一九九四年第六屆亞太數學奧林匹亞競試參考解答

中華民國數學奧林匹亞委員會

試題請參閱本刊第 169 期第 41 頁

問題 1［參考解答］：

(1) 先證明 $f(0)=0$：

由條件 (ii) 及 (i) 得

$$2f(0)+1\geqslant 2f(\frac{1}{2})+1\geqslant f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(1)\geqslant f(1)+f(0)$$

再利用 (iii) 及上式知 $f(0)\geqslant 0\geqslant f(0)$

故得 $f(0)=0$

(2) 次證 $f(x)=0$ 在 $x\in(0,1)$ 恆成立：

由條件 (ii) 知 $f(x)\leq 0$，$0<x<1$

若有某一個 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)<0$，則

$1>1+f(x_0)+f(1-x_0)\geqslant f(1)=1$

此爲矛盾，故知 $f(x)=0$ 在 $x\in(0,1)$ 都成立。

(3) 再證明 $f(x+1)=f(x)+1$：

由條件 (i) 及 (iii) 知

$$f(x+1)\geqslant f(x)+f(1)=f(x)+1$$

且 $$f(x)=f((x+1)-1)\geqslant f(x+1)+f(-1)=f(x+1)-1$$

故得 $f(x+1)=f(x)+1$

綜合 (1)、(2)、(3) 得知 $f(x)=[x]$，即 $f(x)$ 爲高斯函數。

問題 2 參考解答（單中杰的解答方式）：

設 G 爲 $\triangle ABC$ 重心，又 O，G，H 三點在 BC 上之投影分別是 M，I，J。

則 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=R$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ……………………(*)

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

令H'爲一點使$\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

則$\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$

$=0$

同理，$\overrightarrow{BH'}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CH'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

又滿足(*)式之H唯一，得$H=H'$

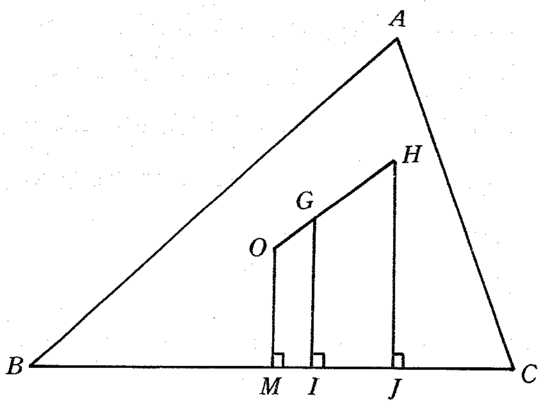
故　$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$　(Euler 線定理)

但G必在$\triangle ABC$內部

⇒　G必在$\triangle ABC$之外接圓內部

⇒　$\overline{OG}<R$，

得證　$\overline{OH}<3R$。



問題3［參考解答］：

(1)　首先證明下列引理

引理：假設$\{p_k\,|\,k=1,2,\cdots\cdots\}$爲所有質數的集合，其中$p_k<p_{k+1}$, $k=1,2,\cdots\cdots$，則當$k\geqslant 3$時，

$$2(p_1p_2\cdots p_k)>p_{k+1}^2$$

證明：(利用數學歸納法證明)當$k=3$時，$2(p_1p_2p_3)=2(2\cdot3\cdot5)=60>7^2=p_4^2$。假設$k>3$，且$2(p_1p_2\cdots p_{k-1})>p_k^2$，則

$$2(p_1p_2\cdots p_k)=2(p_1p_2\cdots p_{k-1})p_k>p_k^2p_k$$

由$k>3$時，$p_k>p_3=5$，以及$2p_k>p_{k+1}$這個事實，得

$$p_k^2p_k>\frac{1}{4}p_{k+1}^2p_k>p_{k+1}^2$$

因此$2(p_1p_2\cdots p_k)>p_{k+1}^2$，得證。

(2)　其次證明　$n\leq 5^2=25$：

假設$n>25$，令p_k表第k個質數。當$k=1,2,3$時，則$n>p_k^2$；假設$k>3$且設$3\leq r<k$時，$n>p_r^2$。由n的條件知，$p_r\,|\,ab$，$r=1,2,\cdots,k-1$。注意$n=a^2+b^2\geqslant 2ab$，因而得$n\geq 2(p_1p_2\cdots p_{k-1})$，次由引理得$n>p_k^2$。

因此，由數學歸納法，得 $n > p_k^2$ 對所有自然數 k 皆成立，這是不可能的，因此 $n \leq 25$。

(3) $n = 2$ 或 $4k+1$ 形式的質數

令 $n = pc$，其中 p 爲 n 的最小質因數

若 $c \neq 1$，則 $p \leq c$，因此 $n = pc \geq p^2$

今由 n 的條件，得 $p \mid ab$。而得 $p \mid a$ 或 $p \mid c$

但 $n = a^2 + b^2 = pc$，從而得 p 爲 a 與 b 的公約數，與 a，b 互質相矛盾。

因此 $c = 1$，即 n 爲質數，由於 n 爲兩互質整數的平方和，因此 $n = 2$ 或爲 $4k+1$ 形式的質數。

(4) 由(2)，(3)，$n = 2, 5, 13, 17$

但 $17 = 1^2 + 4^2$，令 $p = 3$，則 $p \leq \sqrt{17}$，但 $3 \nmid 4$，因此17不合乎條件。

另外 $2 = 1^2 + 1^2$，$5 = 1^2 + 2$，$13 = 2^2 + 3^2$，皆合乎條件。

因此所求的 n 值爲 $n = 2, 5, 13$。

問題4［參考解答(一)］

在複數平面上取一點 $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 使得 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$ 爲有理數（例如 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$，$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$）且 $z \neq 1$，則 $S = \{z^n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 即爲所求，理由如下：

(1) S 爲一無限集合

設 $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{p}{r}$，$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{q}{r}$，$(p, r) = 1$ 且 $p^2 + q^2 = r^2$

則根據棣美佛定理

$$\left(\frac{p}{r} + i\frac{q}{r}\right)^n = \cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}$$

如果上式的值爲1，則 $n > 2$ 且

$$1 = \cos\frac{n\theta}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k}p^{n-2k}q^{2k}}{r^n},$$

因爲 $q^2 \equiv -p^2 \pmod{r^2}$，所以 $r^n \equiv p^n 2^{n-1} \pmod{r^2}$

由此得知 $2\mid r$ ，但這是不可能的，因爲 $p^2+q^2=r^2$ ，且 $(p,r)=1$。

(2) S 爲單位圓上的點的集合，故 S 中的任意三點不共線。

(3) S 中任意兩點的距離皆爲有理數

設 $k>\ell$ ，則

$$|z^k-z^\ell|=|z^\ell||z^{k-\ell}-1|=|z^{k-\ell}-1|$$

因此只要證明 $|z^k-1|$ ，$k=1,2,\cdots$ 爲有理數就可以了，現在

$$\begin{aligned}|z^k-1|&=|\cos k\theta+i\sin k\theta-1|\\&=\sqrt{(\cos k\theta-1)^2+\sin^2 k\theta}\\&=\sqrt{2(1-\cos k\theta)}\\&=\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{k\theta}{2}}=2\left|\sin\frac{k\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

但是再次根據棣美弗定理：

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^k=\cos\frac{k\theta}{2}+i\sin\frac{k\theta}{2}$$

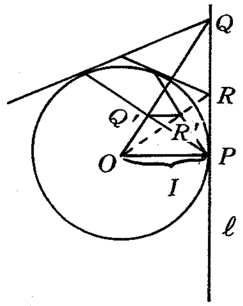
我們知道 $\sin\frac{k\theta}{2}$ 也是有理數，故得證。

[另解]

做一半徑爲 1 的圓，其圓心爲 O，在圓周上取一點 P，過 P 做此圓之切線 ℓ，在 ℓ 上取所有的點 Q，使得 QP 與 QO 皆爲有理數。這種 Q 是存在的，因爲集合

$S=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in N，c^2=a^2+b^2，(c,a)=1\}$

有無限個元素，且此集合 S 與上述所有的 Q 之間一一對應，所以上述的點 Q 有無窮多。



現在以圓 O 爲反演圓，考慮反演變換，且令 Q' 是 Q 的像，則所有 Q' 是共圓。

設 R 是 ℓ 上的另一點，且 RP 與 RO 皆爲有理數，又令 R' 爲其像，則 $OR'\cdot OR=1$

已知 $OQ'\cdot OQ=1$ ，所以 $OR'\cdot OR=OQ'\cdot OQ$ ，或者說 $\frac{OR}{OQ'}=\frac{OQ}{OR'}$ ，因此 $\triangle Q'OR'$ 與 $\triangle ROQ$ 相似，所以 $\frac{Q'R'}{QR}=\frac{OR'}{OQ}$。但是 OR' ，OQ，QR 皆爲有理數，所以 $Q'R'$ 亦爲有理數。

問題5［參考解答］

(1)　設 k 表示任意一個大於1的整數，則 10^k 表示以2爲底的2進制時，其位數爲 $[k\log_2 10]+1$，而當表成5進制時，其位數爲 $[k\log_5 10]+1$。

(2)　其次利用下面的預備定理（Beatty）：

設 x，y 爲兩個正有理數且滿足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 時，令

$P=\{[mx] \mid m\in N\}$，$Q=\{[ny] \mid n\in N\}$

則 $P\cap Q=\phi$，$P\cup Q=N$，即

$\{[x],[2x],[3x],\cdots[mx],\cdots\}$ 與 $\{[y],[2y],[3y],\cdots,[ny],\cdots\}$

爲二互斥集合且此二集合的聯集爲全體的正整數。

注意上述命題 <=> $[\frac{n}{x}]+[\frac{n}{y}]=n-1$ 對每一個正整數 n 都成立。

現證：$[\frac{n}{x}]+[\frac{n}{y}]=n-1$，$(n\in N)$：

當 $n\in N$，則 $\frac{n}{x}$ 與 $\frac{n}{y}$ 恆爲無理數

於是

$$\frac{n}{x}-1<[\frac{n}{x}]<\frac{n}{x}$$

$$\frac{n}{y}-1<[\frac{n}{y}]<\frac{n}{y}$$

故得

$$n-2=(\frac{n}{x}-1)+(\frac{n}{y}-1)<[\frac{n}{x}]+[\frac{n}{y}]<\frac{n}{x}+\frac{n}{y}=n$$

即

$$n-2<[\frac{n}{x}]+[\frac{n}{y}]<n$$

而 $[\frac{n}{x}]+[\frac{n}{y}]$ 爲整數，得證 $[\frac{n}{x}]+[\frac{n}{y}]=n-1$。

(3)　設 $x=\log_5 10$，$y=\log_2 10$，則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，且 x，y 都是無理數，故綜合(1),(2)

本問題得證。