遞迴數列 $a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$ 的通項表式及推廣

葉東進
國立科學園區實驗高級中學

有關遞迴數列 $a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$ 的題材，在一般的高中教材中較少出現，但是組合學中的某些計數問題①或是某些機率問題②，要是能用遞迴數列的概念來處理就顯得非常簡便，因此，討論其通項表式是必要的。

不過，我們所見到的書籍或文獻在談到通項的求法，總是引用差分方程或線性空間等高等數學的理論③，往往不易爲一般高中生所接受。底下提供一種能普遍被瞭解的求通項方法。

產生此種方法的靈感主要是來自一個大家熟知的問題：

設 s，t 爲常數，而 α，β 是二次方程 $x^2=px+q$ 的兩根，若 $S_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n$，則有 $S_{n+2}=p\cdot S_{n+1}+q\cdot S_n$。

我們反問：

設 p，q 爲常數，而 α，β 是二次方程 $x^2=px+q$ 的兩根，若有數列 a_n 滿足 $a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$，是否存在常數 s，t 使得 $a_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n$？

現在就來逐步解決上述問題。

命題1　設 p，q，b 爲常數，若已知遞迴數列 $a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b^n$（$p\neq b$），則存在常數 s，t 使 $a_n=s\cdot p^n+t\cdot b^n$。

證明：由
$$\begin{cases} a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b^n & (1)\\ a_n=p\cdot a_{n-1}+q\cdot b^{n-1} & (2)\end{cases}$$

(1)－(2)× b　　$(a_{n+1}-b\cdot a_n)=p(a_n-b\,a_{n-1})$

所以 $a_n-b\cdot a_{n-1}$ 是以 p 爲公比之等比數列，因而存在常數 c，

使　$a_n-b\cdot a_{n-1}=c\cdot p^{n-1}$　　(3)

另外　$a_n=p\cdot a_{n-1}+q\cdot b^{n-1}$　　(4)

(3)× p −(4)× b　　$(p-b)a_n=c\cdot p^n-q\cdot b^n$

取 $s=\dfrac{c}{p-b}$, $t=\dfrac{-q}{p-b}$　（均爲常數）

即得　　$a_n=s\cdot p^n+t\cdot b^n$

命題2　設 α , β 爲二次方程 $x^2=px+q$ 的兩相異根，若已知遞迴數列 $a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$，則存在常數 s , t 使 $a_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n$ 。

證明：因 α , β 是 $x^2=px+q$ 的兩根，所以 $p=\alpha+\beta$, $q=-\alpha\beta$

由　$a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$

得　$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta\cdot a_n$

隨之　$(a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n)$

所以　$a_n-\alpha\cdot a_{n-1}$ 是以 β 爲公比之等比數列，因而存在常數 c ，

使　$a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=c\cdot\beta^n$

即　$a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+c\cdot\beta^n$

由命題1，知存在常數 s , t 使

$$a_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n$$

例：求數列 $\begin{cases}a_0=1\ ,\ a_1=-1\\ 3a_{n+2}=7a_{n+1}-2a_n\end{cases}$ 的通項 a_n 。

因爲2，$\dfrac{1}{3}$是二次方程 $x^2=\dfrac{7}{3}x-\dfrac{2}{3}$的兩根，由命題2，知存在常數 s , t 使

$$a_n=s\cdot 2^n+t\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

由　$\begin{cases}a_0=s+t=1\\ a_1=2s+\dfrac{t}{3}=-1\end{cases}$

解得　$s=-\dfrac{4}{5}$, $t=\dfrac{9}{5}$

故　$a_n=-\dfrac{4}{5}\cdot 2^n+\dfrac{9}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

我們把上述兩個命題加以推廣。

命題3 設p,q,r,b,c為常數，若已知遞迴數列$a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b^n+r\cdot c^n$ $(p\neq b\ ,\ p\neq c)$，則存在常數s,t,u使$a_n=s\cdot p^n+t\cdot b^n+u\cdot c^n$。

證明：由
$$\begin{cases} a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b^n+r\cdot c^n & (1)\\ a_n=p\cdot a_{n-1}+q\cdot b^{n-1}+r\cdot c^{n-1} & (2)\end{cases}$$

(1)−(2)× c

$$(a_{n+1}-c\cdot a_n)=p(a_n-c\cdot a_{n-1})+\frac{q(b-c)}{b}\cdot b^n$$

由命題1，對數列$a_{n+1}-c\cdot a_n$言，存在常數l，m使

$$a_{n+1}-c\cdot a_n=l\cdot p^n+m\cdot b^n \qquad (3)$$

另外 $$a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b^n+r\cdot c^n \qquad (4)$$

(3)× p −(4)× c

$$(p-c)a_{n+1}=l\cdot p^{n+1}+(mp-cq)\cdot b^n-r\cdot c^{n+1}$$

$$a_{n+1}=\frac{l}{p-c}\cdot p^{n+1}+\frac{mp-cq}{b(p-c)}\cdot b^{n+1}-\frac{r}{p-c}\cdot c^{n+1}$$

取 $s=\dfrac{l}{p-c}$，$t=\dfrac{mp-cq}{b(p-c)}$，$u=-\dfrac{r}{p-c}$（均為常數）

得 $a_n=s\cdot p^n+t\cdot b^n+u\cdot c^n$

命題4 設α，β是二次方程$x^2=px+q$的兩相異根，若已知遞迴數列$a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n+r\cdot b^n$ $(b\neq\alpha,\ b\neq\beta)$，則存在常數$s$，$t$，$u$使$a_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n+u\cdot b^n$。

證明：由
$$\begin{cases} a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n+r\cdot b^n & (1)\\ a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot a_{n-1}+r\cdot b^{n-1} & (2)\end{cases}$$

(1)−(2)× b

$$(a_{n+2}-b\cdot a_{n+1})=p(a_{n+1}-b\cdot a_n)+q(a_n-b\cdot a_{n-1})$$

由命題2，知存在常數A，B使

$$a_{n+1}-b\cdot a_n=A\cdot\alpha^n+B\cdot\beta^n$$

即 $$a_{n+1}=b\cdot a_n+A\cdot\alpha^n+B\cdot\beta^n$$

又由命題3，知存在常數s,t,u使

$$a_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n+u\cdot b^n$$

命題5　設 α，β，γ 是三次方程 $x^3=px^2+qx+r$ 的三個相異根，若已知遞迴數列 $a_{n+3}=p\cdot a_{n+2}+q\cdot a_{n+1}+r\cdot a_n$，則存在常數 s，t，u 使 $a_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n+u\cdot\gamma^n$。

證明：因 α，β，γ 是 $x^3=px^2+qx+r$ 的三個根，所以

$$p=\alpha+\beta+\gamma\ ,\ q=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\ ,\ \gamma=\alpha\beta\gamma$$

由　$a_{n+3}=p\cdot a_{n+2}+q\cdot a_{n+1}+r\cdot a_n$

$$a_{n+3}=(\alpha+\beta+\gamma)a_{n+2}-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a_{n+1}+\alpha\beta\gamma\cdot a_n$$

$$[a_{n+3}-(\alpha+\beta)a_{n+2}+\alpha\beta\cdot a_{n+1}]=\gamma[a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta\cdot a_n]$$

所以數列 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta\cdot a_n$ 是以 γ 爲公比之等比數列

因此存在常數 c，使

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta\cdot a_n=c\cdot\gamma^n$$

由命題4，知存在常數 s,t,u 使 $a_n=s\cdot\alpha^n+t\cdot\beta^n+u\cdot\gamma^n$ 我們可以使用數學歸納法把上述命題推廣至更具一般性而得到下列定理。

定理1：設 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是方程 $x^k=p_1x^{k-1}+p_2x^{k-2}+\cdots+p_k$ 的 k 個相異根，若已知遞迴數列 $a_{n+k}=p_1\cdot a_{n+k-1}+p_2\cdot a_{n+k-2}+\cdots+p_k\cdot a_n$，則存在常數 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，使

$$a_n=\sum_{i=1}^{k}A_i\cdot\alpha_i^{\,n}$$

在證明定理1之前，我們要先提出兩個預備定理。

預備定理1：對於已知的遞迴數列 $a_{n+1}=p\cdot a_n+\sum_{i=1}^{l}q_i\cdot b_i^{\,n}$，$(p\neq b_i)$，存在常數 $s,t_1,t_2,\cdots,t_l$，使 $a_n=s\cdot p^n+\sum_{i=1}^{l}t_i\cdot b_i^{\,n}$

證明：對 l 作數學歸納：

首先，在 $l=1$ 時，由命題1即知成立。

假設定理對 $l=k$ 時成立，今考慮 $l=k+1$ 時的情形：

考慮數列　$a_{n+1}=p\cdot a_n+\sum_{i=1}^{k+1}q_i\cdot b_i^{\,n}$　(1)

因此有 $$a_n = p \cdot a_{n-1} + \sum_{i=1}^{k+1} q_i \cdot b_i^{n-1} \tag{2}$$

(1)−(2)× b_{k+1} 得

$$a_{n+1} - b_{k+1} \cdot a_n = p(a_n - b_{k+1} \cdot a_{n-1}) + \sum_{i=1}^{k} q_i \cdot (b_i - b_{k+1}) b_i^{n-1}$$

取 $c_{n+1} = a_{n+1} - b_{k+1} \cdot a_n$，則有

$$c_{n+1} = p \cdot c_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i (b_i - b_{k+1})}{b_i} \cdot b_i^n$$

但是由假設對 $l = k$ 時定理成立，知存在常數 s 及 $t_1, t_2, \cdots, t_k$，使

$$c_n = s \cdot p^n + \sum_{i=1}^{k} t_i \cdot b_i^n$$

即 $$a_{n+1} = b_{k+1} \cdot a_n + s \cdot p^n + \sum_{i=1}^{k} t_i \cdot b_i^n \tag{3}$$

另外 $$a_{n+1} = p \cdot a_n + \sum_{i=1}^{k+1} q_i \cdot b_i^n \tag{4}$$

(3)× p −(4)× b_{k+1} 得

$$(p - b_{k+1}) a_{n+1} = s \cdot p^{n+1} + \sum_{i=1}^{k} (p \cdot t_i - b_{k+1} \cdot q_i) b_i^n - q_{k+1} \cdot b_{k+1}^{n+1}$$

取常數 $$S = \frac{s}{p - b_{k+1}} \ ,$$

$$T_i = \frac{p \cdot t_i - b_{k+1} \cdot q_i}{b_i (p - b_{k+1})} \ , \ i = 1, 2, \cdots, k$$

及 $$T_{k+1} = \frac{-q_{k+1}}{p - b_{k+1}}$$

則有 $$a_n = s \cdot p^n + \sum_{i=1}^{k+1} T_i \cdot b_i^n$$

因此，在 $l = k + 1$ 時，定理也成立。

預備定理2：設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是方程 $x^k = p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + \cdots + p_k$ 的 k 個相異根，已知有遞迴數列 $a_{n+k} = p_1 \cdot a_{n+k-1} + p_2 \cdot a_{n+k-2} + \cdots + p_k \cdot a_n + q \cdot b^n$，

則存在常數 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 及 B，使 $a_n=\sum_{i=1}^{k}A_i\cdot\alpha_i{}^n+B\cdot b^n$ 。

證明：對 k 作數學歸納：

在 $k=1$ 時，由命題 1 即知成立。

假設定理在 $k=m$ 時成立，今考慮在 $k=m+1$ 時的情形：

設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m+1}$ 是方程 $x^{m+1}=p_1x^m+p_2x^{m-1}+\cdots+p_{m+1}$ 的 $m+1$ 個相異根，已知有遞迴數列

$$a_{n+m+1}=p_1\cdot a_{n+m}+p_2\cdot a_{n+m-1}+\cdots+p_{m+1}\cdot a_n+q\cdot b^n \tag{1}$$

因此有 $a_{n+m}=p_1\cdot a_{n+m-1}+p_2\cdot a_{n+m-2}+\cdots+p_{m+1}\cdot a_{n-1}+q\cdot b^{n-1}$ (2)

(1)－(2)× b 得

$$a_{n+m+1}-b\cdot a_{n+m}=\sum_{i=1}^{m+1}p_i\,(a_{n+m+1-i}-b\cdot a_{n+m-i})$$

取　$b_n=a_{n+1}-b\cdot a_n$ ，　則有

$$b_{n+m+1}=\sum_{i=1}^{m+1}p_i\cdot b_{n+m+1-i} \tag{3}$$

由根與係數關係：

$$p_1=\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i$$

$$p_2=-\sum_{1\le i<j\le m+1}\alpha_i\alpha_j$$

$$\vdots$$

$$p_{m+1}=(-1)^m\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\cdots\alpha_m\alpha_{m+1}$$

因此(3)式可以改寫爲：

$$b_{n+m+1}=(\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i)\,b_{n+m}-(\sum_{1\le i<j\le m+1}\alpha_i\alpha_j)\,b_{n+m-1}+\cdots+(-1)^m\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m+1}\cdot b_n$$

$$\Rightarrow b_{n+m+1}-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i)b_{n+m}+(\sum_{1\le i<j\le m}\alpha_i\alpha_j)b_{n+m-1}-\cdots+(-1)^m\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdot b_{n+1}$$

$$=\alpha_{m+1}[b_{n+m}-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i)b_{n+m-1}+(\sum_{1\le i<j\le m}\alpha_i\alpha_j)b_{n+m-2}-\cdots+(-1)^m\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdot b_n]$$

所以數列 $b_{n+m}-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i)b_{n+m-1}+(\sum_{1\le i<j\le m}\alpha_i\alpha_j)b_{n+m-2}-\cdots+(-1)^m\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdot b_n$

是以 α_{m+1} 爲公比之等比數列，因此，存在常數 c ，使

$$b_{n+m}-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i)b_{n+m-1}+(\sum_{1\leq i<j\leq m}\alpha_i\alpha_j)b_{n+m-2}-\cdots+(-1)^m\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\cdot b_n$$

$$=c\cdot\alpha_{m+1}^{n}$$

但是由假設對 $k=m$ 時定理成立，知存在常數 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 及 d ，使

$$b_n=\sum_{i=1}^{m}c_i\cdot\alpha_i^{\,n}+d\cdot\alpha_{m+1}^{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{m+1}c_i\cdot\alpha_i^{\,n}\qquad(\text{取 } c_{m+1}=\alpha\ )$$

即 $$a_{n+1}=b\cdot a_n+\sum_{i=1}^{m+1}c_i\cdot\alpha_i^{\,n}$$

由預備定理1 ，知存在常數 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+1}$ 及 B，使 $a_n=\sum_{i=1}^{m+1}Ai\cdot\alpha_i^{\,n}$ $+B\cdot b^n$ 。

因此，在 $k=m+1$ 時定理也成立。

可以看到，在預備定理2中，取 $b=0$ 時的特殊情形，即得到定理1 。

在以上的論述中，我們總是假設方程式具有相異根，事實上，如果方程式具有重根的話，則通項的表式是會有所不同，我們有底下的命題。

命題6　設 α , p 爲常數，若已知遞迴數列 $a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+p\cdot\alpha^n$，則存在 n 的一次式 $An+B$，使 $a_n=(An+B)\cdot\alpha^n$ 。

證明：由 $$a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+p\cdot\alpha^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^n}=\frac{a_n}{\alpha^{n-1}}+p$$

即數列 $\frac{a_n}{\alpha^{n-1}}$ 是以 p 爲公差的等差數列，因此，存在 n 的一次式 $An+B$，使

$$\frac{a_n}{\alpha^{n-1}}=\alpha(An+B),$$

即 $$a_n=(An+B)\cdot\alpha^n$$

命題７　設 α 是二次方程 $x^2=px+q$ 的二重根，若已知遞迴數列 $a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$，則存在 n 的一次式 $An+B$，使 $a_n=(An+B)\cdot\alpha^n$。

證明：因 α 是 $x^2=px+q$ 的二重根，所以 $p=2\alpha$，$q=-\alpha^2$

由
$$a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n$$
$$a_{n+2}=2\alpha a_{n+1}-\alpha^2 a_n$$
$$(a_{n+2}-\alpha\cdot a_n)=\alpha(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n)$$

所以數列 $a_{n+1}-\alpha\cdot a_n$ 是以 α 爲公比之等比數列，隨之，存在常數 c 使
$$a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=c\cdot\alpha^n$$

由命題６，知存在 n 的一次式 $An+B$ 使
$$a_n=(An+B)\cdot\alpha^n$$

例：求數列 $\begin{cases} a_0=1\ ,\ a_1=-1 \\ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n \end{cases}$ 的通項 a_n。

因爲２是二次方程 $x^2=4x-4$ 的二重根，由命題７，知存在常數 A，B

使　$a_n=(An+B)\cdot 2^n$

由　$a_0=B=1$

$a_1=(A+B)\cdot 2=-1$

得　$A=-\dfrac{3}{2}$　，　$B=1$

故　$a_n=\left(-\dfrac{3}{2}n+1\right)\cdot 2^n$

使用數學歸納法，我們可以將命題７加以推廣而得到下面定理。

定理２：設 α 是方程 $x^k=p\cdot x^{k-1}+p_2x^{k-2}+\cdots+p_k$ 的 k 重根，若已知遞迴數列 $a_{n+k}=p_1\cdot a_{n+k-1}+p_2\cdot a_{n+k-2}+\cdots+p_k\cdot a_n$，則存在一 n 的 $k-1$ 次多項式 $f_{k-1}(n)$，使 $a_n=f_{k-1}(n)\cdot\alpha^n$。

在給出定理２的證明之前，我們先提出幾個命題。

命題(1)：對於已知的遞迴數列 $a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+q\cdot\alpha^n$，存在 n 的一次多項式 $f_1(n)$，使 $a_n=f_1(n)\cdot\alpha^n$。

證明：即命題６。

命題(2)－1：設α是方程$x^2 = p_1x + p_2$的二重根，若已知遞迴數列$a_{n+2} = p_1 \cdot a_{n+1} + p_2 \cdot a_n$，則存在$n$的一次多項式$f_1(n)$，使$a_n = f_1(n) \cdot \alpha^n$。

證明：即命題7。

命題(2)－2：設α是$x^2 = p_1x + p_2$的二重根，若已知遞迴數列$a_{n+2} = p_1 \cdot a_{n+1} + p_2 \cdot a_n + q \cdot \alpha^n$，則存在$n$的二次多項式$f_2(n)$，使$a_n = f_2(n) \cdot \alpha^n$。

證明：由
$$a_{n+2} = p_1 \cdot a_{n+1} + p_2 \cdot a_n + q \cdot \alpha^n \quad (1)$$
$$a_{n+1} = p_1 \cdot a_n + p_2 \cdot a_{n-1} + q \cdot \alpha^{n-1} \quad (2)$$

(1)－(2)×α得
$$a_{n+2} - \alpha \cdot a_{n+1} = p_1(a_{n+1} - \alpha \cdot a_n) + p_2(a_n - \alpha \cdot a_{n-1})$$

取$b_n = a_{n+1} - \alpha \cdot a_n$，則有
$$b_{n+2} = p_1 \cdot b_{n+1} + p_2 \cdot b_n$$

由命題(2)－1，知存在n的一次多項式$f_1(n)$，使
$$b_n = f_1(n) \cdot \alpha^n$$

即
$$a_{n+1} - \alpha \cdot a_n = f_1(n) \cdot \alpha^n$$

$\Rightarrow$
$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^n} - \frac{a_n}{\alpha^{n-1}} = f_1(n)$$

取$c_n = \dfrac{a_n}{\alpha^{n-1}}$，則有
$$c_{n+1} - c_n = f_1(n)$$

因此數列c_n是n的二次多項式，即存在n的二次多項式$f_2(n)$，使
$$c_n = \alpha \cdot f_2(n)$$

即
$$a_n = f_2(n) \cdot \alpha^n$$

從上面的三個命題的證明過程中，我們可以歸納其推導的流程是這樣的：

$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + q \cdot \alpha^n \Rightarrow a_n = f_1(n) \cdot \alpha^n$　（命題(1)）

$\rightarrow a_{n+2} = p_1 \cdot a_{n+1} + p_2 \cdot a_n \Rightarrow a_n = f_1(n) \cdot \alpha^n$　（命題(2)－1）

$\rightarrow a_{n+2} = p_1 \cdot a_{n+1} + p_2 \cdot a_n + q \cdot \alpha^n \Rightarrow a_n = f_2(n) \cdot \alpha^n$　（命題(2)－2）

$\rightarrow a_{n+3} = p_1 \cdot a_{n+2} + p_2 \cdot a_{n+1} + p_3 \cdot a_n \Rightarrow a_n = f_2(n) \cdot \alpha^n$　（命題(3)－1）

$\rightarrow a_{n+3} = p_1 \cdot a_{n+2} + p_2 \cdot a_{n+1} + p_3 \cdot a_n + q \cdot \alpha^n \Rightarrow f_3(n) \cdot \alpha^n$　（命題(3)－2）

$\vdots$

$\rightarrow a_{n+k-1}=p_1\cdot a_{n+k-2}+\cdots+p_{k-1}\cdot a_n+q\cdot\alpha^n\Rightarrow a_n=f_{k-1}(n)\cdot\alpha^n$ （命題（$k-1$）－2）

$\rightarrow a_{n+k}=p_1\cdot a_{n+k-1}+\cdots+p_k\cdot a_n\Rightarrow a_n=f_{k-1}(n)\cdot\alpha^n$ （命題(k)－1）

（即定理2）

底下，我們把流程中的最後二個推導過程，即由命題（$k-1$）－1導出命題（$k-1$）－2及由命題（$k-1$）－2導出命題(k)－1說明如下：

假定命題（$k-1$）－1是成立的：

命題（$k-1$）－1：設 α 是方程 $x^{k-1}=p_1x^{k-2}+p_2x^{k-3}+\cdots+p_{k-1}$ 的 $k-1$ 重根，已知遞迴數列 $a_{n+k-1}=p_1\cdot a_{n+k-2}+p_2\cdot a_{n+k-3}+\cdots+p_{k-1}\cdot a_n$，則存在 n 的 $k-2$ 次多項式 $f_{k-2}(n)$，使 $a_n=f_{k-2}(n)\cdot\alpha^n$。

利用上述命題，我們來證明底下的命題。

命題（$k-1$）－2：設 α 是 $x^{k-1}=p_1x^{k-2}+p_2x^{k-3}+\cdots+p_{k-1}$ 的 $k-1$ 重根，已知遞迴數列 $a_{n+k-1}=p_1\cdot a_{n+k-2}+p_2\cdot a_{n+k-3}+\cdots+p_{k-1}\cdot a_n+q\cdot\alpha^n$，則存在 n 的 $k-1$ 次多項式 $f_{k-1}(n)$，使 $a_n=f_{k-1}(n)\cdot\alpha^n$。

證明：由 $a_{n+k-1}=p_1\cdot a_{n+k-2}+p_2\cdot a_{n+k-3}+\cdots+p_{k-1}\cdot a_n+q\cdot\alpha^n$ (1)

$a_{n+k-2}=p_1\cdot a_{n+k-3}+p_2\cdot a_{n+k-4}+\cdots+p_{k-1}\cdot a_{n-1}+q\cdot\alpha^{n-1}$ (2)

(1)－(2)× α 得

$$a_{n+k-1}-\alpha\cdot a_{n+k-2}=p_1(a_{n+k-2}-\alpha\cdot a_{n+k-3})+\cdots+p_{k-1}(a_n-\alpha\cdot a_{n-1})$$

取 $b_n=a_{n+1}-\alpha\cdot a_n$，則有

$$b_{n+k-1}=p_1\cdot a_{n+k-2}+\cdots+p_{k-1}\cdot b_n$$

由命題（$k-1$）－1，知存在 n 的 $k-2$ 次多項式 $f_{k-2}(n)$，使

$$b_n=f_{k-2}(n)\cdot\alpha^n$$

即 $a_{n+1}-\alpha\cdot a_n=f_{k-2}(n)\cdot\alpha^n$

$$\Rightarrow\quad \frac{a_{n+1}}{\alpha^n}-\frac{a_n}{\alpha^{n-1}}=f_{k-2}(n)$$

取 $c_n=\dfrac{a_n}{\alpha^{n-1}}$，則有

$$c_{n+1}-c_n=f_{k-2}(n)$$

因此，數列 c_n 是 n 的 $k-1$ 次多項式，即存在 n 的 $k-1$ 次多項式 $f_{k-1}(n)$，

使 $c_n=\alpha\cdot f_{k-1}(n)$

即 $$a_n = f_{k-1}(n)\cdot\alpha^n$$

其次，再利用命題（$k-1$）-2，我們來證明命題$(k)-1$，即定理2。

證明：由根與係數關係：

$$p_1 = \binom{k}{1}\alpha$$

$$p_2 = -\binom{k}{2}\alpha^2$$

$$p_3 = \binom{k}{3}\alpha^3$$

$$\vdots$$

$$p_k = (-1)^{k-1}\cdot\alpha^k$$

因此，數列 $a_{n+k} = p_1\cdot a_{n+k-1} + p_2\cdot a_{n+k-2} + \cdots + p_k\cdot a_n$ 可以改寫為：

$$a_{n+k} - \binom{k-1}{1}\alpha\cdot a_{n+k-1} + \binom{k-1}{2}\alpha^2\cdot a_{n+k-2} - \cdots + (-1)^{k-1}\cdot\alpha^{k-1}\cdot a_{n+1}$$

$$= \alpha\left[a_{n+k-1} - \binom{k-1}{1}\alpha\cdot a_{n+k-2} + \binom{k-1}{2}\alpha^2\cdot a_{n+k-3} - \cdots + (-1)^{k-1}\cdot\alpha^{k-1}\cdot a_n\right]$$

所以數列 $a_{n+k-1} - \binom{k-1}{1}\alpha\cdot a_{n+k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\cdot\alpha^{k-1}\cdot a_n$ 是以 α 為公比之等比數列，因此存在常數 c，使

$$a_{n+k-1} - \binom{k-1}{1}\alpha\cdot a_{n+k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\cdot\alpha^{k-1}\cdot a_n = c\cdot\alpha^n$$

由命題（$k-1$）-2，知存在 n 的 $k-1$ 次多項式 $f_{k-1}(n)$，使

$$a_n = f_{k-1}(n)\cdot\alpha^n$$

如果方程式具有部分是重根，部分是相異根的話，那麼綜合定理1及定理2的結論就能得到此時之通項的表式了。

參考資料

1. Alan Tucker：Applied Combinatorics.
2. 李純一：遞迴數列，數學傳播第2期。
3. 楊維哲、蔡聰明：普通數學教程。