中華民國參加一九九四年第三十五屆
國際數學奧林匹亞競賽
選訓營模擬競試及專題獨立研究試題

中華民國數學奧林匹亞委員會
（陳昭地教授提供）

一、模擬試題

模擬競試(一)試題　（1994年4月14日）

注意事項：

(1) 本試卷共三題，每題35分。

(2) 考試時間：4小時30分（08:00-12:30）。

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

問題1：設$ABCD$爲正方形；分別在$\overline{BC}$、$\overline{CD}$上取異於端點的兩點M、N使得$\overline{BM}=\overline{CN}$；$\overline{AM}$、$\overline{AN}$分別交對角線$\overline{BD}$於$P$、$Q$兩點。試證：以$\overline{BP}$、$\overline{PQ}$與$\overline{QD}$爲邊可作出一三角形且$\overline{PQ}$邊所對的角爲定值。

問題2：設函數$f: R\to R$滿足下列條件：

(1) $f(1)=1994$

(2) $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$

試求所有這樣的函數$f(x)$。

問題3：設a, b, c爲三個給定的正實數，α爲任一實數，

$f(\alpha)=abc(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)$

$g(\alpha)=a^{\alpha+2}(b+c-a)+b^{\alpha+2}(a-b+c)+c^{\alpha+2}(a+b-c)$

試確定$f(\alpha)$與$g(\alpha)$的大小關係。

模擬競試(二)試題　（1994年4月16日8:00～12:30）

問題4：設n, k都是正整數且$k\leq n$；S爲一個由n個不同的實數組成的集合，T爲S

中任取 k 個不同元素相加所得實數組成的集合。

試證：T 至少包含 $k(n-k)+1$ 個不同實數。

問題5：已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}=\overline{BC}$ 且 $\angle A+\angle B=120^\circ$。在四邊形 $ABCD$ 所在的平面上，以 $\overline{CD}$ 爲邊向外作正三角形 QCD，並分別以對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 爲邊而遠離 $\overline{AB}$ 邊的區域作正三角形 PAC 及正三角形 RBD；試證：$\triangle QAB$ 爲正三角形；且 P、Q 及 R 三點共線。

問題6：設 a 爲正整數，且 $(5^{1994}-1)\mid a$。試證：把 a 用5進位數制表示成 $(a_pa_{p-1}\cdots a_2a_1a_0)$ 之 $(p+1)$ 位後，那些不爲0的 a_j $(j=0,1,\cdots,p-1,p)$ 的位數至少有1994個。

模擬競試(三)試題　　（1994年4月18日）

問題7：試證有無限多個正整數 n 具有下列性質：

形成等差數列的任意 n 個整數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，其算術平均數 $\overline{X}$ 及標準差 σ $\left(\sigma=\sqrt{\sum\frac{(a_j-\overline{X})^2}{n}}\right)$ 永遠都是整數。

（師大數學系趙文敏教授提供）

問題8：設 $X=\{0,a,b,c\}$ 爲由四個元素組成的集合，$M(X)=\{f\mid f:X\to X\}$ 爲所有從 X 映至 X 的函數組成的集合。已知在 X 上有如下的"$\oplus$"運算表：

（如 $a\oplus b=c$，$b\oplus c=a$ 等）

$\oplus$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

令 $S=\{f\in M(X)\mid f(x\oplus y\oplus x)=f(x)\oplus f(y)\oplus f(x)$ 對 $x,y\in X$ 都成立$\}$

$I=\{f\in M(X)\mid f(x\oplus x)=f(x)\oplus f(x)$，對每一 $x\in X$ 都成立$\}$

試分別求出集合 S 與集合 I 所含函數的個數。

（成大數學系方源教授提供）

問題9：設 n 爲非負整數且 $T_n:[-1,1]\to R$ 定義如下：

$$T_n(x)=\frac{1}{2^n}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

(1) 試證在 $-1\le x\le 1$ 的範圍內 $T_n(x)$ 表示首項係數爲1的實係數 n 次多項式，且 $T_n(x)\le\frac{1}{2^{n-1}}$。

(2) 設 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是首項係數爲 1 的實係數 n 次多項式，且對每一個 $x\in[-1,1]$，$p(x)>-\dfrac{1}{2^{n-1}}$。試證：在 $-1\leq x\leq 1$ 的範圍內可找到一個 u 使得 $p(u)\geq\dfrac{1}{2^{n-1}}$。

（清大數學系沈昭亮教授提供）

二、專題獨立研究試題

(一) 複數幾何獨立研究專題（1994 年 4 月 12 日　16:00～17:50）

問題 1：設 $z_1,z_2,\cdots,z_{1994}$ 爲複數平面上給定的 1994 個複數點，且設 $S=\sum_{j=1}^{1994}z_j$，$S_j=S-z_j$ 時，$|S|>|S_j|$ 恆成立。試證：可以在此平面上找出一個複數點 z 使得 $\angle zOz_j$ 永遠都是銳角，$j=1,2,\cdots,1994$，其中 O 爲複數平面的原點。

問題 2：設 $A_1(z_1),A_2(z_2),\cdots,A_n(z_n)$ 爲複數平面上依順時方向 n 邊形的頂點（$n\geqslant 3$）。

(1) 試用 z_j 或 $\overline{z_j}$（$j=1,2,\cdots,n$）表示出多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面積。

(2) 設 $n=412$ 且設每一個頂點都是格點，每一條邊 $\overline{A_{j-1}A_j}$（$A_{413}=A_1$）都是平行於坐標軸並知其長都是奇數值；試證：412 邊形 $A_1A_2\cdots A_{412}$ 的面積爲奇數。

問題 3：試證 n 個內角都相等的凸 n 邊形內的任一點到各邊的距離之和等於一個常數。

（趙文敏教授提供）

(二) 函數方程獨立研究專題（1994 年 4 月 13 日　8:00～9:50）

問題 4：設 $f(x,y)$ 爲定義於所有非負整數對 (x,y) 且滿足下列性質的函數：

(1) $f(0,y)=y+1$

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

試求 $f(2,4)$，$f(3,3)$，$f(4,2)$ 及 $(3,1994)$ 之值。

問題 5：設 $F(m,n)$ 爲定義於所有正整數對 (m,n) 且滿足下列條件的函數：

(1) $F(m,m)=2$

(2) $F(m,n)=F(n,m)$

(3) 若$m>n$，則$F(m,n)=\dfrac{m+n}{m}F(m-n,n)$

試求所有這樣的函數$F(m,n)$。

(三) 不定方程獨立研究專題（1994年4月13日 14:00～15:50）

問題6：設一袋中有w個白球（$w\geq 3$），r個紅球，自袋中任取三球，這三球都是白球的機率設爲p。如果原來袋中放一個同樣的白球可以增加的機率爲$p/3$。試求滿足這樣的條件下紅球最多的個數。

問題7：試求$x^2-2y^4-1=0$的所有整數解。

問題8：找出$1+2^x+2^y7^z=7^u$的所有整數解(x,y,z,u)。(師大數學系洪有情教授提供)

(四) 不等式獨立研究專題（1994年4月13日 19:00～20:50）

問題9：設$a_1,a_2,\cdots,a_n$爲n個正實數（$n\geq 2$）且$A=\sum_{j=1}^{n}a_j=1$，$A_j=A-a_j$。

試證：$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+A_j}\geq\frac{n}{2n-1}$

問題10：設x,y都是正實數且知$x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=6$，試證：$x^2y<4$。

問題11：設$p_1,p_2,\cdots,p_n$爲n個有理數，且$p_1,p_2,\cdots,p_n>0$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$爲$2n$個非負實數。試證明下列不等式：

$$(a_1^{p_1}\times a_2^{p_2}\times\cdots\times a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}+(b_1^{p_1}\times b_2^{p_2}\times\cdots\times b_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}$$

$$\leq[(a_1+b_1)^{p_1}\times(a_2+b_2)^{p_2}\times\cdots\times(a_n+b_n)^{p_n}]^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}$$

（沈昭亮教授提供）

(五) 代數獨立研究專題（1994年4月14日 16:00～17:50）

問題12：設$x=p$，$y=q$，$z=r$，$u=s$爲下列線性方程組(*)的唯一解：

(*) $x+a_jy+a_j^2z+a_j^3u=a_j^4$；$j=1,2,3,4$

另設下列方程組(**)也有唯一解：

(**) $x+a_j^2y+a_j^4z+a_j^6u=a_j^8$；$j=1,2,3,4$

試以p,q,r,s表示出(**)的解。

問題13：設$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$的係數$a_j$間滿足$a_0\neq 0$且$|a_j|\leqslant|a_0|$都成立，$j=1,2,\cdots,n$。試證：若$p(z)=0$則$|z|\leq 2$。

(六) 數論獨立研究專題（1994年4月15日 10:00～11:50）

問題14：試求$(19^{94}-1)$的所有形如$2^a\times 3^b$（a,b爲非負整數且$a^2+b^2\neq 0$）的因數之總和。

問題 15：在平面區域 $\{(x,y)\mid x,y>0,xy=1\}$ 中，求函數 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{[x][y]+[x]+[y]+1}$ 所有取得的值之範圍（即求函數 f 的值域），其中 $[\alpha]$ 表不大於 α 的最大整數。

(七) 幾何獨立研究專題（1994年4月15日　16:00～17:50）

問題 16：(1) 設 P 爲正方形 $ABCD$ 內部的一點且知 $\overline{PA}:\overline{PB}:\overline{PC}=1:2:3$，試求 $\angle APB$ 的度數。

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB}=14$，$\overline{BC}=13$，$\overline{AC}=15$；$\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 邊於 D。線段 AD 的延長線交以 D 爲圓心且與 AC 相切的圓於 J，並設 L 爲其切點，試求 $AJ:AL$ 的比值。

問題 17：在任給的四面體中，設 h 爲 4 條高中的最小值，而 d 爲相對兩稜間距離的最小值；試證：$h<2d$。

(八) 遞迴數列獨立研究專題（1994年4月16日　14:00～15:50）

問題 18：有 3 個水箱共放養了 k 條魚，任選兩個有魚的水箱各撈出一條魚放在其他的 1 個水箱中，稱作一次撈魚操作。試確定所有的 k 值，使得無論一開始這 k 條魚如何放養在這 3 個水箱中，經過有限次的撈魚操作後，總可以把這 k 條魚集中到其中的 1 個水箱裏。（取自國立臺灣師大附中國中部陳明揚參加第 34 屆全國中小學科展作品）

問題 19：設 $\langle f_n\rangle$ 爲費氏數列，即 $f_0=f_1=1$，$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，… 試求出所有的實數 a，b 使得 af_n+bf_{n+1} 之值恆爲費氏數列的某一項之值。

問題 20：設 $\langle v_n\rangle$ 爲一數列滿足 $v_n=f_{2n}\ \forall n\geqslant 0$，$\forall n$，即 $v_0=1$，$v_1=2$，$v_2=5$，$v_3=13$，…，試證：

(a) $v_{n+1}=3v_n-v_{n-1}$，$\forall n\geq 1$

(b) $\cot^{-1}v_0=\cot^{-1}v_1+\cot^{-1}v_2+\cot^{-1}v_3+\cdots+\cot^{-1}v_n+\cdots$

(九) 離散數學獨立研究專題（1994年4月16日　19:00～20:50）

問題 21：設 A，B 表示同一平面上二個由有限個點所形成的集合，且知 A，B 沒有共同的點。若 A 中的任意不同兩點連成的線段必含 B 中的點；反之，B 中的任意不同兩點連成的線段也含 A 中的點。試證：A，B 二集合的點都在同一條直線上。

問題 22：給定正方形 $ABCD$，在所有蓋住此正方形的三個等圓中，

(1) 試證：此三個等圓的直徑可以小於對角線 BD 長。

(2) 試確定出這樣的圓之最短直徑長。

問題23：從1到200的自然數中，任取97個數，其中包含一個小於8的數，證明：其中必有相異兩數 y 與 z，使得 y 整除 z。（交大應數系張鎮華教授提供）

問題24：假設 m 與 n 為互質的相異正整數，其中一為奇數，一為偶數。找一個最小的正整數 k，使得我們能找到一個從 Z 映到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的函數 f，對所有 $|x-y|\in\{m,n\}$ 均滿足 $f(x)\neq f(y)$。（交大應數系張鎮華教授提供）

(十) 組合數學獨立研究專題（1994年4月17日 10:00～11:50）

問題25：設 n 為正整數，試證下列 n 個數的乘積 $p=\Pi_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$ 也是正整數。

問題26：設 n 為正整數，試證：$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k!(2n-k)!=\frac{(2n)!}{n+1}$

問題27：試將 $a_n=\sum_{k}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}\ (n\geq 0)$

用 n 的關係式表出。（中研院數學所葉永南教授提供）

(十一) 離散數學獨立研究專題（1994年4月17日 16:00～17:50）

問題28：在學校的某次籃球冠軍賽中，要求每一隊都必須跟其餘的各隊進行一場比賽。每場比賽勝隊得2分，和局各得1分，敗隊得0分；已知有一隊積分比其他各隊都高而得冠軍，但這冠軍隊勝的場次都比其他隊少，問至少有多少隊參加比賽？

問題29：在半徑為2的圓形中，試確定能否放進8個互不重疊且各邊長都為1的正方形？

問題30：平面上給定一個凸1994多邊形 π，設 S 是一切以 π 的頂點為頂點的三角形集合，一點 P 不在 S 中的任何一個三角形的邊上。求證：S 中包含 P 的三角形總數為偶數。（師大朱亮儒教授提供）