中華民國參加一九九四年亞太數學奧林匹亞競賽研習營

模擬競試(一)試題

1994年2月2日

中華民國數學奧林匹亞委員會

注意事項：

1. 本試卷共五題，每題滿分7分。
2. 考試時間：4小時(14:00—18:00)。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。

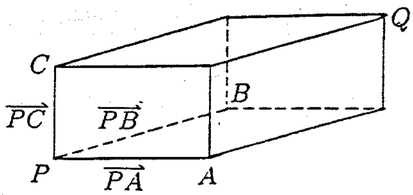
問題一、設 $f(x,y,z)=z+|x-y|+|x+y-2z+|x-y||$。其中 x,y,z 都是實數。試確定 $f(x,y,z)$、$f(y,z,x)$ 和 $f(z,x,y)$ 三者的大小關係。

問題二、試求下列方程式的整數解：

$$[\alpha[\alpha x]]=[\alpha x]+1993$$

其中 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$[a]$ 表示 $\leq a$ 的最大整數；($\sqrt{5}=2.2360\cdots$)

問題三、設 P 是在半徑為 r，球心為 O 的球內的一定點，過 P 點任作三條兩兩互相垂直的射線相交此球的球面於 A、B、C 三點。V 為以 P 為一頂點，三向量 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$ 為三條稜的長方體，Q 為長方體 V 中與 P 點相對的另一頂點(如圖所示)，試證：無論 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$ 如何依給定條件變動，Q 點恆在某一個球面上。



問題四、試證在坐標平面 R^2 上可找到滿足下列條件(*)的有限集合 A：

(*)若 $P\in A$，K_P 表 R^2 上以 P 為圓心，半徑為1的單位圓(不包含圓內的點)，則 A 與 K_P 至少有1994個交點。

問題五、設 R 與 r 分別為 $\triangle ABC$ 外接圓與內切圓的半徑長，試證：

(1) $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

(2) 若 $R=1$ 且 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，A'、B'、C' 分別為自三頂點 A、B、C 向對邊所作三高的垂足，ρ 為 $\triangle A'B'C'$ 的內切圓半徑，則

$\rho\leq 1-\dfrac{1}{3}(1+r)^2$。

模擬競試(二)試題

1994年2月4日

注意事項：

1. 本試卷共五題，每題滿分7分。
2. 考試時間：4小時（08：00—12：00）。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。

問題一、試證：若 a, b, c, d, e 都為正整數，則

$$\frac{a}{b+2c+3d+4e}+\frac{b}{c+2d+3e+4a}+\frac{c}{d+2e+3a+4b}+\frac{d}{e+2a+3b+4c}$$

$$+\frac{e}{a+2b+3c+4d}\geq\frac{1}{2}$$

問題二、有四個水箱共放養了 k 條魚，任選兩個水箱各撈出一條魚放在其他一個水箱中，稱作一次撈魚操作。試確定所有的 k 值，使得無論一開始這 k 條魚如何放養在這四個水箱中，經過有限次的撈魚操作後，總可以把這 k 條魚集中到其中的一個水箱裏。

問題三、一個整數值的數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下：

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+[\sqrt{a_n}],\cdots$$

當 k 為正整數時，求出此數列第（2^k+k-2）項的值。

其中 $[x]$ 表示 $\leq x$ 的最大整數。

問題四、設 $c_1, c_2, \cdots, c_{82}$ 為已知的82個複數，$S=\{z \mid |z|=1\}$ 為複數平面上的單位圓。試證：

(1) 可找到 $z\in S$ 使得 $|c_1z+c_2|=|c_1|+|c_2|$

(2) 可找到 $z\in S$ 使得 $|1989z^{83}+c_1z^{82}+c_2z^{81}+\cdots+c_{82}z+(4-3i)|\geq 1994$

問題五、已知 a, b 為二個正無理數且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，設 $A=\{[na] \mid n\in N\}$，$B=\{[mb] \mid m\in N\}$，其中 N 為全體正整數的集合，$[x]$ 為 $\leq x$ 的最大整數。試證 A、B 形成 N 的一個分割。