

一九九四年第六屆亞太數學奧林匹亞 試題卷

1994 年 3 月 14 日

中華民國數學奧林匹亞委員會

注意事項：

1. 時間分配：4 小時。
2. 配分：每題 7 分，總計 35 分。
3. 不可使用計算器。

問題一、設 $f: R \rightarrow R$ 為滿足下列條件的函數：

- (i) 對所有 $x, y \in R$,

$$f(x) + f(y) + 1 \geq f(x+y) \geq f(x) + f(y)。$$
- (ii) 對所有 $x \in [0, 1)$,

$$f(0) \geq f(x)。$$
- (iii) $-f(-1) = f(1) = 1。$

試求所有這類的函數。

問題二、給定一個三角形 ABC ，若其外心為 O ，垂心為 H ，而外接圓半徑為 R ，試證：
 $\overline{OH} < 3R。$

問題三、設 n 為 $a^2 + b^2$ 形式的整數，其中 a 與 b 為互質的整數，而且滿足：

若 p 為質數且 $p \leq \sqrt{n}$ ，則 p 整除 ab

試求所有這類的 n 值。

問題四、在平面上是否可以找到一個含有無窮多個點的集合，使得其中任意三點不共線且任意兩點間的距離均為有理數？

問題五、設 A 、 B 、 C 為三組數， A 組包含所有 10^k 形式的數，其中 k 為大於或等於 1 的整數，而 B 組及 C 組所含的數分別為 A 組中的各數換成以 2 為底及以 5 為底的數，其形式如下表所示：

A	B	C
10	1010	20
100	1100100	400
1000	1111101000	13000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

對於每一個大於 1 的整數 n ，試證在 B 或 C 兩個集合中，有且僅有一個集合含有唯一的一個數恰為 n 位數。