教育部八十二學年度高級中學第三屆數學競賽決賽試題參考解答

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

試題請參閱本刊第 168 期第 28～29 頁

獨立研究

1. 根據投影定律，知 $a\cos B+b\cos A=c$ 。於是，得

$$42=a^2\sin B\cos B+ab\cos A\sin B=ac\sin B$$

由此可知：$\triangle ABC$ 的面積爲 21（$=\frac{1}{2}ac\sin B$）。

2. 我們設 $1\leqslant n_1<n_2<n_3<N\leqslant 20$，由 $n_1!n_2!n_3!=N!$ 得

$$n_1!\,n_2!=(n_3+1)(n_3+2)\cdots N。\qquad (*)$$

因爲 $n_1<n_3$ 且 $n_2<n_3$ ，所以，n_3+1 不能是質數。於是，n_3 的值不能等於1, 2, 4, 6, 10, 12, 16 及 18 。

若 n_3+2 是質數，則只有在 $n_1!n_2!=n_3+1$ 時，(*) 式才能成立。在 1 至 20 的正整數中，能表示成兩個階乘之乘積者只有 2（$=1!2!$），6（$=1!3!$），12（$=2!3!$）。於是，當 n_3+2 是質數時，n_3 的值只能等於 5 或 11 。同時，n_3 的值不能等於 3, 9, 15 及 17 。$n_3=5$ 所對應的解爲（1,3,5,6），$n_3=11$ 所對應的解爲（2,3,11,12）。

最後，只需考慮 n_3 爲 7，8，13，14 及 19 等五種情形。

設 $n_3=7$ ，因爲 11 是質數，所以，(*) 式中的 N 必定小於或等於 10 。因爲 8 與 8×9 都不能表示成兩個階乘的乘積，而 $8\times 9\times 10$ 可表示成 $1!6!$ 或 $3!5!$ ，所以，$n_3=7$ 所對應的解有兩組：（1，6，7，10）與（3，5，7，10）。

因爲 9 與 9×10 都不能表示成兩個階乘的乘積，而 11 是質數，所以，n_3 的值不能等於 8 。

因爲 14, 14×15 與 $14\times 15\times 16$ 都不能表示成兩個階乘的乘積，而 17 是質數，

所以，n_3 的值不能等於13。

設 $n_3=14$。因爲17爲質數，所以，(*)式中的 N 必定小於或等於16。因爲15不能表示成兩個階乘的乘積，而 15×16 可表示成 $2!5!$，所以，$n_3=14$ 所對應的解爲（2，5，14，16）。

因爲 $N\leqslant20$ 而20不能表示成兩個階乘的乘積，所以，n_3 的值不能等於19。

綜合以上結果，可知滿足 $n_1!\,n_2!\,n_3!=N!$ 及 $1\leqslant n_1<n_2<n_3<N\leqslant20$ 的 (n_1,n_2,n_3,N) 共有五組：（1,3,5,6），（2,3,11,12），（1,6,7,10），（3,5,7,10）與（2,5,14,16）。

3. 令 $x_n=\sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r}7^{n-2r}(\sqrt{43})^{2r}$，$y_n\sqrt{43}=\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2r+1}7^{n-2r-1}(\sqrt{43})^{2r+1}$，

則 x_n 與 y_n 都是正整數，而且

$$(7+\sqrt{43})^n=x_n+y_n\sqrt{43},$$
$$(7-\sqrt{43})^n=x_n-y_n\sqrt{43}。$$

因爲 $0<7-\sqrt{43}<1$，所以，對每個正整數 n，恆有 $0<(7-\sqrt{43})^n<1$ 及 $0<1-(7-\sqrt{43})^n<1$。因爲

$$(7+\sqrt{43})^n+(7-\sqrt{43})^n=2x_n,$$
$$(7+\sqrt{43})^n=(2x_n-1)+(1-(7-\sqrt{43})^n)$$

所以，$(7+\sqrt{43})^n$ 的整數部分爲 $2x_n-1$，小數部分爲 $1-(7-\sqrt{43})^n$。於是，不論 n 是任何正整數，$(7+\sqrt{43})^n$ 的整數部分都是奇數。

4. 將五個瓶子分別編上1，2，3，4，5號。然後從1號瓶取1個彈珠，2號瓶取2個彈珠…等等，將所得15個彈球稱重量。若所得重量爲（$165-k$）公克，$k=1,2,3,4$ 或5，則第 k 號瓶子的彈珠每個的重量都是10公克。

5. 設有二多項式

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq0;$$
$$q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\quad b_m\neq0。$$

使得 $\log_{10}x=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 對所有正實數 x 都成立。因爲 $\lim_{x\to+\infty}\log_{10}x=+\infty$，所以，$n>m$。

對每個正實數 x 及每個正整數 k，因爲 $\log_{10}x^k=k\cdot\log_{10}x$，所以，可得

$$\frac{p(x^k)}{q(x^k)} = k\cdot\frac{p(x)}{q(x)}$$

$$p(x^k)q(x) = k\cdot q(x^k)p(x)\text{ 。}$$

因爲上式對所有正實數 x 都成立，所以，$p(x^k)q(x)$ 與 $kq(x^k)p(x)$ 兩多項式相等，亦即：兩多項式的次數相等且同次項的係數相同。但這是不可能的，因爲當 $k>1$ 時恆有 $kn+m>km+n$，所以，$p(x^k)q(x)$ 的項 $a_nb_mx^{kn+m}$ 應等於0，即 $a_nb_m=0$，此與 $a_n\neq0$ 且 $b_m\neq0$ 的假設矛盾。

由此可知：$\log_{10}x$ 不能表示成兩多項式的商。

6. 我們就一般情形來證明：設 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是不全爲0的 k 個非負實數，而 m 與 n 爲二正整數。若 $m>n$，則

$$(x_1^m+x_2^m+\cdots+x_k^m)^n\leqslant(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_k^n)^m\text{ 。}$$

證：令 $p=\frac{m}{n}$，則 $p>1$。對每個 $i=1, 2, \cdots, k$，令

$$u_i=\frac{x_i^n}{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_k^n}\text{ 。}$$

顯然地，$0\leqslant u_i\leqslant1$。因爲 $p>1$，所以，$0\leqslant u_i^p\leqslant u_i$。將 k 個不等式相加，即得

$$0\leqslant u_1^p+u_2^p+\cdots+u_k^p\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_k=1\text{ 。}$$

兩端乘以 $(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_k^n)^p$，得

$$0\leqslant x_1^{np}+x_2^{np}+\cdots+x_k^{np}\leqslant(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_k^n)^p\text{ 。}$$

兩端 n 次方，即得

$$0\leqslant(x_1^m+x_2^m+\cdots+x_k^m)^n\leqslant(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_k^n)^m\text{ 。}$$

更進一步地，若 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 中至少有兩個爲正數，則“$\leqslant$”可改爲“$<$”。設 $x_1>0$ 且 $x_2>0$，則 $0<u_1<1$ 且 $0<u_2<1$，$0<u_1^p<u_1$ 且 $0<u_2^p<u_2$。於是，得 $u_1^p+u_2^p+\cdots+u_k^p<u_1+u_2+\cdots+u_k=1$。

7. 依定義，$P_{17}(x)=P_0(x-1^2-2^2-\cdots-17^2)=P_0(x-1785)$。亦即：

$$P_{17}(x)=(x-1785)^3+251(x-1785)^2-32(x-1785)+8$$

於是，$P_{17}(x)$ 中 x 的係數爲

$$3\cdot(1785)^2-2\cdot251\cdot1785-32=8662573\text{ 。}$$

8. 依定義，可知

$$x_1=\begin{cases}2x_0 & 若\ 0\leqslant x_0<\dfrac{1}{2}\ ;\\ 2x_0-1, & 若\ \dfrac{1}{2}\leqslant x_0<1\ 。\end{cases}$$

因爲當 $0\leqslant x_0<\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant x_0<\frac{3}{4}$ 時，恆有 $0\leqslant x_1<\frac{1}{2}$ ；當 $\frac{1}{4}\leqslant x_0<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{4}\leqslant x_0<1$ 時，恆有 $\frac{1}{2}\leqslant x_1<1$ ，所以，可得

$$x_2=\begin{cases}4x_0, & 若\ 0\leqslant x_0<\dfrac{1}{4}\ ;\\ 4x_0-1, & 若\ \dfrac{1}{4}\leqslant x_0<\dfrac{1}{2}\ ;\\ 4x_0-2, & 若\ \dfrac{1}{2}\leqslant x_0<\dfrac{3}{4}\ ;\\ 4x_0-3, & 若\ \dfrac{3}{4}\leqslant x_0<1\ 。\end{cases}$$

根據數學歸納法，可證明：對每個正整數 n ， x_n 的表示法如下：當 x_0 滿足 $\frac{i-1}{2^n}\leqslant x_0<\frac{i}{2^n}$ 時，恆有 $x_n=2^n x_0-(i-1)$，其中 $i=1, 2, \cdots, 2^n$ 。

由此可知：當 $\frac{i-1}{2^n}\leqslant x_0<\frac{i}{2^n}$ 時， $x_0=x_n$ 的充要條件是 $x_0=2^n x_0-(i-1)$ 或是 $x_0=\frac{i-1}{2^n-1}$ 。不過，只有在 $i=1, 2, \cdots, 2^n-1$ 時， $\frac{i-1}{2^n-1}$ 才滿足 $\frac{i-1}{2^n}\leqslant\frac{i-1}{2^n-1}<\frac{i}{2^n}$ 。因此，滿足 $x_0=x_n$ 的數共有 2^n-1 個，它們是：

$$0, \frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-1}, \cdots, \frac{2^n-2}{2^n-1}\ 。$$

在本題中，滿足 $x_0=x_4$ 的數共有十五個，它們是： $\frac{k}{15}$ ， $k=0, 1, 2, \cdots, 14$。

9. 根據內切圓的性質，可知

$$\overline{CP}=\frac{1}{2}(b+\overline{CH}-\overline{AH}),$$

$$\overline{CQ}=\frac{1}{2}(a+\overline{CH}-\overline{BH})。$$

於是，得 $\overline{PQ}=\frac{1}{2}|a-b+\overline{AH}-\overline{BH}|$。另一方面，

$$\overline{AH}=b\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c},$$

$$\overline{BH}=a\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}。$$

所以，得 $\overline{PQ}=\frac{1}{2c}(a+b-c)|a-b|$。

10. 設 $a_n=k$，則在 a_n 之前有一項1、二項2、三項3、…、$(k-1)$ 項 $k-1$ 以及若干項 k，所以，可得

$$1+2+3+\cdots+(k-1)\leqslant n-1,$$
$$n\leqslant 1+2+3+\cdots+(k-1)+k。$$

由 $\frac{1}{2}k(k-1)\leqslant n-1$ 得 $k^2-k-2(n-1)\leqslant 0$，所以，$\frac{1}{2}(1-\sqrt{8n-7})\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})$。

由 $n\leqslant\frac{1}{2}k(k+1)$ 得 $k^2+k-2n\geqslant 0$，所以，$k\geqslant\frac{1}{2}(-1+\sqrt{8n+1})$ 或 $k\leqslant\frac{1}{2}(-1-\sqrt{8n+1})$。

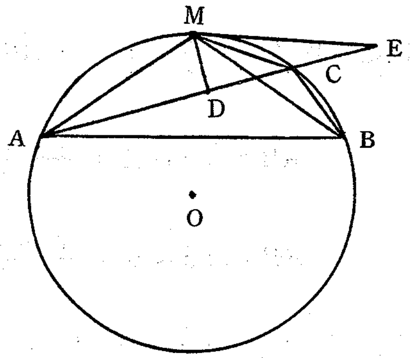
因爲 k 是正整數，所以，$k\leqslant\frac{1}{2}(-1-\sqrt{8n+1})$ 顯然不合。於是，綜合上述結果，可得 $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{8n+1})\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})$。

因爲 $0\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})-\frac{1}{2}(-1-\sqrt{8n+1})=1-\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-\sqrt{8n-7})<1$ 而 k 爲整數，所以，得 $a_n=k=[\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})]$。

競賽(一)

問題一

證：在射線 $\overrightarrow{AC}$ 選一點 E 使 D 點成爲 $\overline{AE}$ 的中點，我們只須證明 $\overline{BC}=\overline{CE}$ 即可。因爲 M 是弧 AMB 的中點，所以，$\overline{AM}=\overline{BM}$。因爲 $\overline{MD}$ 垂直平分 $\overline{AE}$，所以，$\overline{AM}=\overline{EM}$ 且 $\angle MEC=\angle MAC$。因爲 $\angle MAC$ 與 $\angle MBC$ 是對同弧的圓周角，所以，$\angle MAC=\angle MBC$。由此可知 $\overline{BM}=\overline{EM}$ 且 $\angle MBC=\angle MEC$。再因



爲 $\overline{MC}=\overline{MC}$，所以，$\triangle MBC$ 與 $\triangle MEC$ 有兩組對應邊及其中一組對應邊的對應角相等，卽形成 SSA。因爲 $\angle MCE>\angle MDE=90°$，所以，$\triangle MEC$ 是鈍角三角形。因爲 $\angle MAB$ 是銳角（等腰三角形的底角），所以，其補角 $\angle MCB$ 是鈍角，卽 $\triangle MBC$ 是鈍角三角形。兩鈍角三角形 $\triangle MBC$ 與 $\triangle MEC$ 具有 SSA 的關係，可知 $\triangle MBC\cong\triangle MEC$。於是，$\overline{BC}=\overline{EC}$。

問題二

證：任選一個正整數 n，使得 $\frac{1}{n}<3\times10^{-7}$ 且 $n\sqrt{2}<10^7$（例如：令 $n=4\times10^6$）。

考慮下列 $n+1$ 個實數：$0,\ \sqrt{2}-[\sqrt{2}],\ 2\sqrt{2}-[2\sqrt{2}],\ 3\sqrt{2}-[3\sqrt{2}],\ \cdots,\ n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}]$。因爲有 $n+1$ 個數且每個數必屬於 $[0,\frac{1}{n})$、$[\frac{1}{n},\frac{2}{n})$、$\cdots$，$[\frac{n-1}{n},1)$ 中之一，所以，依鴿籠原理，必有兩數 $p\sqrt{2}-[p\sqrt{2}]$ 與 $q\sqrt{2}-[q\sqrt{2}]$ 屬於同一區間（$p\neq q$，$0\leqslant p,q\leqslant n$）。於是，得 $|(p\sqrt{2}-[p\sqrt{2}])-(q\sqrt{2}-[q\sqrt{2}])|<\frac{1}{n}$。令 $a=[q\sqrt{2}]-[p\sqrt{2}]$，$b=p-q$，

則 $|a+b\sqrt{2}|<\frac{1}{n}<3\times10^{-7}$，$|a|\leqslant n\sqrt{2}<10^7$，$|b|\leqslant n<10^7$。又因爲 $b\neq0$ 且 $\sqrt{2}$ 是無理數，所以，$|a+b\sqrt{2}|>0$。

問題三

解：我們就橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 及依逆時針方向在橢圓上有 n 個點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 來討論（$n>1$）。設 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 而焦點 F 的坐標為（c，0），準線的方程式為 $x-\frac{a^2}{c}=0$。設 $A(a,0)$ 表示橢圓的一頂點。根據橢圓的焦點與準線的性質：可知 $\overline{A_kF}=\frac{c}{a}d_k$。若令有向角 $\angle AFA_k$ 的弧度為 θ_k（$0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<2\pi$），則 $d_k=\frac{a^2}{c}-c-\overline{A_kF}\cos\theta_k$。由此得 $\overline{A_kF}=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-c-\overline{A_kF}\cos\theta_k\right)$，

$$\overline{A_kF}=\frac{a-\frac{c^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\cos\theta_k}$$

另一方面，可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k}=\frac{c}{a}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\overline{A_kF}}$$

$$=\frac{c}{a^2-c^2}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{a}\cos\theta_k\right)$$

$$=\frac{nc}{a^2-c^2}+\frac{c^2}{a(a^2-c^2)}\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k$$

因為 $\angle A_1FA_2=\angle A_2FA_3=\cdots=\angle A_{n-1}FA_n=\angle A_nFA_1$，

所以，$\theta_k=\theta_1+(k-1)\cdot\frac{2\pi}{n}$。

(1) 若 n 是偶數：$n=2m$，則得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k=\sum_{k=1}^{m}(\cos\theta_k+\cos\theta_{m+k})$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(\cos\theta_k+\cos(\theta_k+\pi))$$

$$=0$$

(2) 若 n 是奇數：$n=2m+1$，則得

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k=\cos\theta_1+\sum_{k=2}^{m+1}(\cos\theta_k+\cos\theta_{2m+3-k})$$

$$=\cos\theta_1+\sum_{k=2}^{m+1}\left[\cos\left(\theta_1+\frac{2(k-1)\pi}{2m+1}\right)+\cos\left(\theta_1+\frac{2(2m+2-k)\pi}{2m+1}\right)\right]$$

$$=\cos\theta_1+\sum_{k=2}^{m+1}\left[\cos\left(\theta_1+\frac{2(k-1)\pi}{2m+1}\right)+\cos\left(\theta_1-\frac{2(k-1)\pi}{2m+1}\right)\right]$$

$$=\cos\theta_1+2\sum_{k=2}^{m+1}\cos\theta_1\cos\frac{2(k-1)\pi}{2m+1}$$

$$=2\cos\theta_1\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{2m+1}+\cos\frac{4\pi}{2m+1}+\cdots+\cos\frac{2m\pi}{2m+1}\right)$$

$$=2\cos\theta_1\cdot\frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2m+1}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2m+1}\right)}$$

$$=0。$$

請注意：當 $0<x<2\pi$ 時，不論 m 是任何正整數，恆有

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos mx=\frac{\sin\frac{(2m+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

由此可知：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k}=\frac{nc}{a^2-c^2}$。對本題而言，$n=83$，$a=5$，$c=4$，

所以，本題的答案為 $\frac{332}{9}$。

競賽(二)

問題一

證：因為 $p(-x)=p(x)$，所以，多項式 $p(x)$ 不含任何奇數項。

設 $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{2k}$，即 $p(x)=a_n x^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1x^2+a_0$。若 r 與 s 為整數，則

$$p(r)-p(s)=\sum_{k=1}^{n}a_k(r^{2k}-S^{2k})$$

$$=(r^2-s^2)\sum_{k=1}^{n}a_k(r^{2(k-1)}+r^{2(k-2)}s^2+\cdots+r^2s^{2(k-2)}+s^{2(k-1)})$$

因爲 r、s 與每個 a_k 都是整數，所以，r^2-s^2 是 $p(r)-p(s)$ 的因數，$r-s$ 也是 $p(r)-p(s)$ 的因數。

由此可知：37（$=62-25$）是 $p(62)-p(25)$ 的因數，37（$=44-7$）是 $p(7)-p(44)$ 的因數。於是，37 是 $p(62)-p(25)+p(7)-p(44)$ 的因數。其次，62^2-44^2 是 $p(62)-p(44)$ 的因數，25^2-7^2 是 $p(25)-p(7)$ 的因數。因爲 36 是 62^2-44^2 與 25^2-7^2 的一個公因數，所以，36 是 $p(62)-p(44)$ 與 $p(25)-p(7)$ 的公因數。於是，36 是 $p(62)-p(25)+p(7)-p(44)$ 的因數。

因爲 37 與 36 都是 $p(62)-p(25)+p(7)-p(44)$ 的因數，所以，1332（$=[37,36]$）是 $p(62)-p(25)+p(7)-p(44)$ 的因數。

問題二

解：因爲所給的等式對所有實數都成立，所以，令 $x=0$，即得 $a_4=0$。再令 $x=\pi$ 與 $x=-\pi$，即得

$$a_1\pi^3+a_2\pi^2=0\ ,\quad -a_1\pi^3+a_2\pi^2=0$$

由此知 $a_1=a_2=0$。再令 $x=1$ 與 $x=-1$ 得

$$a_3\sin 1+a_5\sin 1+a_6\sin^2 1=0\ ,$$

$$-a_3\sin 1+a_5\sin 1+a_6\sin^2 1=0。$$

由此得 $a_3+a_5=0$，$a_6=0$。再令 $x=2$，得 $4a_3+a_5=0$。兩式聯立卽得

$$a_3-a_5=0$$

因此，可知 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 與 a_6 的值都是 0。

問題三

證：因爲 $\zeta=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$，所以，$\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^6, \zeta^7, \zeta^8, \zeta^9$ 與 $\zeta^{10}(=1)$ 是 1 的十個十次方根。於是，得

$$\prod_{k=1}^{10}(x-\zeta^{k})=x^{10}-1$$

另一方面，$\zeta^2, \zeta^4, \zeta^6, \zeta^8$ 與 $\zeta^{10}(=1)$ 是1的五個五次方根。於是，得

$$\prod_{k=1}^{5}(x-\zeta^{2k})=x^5-1$$ 將兩式相除，即得 $$\prod_{k=1}^{5}(x-\zeta^{2k-1})=x^5+1$$

因為 $x-\zeta^5=x+1$，所以，兩端消去 $x+1$，即得

$$f(x)=(x-\zeta)(x-\zeta^3)(x-\zeta^7)(x-\zeta^9)=x^4-x^3+x^2-x+1\text{。}$$

亦即：$f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$ 是一個整數係數的多項式。

因為 $f(x)$ 的一次因式都不是整數係數多項式，所以，若 $f(x)$ 可分解成兩個至少為一次的整數係數多項式的乘積，則兩個因式必都是二次。設

$$f(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$$

$$\begin{cases} a_1a_2=1 \\ a_1b_2+a_2b_1=-1 \\ a_1c_2+a_2c_1+b_1b_2=1 \\ b_1c_2+b_2c_1=-1 \\ c_1c_2=1 \end{cases}$$

我們可假設 $a_1>0,\ a_2>0$，則由 $a_1a_2=1$ 可得 $a_1=a_2=1$。於是，由第二式得 $b_1+b_2=-1$。因為 $c_1c_2=1$，所以，得 $c_1=c_2=1$ 或 $c_1=c_2=-1$。若 $c_1=c_2=-1$，則由第四式得 $b_1+b_2=1$，此與 $b_1+b_2=-1$ 矛盾。於是，$c_1=c_2=1$。再代入第三式，得 $b_1b_2=-1$。由

$$\begin{cases} b_1+b_2=-1 \\ b_1b_2=-1 \end{cases}$$

所解出的 b_1 與 b_2，一為 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，另一為 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$。此與 b_1, b_2 為整數的假設矛盾。

因此，$f(x)$ 不能分解成兩個至少為一次的整數係數多項式的乘積。