從 $(2+\sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$ 談到 $x^2-\alpha y^2=1$ 的正整數解

葉東進
國立科學園區實驗高級中學

一般的高中數學補充教材裡常會出現這樣一道問題：

設 $n\in N$，若 $(2+\sqrt{3})^n = x_n+y_n\sqrt{3}$，其中 $x_n, y_n\in N$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 。

通常的解法不外是：

由 $(2+\sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$

知 $(2-\sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3}$

隨之

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2} \\ \\ y_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{3}\left(\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}\right)$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{3}$

有學生問道：這一道問題，其內容究竟有無蘊函某些特殊意義？

問的眞好！我回答說：粗略來看，既然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{3}$，因此，有理數列 $\frac{x_n}{y_n}$ 似乎可以看作是無理數 $\sqrt{3}$ 的近似數列，也就是說，可以取分數 $\frac{x_n}{y_n}$ 作爲 $\sqrt{3}$ 的近似值。

學生又問：怎會想到 $(2+\sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$ 這樣一個關係？對於一般的無理數

$\sqrt{\alpha}$，其關係式又如何？它有任何直觀意義嗎？它有無涉指到其它的數學問題？

對於非完全平方的正整數α，$\sqrt{\alpha}$是一個無理數。如果$\frac{p}{q}$是$\sqrt{\alpha}$的一個近似分數，則整數點(p,q)將落在直線$x-\sqrt{\alpha}\ y=0$的附近。由於直線$x-\sqrt{\alpha}\ y=0$上不存有$(0,0)$以外的整數點，因此，尋求$\sqrt{\alpha}$的近似分數，便是尋找$x-\sqrt{\alpha}\ y=0$附近的整數點，點取得愈靠近直線，值的近似程度也就愈高。因爲直線$L：x-\sqrt{\alpha}\,y=0$是雙曲線$\Gamma：x^2-\alpha y^2=1$的一條漸近線，我們能否一開始便在Γ上取得一最小正整數點(p_1,q_1)，之後，就沿着Γ而逐步獲得一序列的其它整數點$(p_2,q_2),(p_3,q_3),\cdots$，這些點是一點比一點更靠近$L$，相對的，分數$\frac{p_n}{q_n}$也就一個比一個更逼近$\sqrt{\alpha}$？

經由上面的分析，我們有了直觀的基礎，就比較容易回答先前所提的那些問題。

一、關係$(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}$的由來及其直觀意義

從現在開始，我們考慮一般的非完全平方的正整數α。

在x軸上取點$P_1=(a_1,0)$，其中a_1爲一有理數，滿足$a_1^2>\alpha$（圖1），過P_1沿y軸方向引直線交曲線$C：y=x^2-\alpha$於點Q_1，過Q_1引直線l_1（其斜率取爲a_1+a_1），l_1與x軸之交點令爲P_2，其坐標記爲$(a_2,0)$；又過P_2沿y軸方向引直線交C於點Q_2，過Q_2引直線l_2（其斜率取爲a_2+a_1），l_2與x軸之交點令爲P_3，其坐標記爲$(a_3,0)$，如此繼續進行，依序得到點列：$P_1,P_2,\cdots,P_k,\cdots$及直線列$l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots$。$P_k$的坐標爲$(a_k,0)$，$l_k$的斜率爲$a_k+a_1$。

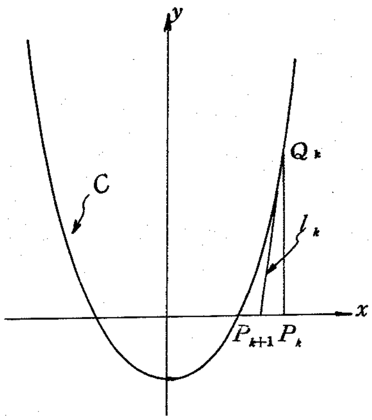

圖 1

l_k的方程式爲

$$y-a_k^2+\alpha=(a_k+a_1)(x-a_k)$$

其x截距爲a_{k+1}，

$$a_{k+1}=a_k+\frac{-a_k^2+\alpha}{a_k+a_1}=\frac{a_ka_1+\alpha}{a_k+a_1}$$

因 a_1 爲有理數，隨之 a_2，a_3，…，a_n 均爲有理數。

把 a_k 用分數 $\frac{x_k}{y_k}$ 表示，則有

$$\frac{a_k a_1+\alpha}{a_k+a_1}=\frac{\frac{x_k}{y_k}\cdot\frac{x_1}{y_1}+\alpha}{\frac{x_k}{y_k}+\frac{x_1}{y_1}}=\frac{x_k x_1+\alpha y_k y_1}{x_k y_1+y_k x_1}$$

如果我們取 $x_{k+1}=x_k x_1+\alpha y_k y_1$，$y_{k+1}=x_k y_1+y_k x_1$，將有

$$(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}，n\text{ 爲任意正整數}$$

其證明如下：

用數學歸納法，$n=1$ 時，顯然成立。

假設　$(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^k=x_k+y_k\sqrt{\alpha}$

則

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^{k+1}\\&=(x_k+y_k\sqrt{\alpha})(x_1+y_1\sqrt{\alpha})\\&=(x_k x_1+\alpha y_k y_1)+(x_k y_1+y_k x_1)\sqrt{\alpha}\\&=x_{k+1}+y_{k+1}\sqrt{\alpha}\end{aligned}$$

以上說明了關係 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}$ 產生的背景及其直觀意義。

此外，由　$(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}$　可推得

$$(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n-y_n\sqrt{\alpha}$$

上面二式相乘得　$(x_1^2-\alpha y_1^2)^n=x_n^2-\alpha y_n^2$

因此，如果一開始所取之 $a_1=\frac{x_1}{y_1}$ 滿足 $x_1^2-\alpha y_1^2=1$，則所有之 (x_n,y_n) 亦將滿足 $x_n^2-\alpha y_n^2=1$，隨之有 $(\frac{x_n}{y_n})^2-\alpha=\frac{1}{y_n^2}$，因此，當 $n\to\infty$ 時，$\frac{x_n}{y_n}\to\sqrt{\alpha}$。就是說，如果我們在雙曲線 Γ：$x^2-\alpha y^2=1$ 上首先取點 (x_1,y_1)，經由關係 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}$ 所逐次取得之點 (x_n,y_n) 是沿着 Γ 而逐漸靠近直線 $x-\sqrt{\alpha}\,y=0$。

二、$(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}$ 與不定方程 $x^2-\alpha y^2=1$ 的正整數解的關係

前面提過，如果正整數對 (x_1,y_1) 滿足 $x_1^2-\alpha y_1^2=1$ 的話，則經由關係

$(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n=x_n+y_n\sqrt{\alpha}$所取得的正整數對$(x_n, y_n)$亦將滿足$x_n^2-\alpha y_n^2=1$。反過來，我們也有下面的定理。

定理： 設α爲非完全平方的正整數，若數對$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_k, y_k), \cdots$是$x^2-\alpha y^2=1$的所有正整數解，其中$x_1<x_2<\cdots<x_k<\cdots$, $y_1<y_2<\cdots<y_k<\cdots$, 則對任意正整數$n$，恆有$x_n+y_n\sqrt{\alpha}=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n$。

證明： (i) 由

$$
\begin{aligned}
&(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^n \\
&=(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1} \\
&=[(x_nx_1-\alpha y_ny_1)+(y_nx_1-x_ny_1)\sqrt{\alpha}](x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1} \\
&=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-1} \qquad \left(\text{取}\begin{cases}x_nx_1-\alpha y_ny_1=a_1\\ y_nx_1-x_ny_1=b_1\end{cases}\right) \\
&=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2} \\
&=[(a_1x_1-\alpha b_1y_1)+(b_1x_1-a_1y_1)\sqrt{\alpha}](x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2} \\
&=(a_2+b_2\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})^{n-2} \qquad \left(\text{取}\begin{cases}a_1x_1-\alpha b_1y_1=a_2\\ b_1x_1-a_1y_1=b_2\end{cases}\right) \\
&\quad\vdots \\
&=(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha}) \qquad \left(\text{取}\begin{cases}a_{n-2}x_1-\alpha b_{n-2}y_1=a_{n-1}\\ b_{n-2}x_1-a_{n-2}y_1=b_{n-2}\end{cases}\right)
\end{aligned}
$$

於是我們得到整數列$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_{n-1}, b_{n-1})$。

(ii)

$$
\begin{aligned}
a_1^2-\alpha b_1^2&=(x_nx_1-\alpha y_ny_1)^2-\alpha(y_nx_1-x_ny_1)^2\\
&=(x_n^2-\alpha y_n^2)(x_1^2-\alpha y_1^2)\\
&=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2^2-\alpha b_2^2&=(a_1x_1-\alpha b_1y_1)^2-\alpha(b_1x_1-a_1y_1)^2\\
&=(a_1^2-\alpha b_1^2)(x_1^2-\alpha y_1^2)\\
&=1
\end{aligned}
$$

同理，我們也得到$a_3^2-\alpha b_3^2=a_4^2-\alpha b_4^2=\cdots=a_{n-1}^2-\alpha b_{n-1}^2=1$

(iii) 由 $x_1^2-\alpha y_1^2=1=(x_1+y_1\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})$

知 $x_1-y_1\sqrt{\alpha}<1$

隨之，由 $(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_1-y_1\sqrt{\alpha})=a_1+b_1\sqrt{\alpha}$

知 $x_n+y_n\sqrt{\alpha}>a_1+b_1\sqrt{\alpha}$ (1)

另外，由 $x_n^2-\alpha y_n^2=1=a_1^2-\alpha b_1^2$

$\Rightarrow$ $(x_n+y_n\sqrt{\alpha})(x_n-y_n\sqrt{\alpha})=(a_1+b_1\sqrt{\alpha})(a_1-b_1\sqrt{\alpha})$

得 $x_n-y_n\sqrt{\alpha}<a_1-b_1\sqrt{\alpha}$

即　　$-x_n+y_n\sqrt{\alpha}>-a_1+b_1\sqrt{\alpha}$　　(2)

由(1)與(2)推得　　$y_n>b_1$

再由　　$x_n^2-\alpha y_n^2=a_1^2-\alpha b_1^2\ (=1)$

$\Rightarrow$　　$x_n^2-a_1^2=\alpha(y_n^2-b_1^2)$

推得　　$x_n>a_1$　（其中 $a_1>0$，$b_1>0$ 可從下面第 (iv) 的討論得知）

同理，我們有

$$\begin{cases}a_1>a_2\\ b_1>b_2\end{cases},\ \begin{cases}a_2>a_3\\ b_2>b_3\end{cases},\cdots,\ \begin{cases}a_{n-2}>a_{n-1}\\ b_{n-2}>b_{n-1}\end{cases}$$

(iv) 點 $H_1(x_1,y_1)$ 及點 $H_n(x_n,y_n)$ 落在 Γ：$x^2-\alpha y^2=1$ 上的第一象限部分，而直線 L：$x-\sqrt{\alpha}\,y=0$ 是 Γ 的一條漸近線，因此有

L 的斜率 $>OH_n$ 的斜率 $>OH_1$ 的斜率（圖2）

即　　$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}>\frac{y_n}{x_n}>\frac{y_1}{x_1}$$

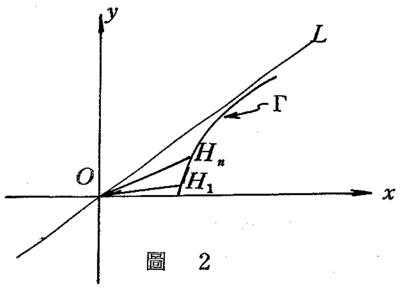

圖　2

所以　　$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{y_n}{x_n}\cdot\dfrac{y_1}{x_1}\\ y_nx_1-x_ny_1>0\end{cases}$$

於是有　　$a_1>0$，$b_1>0$

但已知 (x_1,y_1) 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的初始正整數解，因此有 $a_1\geqslant x_1$，$b_1\geqslant y_1$，同理，有

$$\begin{cases}a_2\geqslant x_1\\ b_2\geqslant y_1\end{cases},\ \begin{cases}a_3\geqslant x_1\\ b_3\geqslant y_1\end{cases},\cdots,\ \begin{cases}a_{n-1}\geqslant x_1\\ b_{n-1}\geqslant y_1\end{cases}$$

綜合以上(i)，(ii)，(iii)，(iv)的討論，我們得到整數對 (a_{n-1},b_{n-1})，$(a_{n-2},b_{n-2}),\cdots,(a_1,b_1)$，它們都是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的正整數解，且滿足

$$x_1\leqslant a_{n-1}<a_{n-2}<\cdots<a_2<a_1<x_n$$

$$y_1\leqslant b_{n-1}<b_{n-2}<\cdots<b_2<b_1<y_n$$

但是已知整數對 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的首 n 組正整數解，它們滿足

$$\begin{cases}x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n\\ y_1<y_2<y_3<\cdots<y_{n-1}<y_n\end{cases}$$

因此便有

$$\begin{cases} (a_1, b_1) = (x_{n-1}, y_{n-1}) \\ (a_2, b_2) = (x_{n-2}, y_{n-2}) \\ \quad\vdots \\ (a_{n-1}, b_{n-1}) = (x_1, y_1) \end{cases} \tag{3}$$

而從(i)的討論中，我們得到

$$(x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})$$

再由(3)中的最後一式，我們復得到

$$\begin{aligned}(x_n + y_n\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n &= (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})(x_1 - y_1\sqrt{\alpha}) \\ &= x_1^2 - \alpha y_1^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

另外，我們也有

$$(x_1 + y_1\sqrt{\alpha})^n (x_1 - y_1\sqrt{\alpha})^n = (x_1^2 - \alpha y_1^2)^n = 1^n = 1$$

比較上面兩個結果，則得到

$$(x_1 + y_1\sqrt{\alpha})^n = x_n + y_n\sqrt{\alpha}$$

綜合上面的定理及前面的敘述，我們獲得 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n = x_n + y_n\sqrt{\alpha}$ 與不定方程 $x^2+\alpha y^2=1$ 的正整數解之間的關係如下：

如果 (x_1, y_1) 是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的初始正整數解，則經由 $(x_1+y_1\sqrt{\alpha})^n = x_n + y_n\sqrt{\alpha}$ 所取得之所有正整數對 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$ 便是 $x^2-\alpha y^2=1$ 的所有正整數解。