\angle 1=\angle 2$，

我們最常用來證明兩角相等的方法就是證兩三角形全等，於是，欲證$\triangle EBF$全等於$\triangle GCF$，但所給條件不夠，經觀察後知只要先證$\triangle GHC$全等於$\triangle EAB$即可。

在$\triangle GHC$與$\triangle EAB$中，　$\overline{GH}\ (=\overline{ED}\ )=\overline{EA}$

$\overline{HC}=\overline{AB}$

$\angle H=\angle A$

（$\because \overline{GH}\parallel\overline{ED}$，$\therefore \angle H+\angle D=180^\circ$，$\because \overline{AB}\parallel\overline{CD}$，$\therefore \angle A+\angle D=180^\circ$，於是，$\angle H=\angle A$。）

由SAS性質，得到$\triangle GHC$全等於$\triangle EAB$。

故知$\overline{EB}=\overline{GC}$，$\angle 4=\angle 5$ ……………………………(1)

欲證$\triangle EBF$全等於$\triangle GCF$，在$\triangle EBF$與$\triangle GCF$中，

$\overline{EB}=\overline{GC}$ ……………………………（由上述(1)）

$\overline{BF}=\overline{CF}$　　　　　　　　（已知）

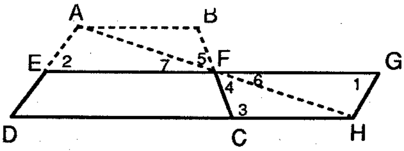
$\angle 6=\angle 7$

由SAS性質，得到$\triangle EBF$全等於$\triangle GCF$。故知$\angle 1=\angle 2$，所以E，F，G共

線，且$\overline{EF}=\overline{GF}$，這時$EFGHCD$為一平行四邊形，$\overline{EF}$平行於$\overline{CD}$，而它的長度$=\frac{1}{2}\overline{EG}=\frac{1}{2}\overline{DH}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})$。

(二) 延長$\overline{DC}$並在其上取點H，使$\overline{CH}=\overline{AB}$ ……………………(1)

過點H作$\overline{ED}$的平行線，交$\overline{EF}$的延長線於點G，此時只須證明$\overline{ED}=\overline{GH}$，即知$EFGHCD$為一平行四邊形了。



圖（17 f）

同樣的，要證$\overline{ED}=\overline{GH}$，我們須經由三角形全等。如何證呢？方法有很多種，茲簡述其一。

如圖（17 f），連接$\overline{AF}$及$\overline{FH}$，欲證$\triangle GHF$全等於$\triangle EAF$，可以觀察出條件不夠，故先證$\triangle HCF$全等於$\triangle ABF$。

在$\triangle HCF$和$\triangle ABF$中，

$\overline{HC}=\overline{AB}$　　（由(1)）

$\overline{CF}=\overline{BF}$　　（由已知）

（註：此時並不知$\angle 4$與$\angle 5$是否為對頂角）

$\angle 3=\angle B$　　（$\because$已知$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$）

由SAS性質，知$\triangle HCF$全等於$\triangle ABF$。

故$\overline{AF}=\overline{HF}$ ……………………(2)

$\angle 5=\angle 4$ ……………………(3)

欲證$\triangle GHF$全等於$\triangle EAF$

在$\triangle GHF$和$\triangle EAF$中：

$\overline{HF}=\overline{AF}$　　（由(2)）

$\angle 6=\angle 7$

（$\because\angle GFC$與$\angle EFB$為對頂角，$\therefore\angle GFC=\angle EFB$，而由上式(3)知$\angle 4=\angle 5$，故$\angle 6=\angle 7$）

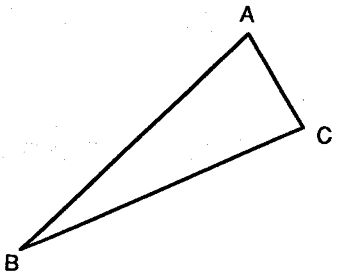
$\angle 1=\angle 2$　　（$\because\overline{ED}\parallel\overline{GH}$）

由AAS性質，知$\triangle GHF$全等於$\triangle EAF$，

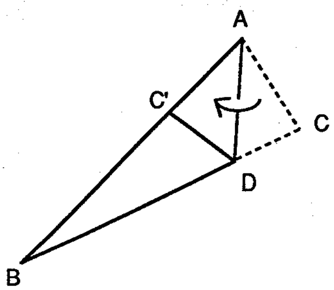
$\Rightarrow\overline{EF}=\overline{FG}$，也就是$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{EG}$且$\overline{GH}=\overline{EA}=\overline{ED}$，故$EFGHCD$為平行四邊形。於是我們完成了這個證明。

(5) 三角形邊角性質

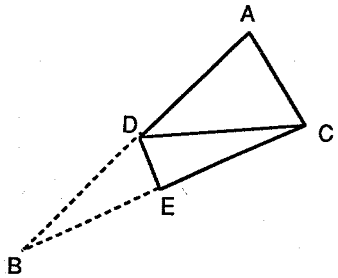
$\triangle ABC$中，大邊對大角，小邊對小角。



圖（18a）



圖（18b）



圖（18c）

如圖（18a）所示，已知兩邊，一邊$\overline{AB}$大於另一邊$\overline{AC}$，將兩邊比比看，怎麼比呢？將小邊摺起，以A點為固定點，將$\overline{AB}$與$\overline{AC}$疊合，如圖（18b），這時我們發現$\angle AC'D$是$\angle BC'D$的外角，所以$\angle AC'D$大於$\angle B$，於是我們找出的輔助線就是$\angle BAC$的平分線$\overline{AD}$及$\overline{DC'}$（使$\overline{AC}=\overline{AC'}$）。證明省略（參考：謝豐瑞，中等教育，第44卷，第4期）。

當然學生也有可能把兩個角比一比，如圖（18c），這時發現$\angle BCA$是$\angle DCA+\angle BCD$（被摺過去的$\angle B$），再觀察一下，輔助線就是$\overline{BC}$的中垂線交$\overline{BA}$於D及$\overline{DC}$。這時，只要證明$\triangle BED$與$\triangle CED$全等就可以了。證明省略（參考：謝豐瑞，中等教育，第44卷，第4期）。

以上所介紹的只是摺紙與剪紙在幾何教學上的一些應用範例，目的是希望能收拋磚引玉的效果使我們這些從事教育工作者，能多運用自己的智慧，多設計一些摺紙與剪紙的活動，使幾何教學更生動活潑、更多元化，以加惠莘莘學子，如此幾何將成為寓教於樂的好題材了。

參考書目

1. 邱日盛。中等教育，第38卷，第3期。
2. 謝豐瑞。中等教育，第44卷，第4期。