# 台北市八十二學年度高級中學
# 物理科競賽試題及參考答案

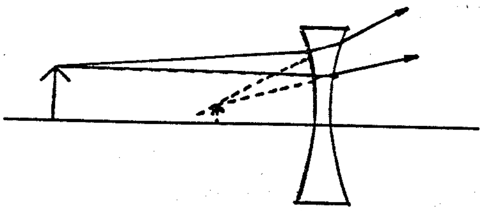
（82年11月30日）

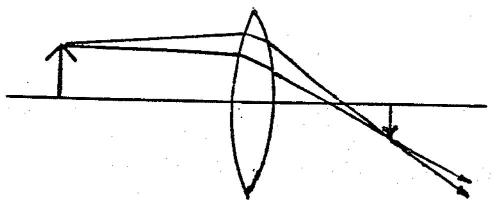
林明瑞
國立臺灣師範大學物理系

## 實驗試題—透鏡的焦距

1. 說明：

物體經透鏡折射後的成像情形，可利用光的直線傳播性質予以解釋。在下圖中，不論透鏡所形成的像爲實像或虛像，若能定出兩條成像的折射光線，便能準確的測出像的位置。





2. 器材：

(1) 凹透鏡一個
(2) 複合透鏡一組
（由兩個凸透鏡緊貼組成）
(3) 保利綸板二片
(4) 大張白色硬紙一張
(5) 大頭釘一盒
(6) 米尺一具
(7) 鉛筆一支
(8) 小刀一支
(9) 座標紙五張
(10) 答案紙十張

3. 問題：

(a) 測出凹透鏡的焦距
(b) 測出複合透鏡的焦距

［提示］ 利用所提供的器材，在保利綸板上固定好透鏡，以一支大頭釘爲物，取另

兩支大頭釘定出其經透鏡折射後的光線，並測出所成像的位置。

在答案紙上，依序回答下列各題：

(1) 在保利綸板上固定透鏡時，應做何考慮？

(2) 列表記錄五組物距和像距的實驗數據（包括凹透鏡和複合透鏡）。

(3) 在座標紙上，以（物距）$^{-1}$ 爲橫座標，（像距）$^{-1}$ 爲縱座標，標出(2)題中各組數據點，並求出最佳直線。

(4) 根據(3)題的圖線，求出透鏡的焦距。

(5) 按提示的方法，可否測出實像的位置？若可，在實驗時應做何考慮和安排？

## 理論試題

1. 如圖一所示，有兩物體，其質量分別爲$m_1$和$m_2$，以輕彈簧連接，垂直豎立在桌面上。若以力下壓在$m_1$上，則彈簧收縮。當力除去時，則彈簧將反跳，若欲使$m_2$跳離桌面，則起先壓在$m_1$上的力，其最小値應爲若干？

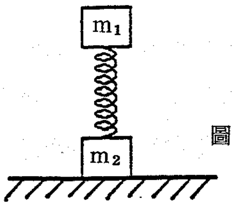



圖 一

2. 如圖二所示，一質量爲m，邊長分別爲 a 和 b 的長方體，起先靜止壓在兩個置於對稱位置的相同彈簧上，彈簧的間距爲 D，力常數爲 k，若施一外力使物體稍向一邊傾斜，然後除去外力，使其自由運動，試求該物體的運動週期（包括振動和轉動）。

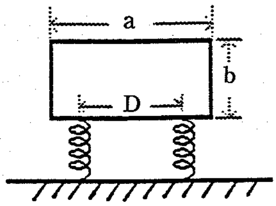



圖 二

3. 如圖三所示，一半徑爲 R 的密閉圓柱容器，以一定的角加速度 $\omega$ 繞其長軸轉動。

(a) 如果容器內裝滿密度爲 d 的液體，試求液壓 P 和徑距 r（即與長軸間的距離）之間的關係式。

(b) 如果圓柱容器內僅容有分子質量爲 m，溫度爲 T 的理想氣體，試求氣體壓力 P 和徑距 r 之間的關係式。

（註：$\int dx/x = \ln x +$ 常數）

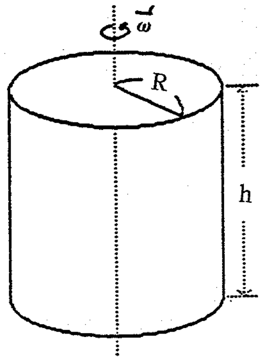



圖 三

4. 如圖四所示，有兩個帶正電的金屬球A和B，半

徑分別爲 $r_1$ 和 $r_2$ 。在未以電阻R的導線連接前，A和B兩球的帶電量分別爲$Q_1$和$Q_2$ 。試求：

(a) 在以導線接通後，兩球最後的帶電量各爲若干？

(b) 有多少電能消耗在電阻R上？

(c) 通過導線的電流 I 和時間 t 之間的關係式爲何？

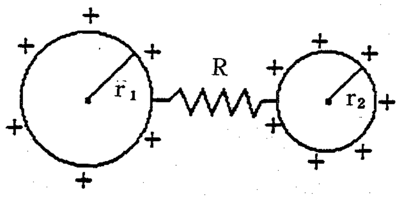



圖 四

## 參考答案

### 實驗試題

作法：

把硬紙平舖固定在保利綸板上，在紙板上挖槽，將半個透鏡面垂直嵌入槽內，使透鏡的主軸與紙面齊平。在紙面畫出主軸線，取一大頭釘爲物，垂直插在主軸上。然後自透鏡的另一邊觀察所成的像。

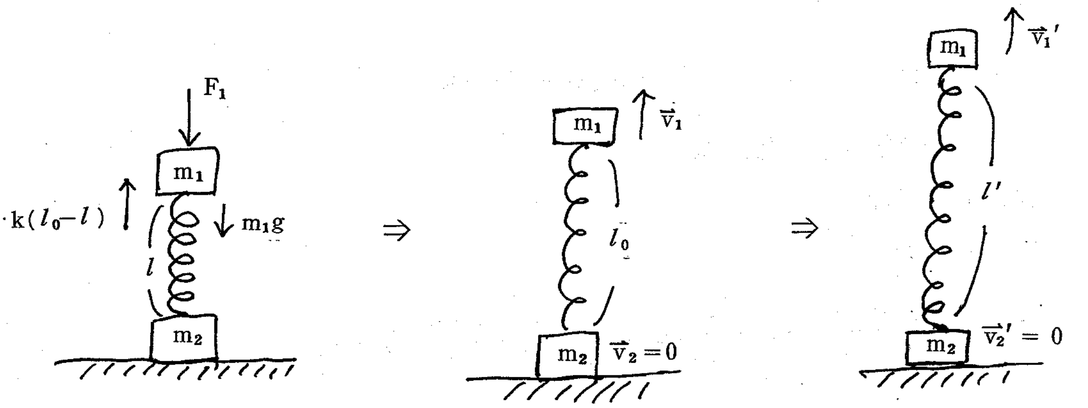
若所用透鏡爲凹透鏡，則鏡內所見之像應爲一正立縮小的像，此時取第二支大頭釘任意插在主軸線兩旁附近的位置上，再取第三支大頭釘定出像和第二支大頭釘所成的視線（就是使鏡內所見的像和此兩支大頭釘形成一直線）。此視線即爲成像的折射光線之一。應用同法，再定出另一條折射光線。此兩線的延伸線，若觀測無誤的話，應交叉在主軸線上，交叉點即爲虛像的位置。

若所用的透鏡爲凸透鏡，則所成的像可能爲虛像或是實像，視物所在的位置而定。如果是虛像，則虛像位置的測定如前法所述。如果是實像，則由於像爲倒立，垂直正插的大頭釘，其所成像的像將在板面之下，無從觀察。此時，可將大頭針尾部折成90度，使成L型，針頭插入紙板，針身則與紙板平行，略高於紙板，並將嵌入紙板內的透鏡，往上提高少許，即可在鏡內見到一倒置的像，此爲實像，仿照前法定出兩條折射光線，其交叉點即爲實像的位置。

### 理論試題

1. 考慮下列三種圖示的情況：

由力學能守恆定律知




有外力下壓時
$F_1 + m_1 g = k(l_0 - l)$
( $m_1$ 和 $m_2$ 靜止 )

彈簧恢復至原長 $l_0$ 時

當 $m_2$ 剛要跳離桌面時
$k(l' - l_0) = m_2 g$

$$\frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 + m_1 g l = \frac{1}{2}k(l^1 - l_0)^2 + m_1 g l^1 + \frac{1}{2}m_1 v_1{}^{1\,2} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

若 $\frac{1}{2}m_1 v_1{}^{1\,2} = 0$，則所需的下壓力 $F_1$ 為最小。得

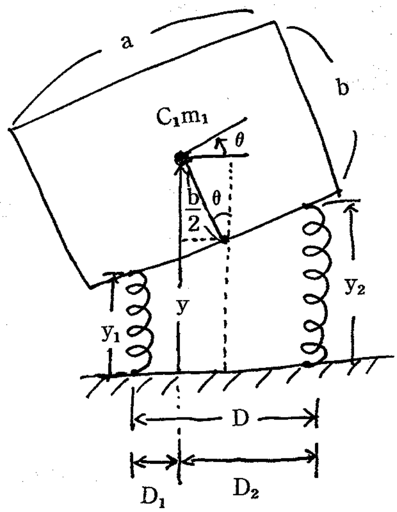
$$\begin{cases} \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 + m_1 g l = \frac{1}{2}k(l^1 - l_0)^2 + m_1 g l^1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ k(l^1 - l_0) = m_2 g & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

由(2)、(3)兩式聯立，解得：

$$l_0 - l = \frac{(m_2 + 2m_1)g}{k} \quad \cdots (4)$$

因此　$F_1 = k(l_0 - l) - m_1 g$
$\quad\quad = (m_1 + m_2)g$

欲使 $m_2$ 跳離桌面，則所需的最小下壓力為 $(m_1 + m_2)g$。




2. 質心的移動方程式為：

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k(y_1 - l_0) - k(y_2 - l_0) - mg \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

其中 $l_0$ 為彈簧的自然長度。

長方體繞質心而轉的轉動方程式爲：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=k(y_1-l_0)D_1-k(y_2-l_0)D_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

I 爲長方體繞質心而轉的轉動慣量。

就移動部分而言：

由圖可知：

$$y=\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+\frac{b}{2}\cos\theta \simeq \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+\frac{b}{2}$$

得 $$y_1+y_2 \simeq 2\left(y-\frac{b}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

將(3)式代入(1)式，經整理後得：

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+2k\left(y-\frac{b}{2}-l_0+\frac{mg}{2k}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

令 $$y^1 \equiv y-\frac{b}{2}-l_0+\frac{mg}{2k}$$

則(4)式變爲：

$$\frac{d^2y^1}{dt^2}+\left(\frac{2k}{m}\right)y^1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

此爲簡諧振動方程式，其振動頻率爲 $\sqrt{\frac{2k}{m}}$，振動週期爲 $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$。

就轉動部分而言：

由圖知：

$$D_1=\frac{D}{2}-\frac{b}{2}\sin\theta \simeq \frac{D}{2}-\frac{b}{2}\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$D_2=\frac{D}{2}+\frac{b}{2}\sin\theta \simeq \frac{D}{2}+\frac{b}{2}\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

把(6)、(7)式代入(2)式，得

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} \simeq \frac{kD}{2}[(y_1-l_0)-(y_2-l_0)]-\frac{kb\theta}{2}[(y_1-l_0)+(y_2-l_0)] \cdots (8)$$

但 $$(y_1-l_0)-(y_2-l_0)=y_1-y_2=-D\tan\theta \simeq -D\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

$$(y_1-l_0)+(y_2-l_0)=(y_1-l_0^1)+(y_2-l_0^1)+2(l_0^1-l_0) \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

其中 $l_0^1$ 爲彈簧在平衡位置時的長度。在平衡時，

$$2k(l_0^1-l_0)=mg$$

又 $y_1-l_0^1=y_2-l_0^1 \simeq (\frac{D}{2})\theta$

因此，(10)式可改寫爲：

$$(y_1-l_0)+(y_2-l_0) \simeq D\theta+\frac{mg}{k} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

把(9)、(11)兩式代入(8)式，得：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+(\frac{kD^2}{2}+\frac{bmg}{2})\theta+(\frac{kbD}{2})\theta^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

由於 $\theta$ 很小，$\theta^2$ 項可忽略，(12)式變爲：

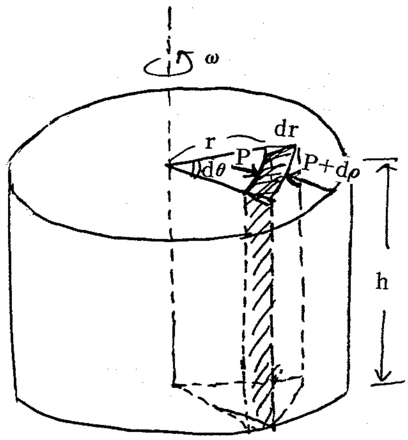
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+(\frac{kD^2+bmg}{2I})\theta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

其中 $I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

由(13)式可知轉動頻率爲 $\sqrt{\frac{6(kD^2+bmg)}{m(a^2+b^2)}}$

其轉動週期爲 $2\pi\sqrt{\frac{m(a^2+b^2)}{6(kD^2+bmg)}}$

3.(a) 若容器內裝滿密度爲 $\rho$ 的液體，考慮陰影部分液體的受力情形：




$$[(P+dP)-P]hrd\theta$$
$$=\rho(hrd\theta)(dr)r\omega^2$$

得 $dP=\rho\omega^2 rdr$

$$\int_{P_0}^{P}dP=\int_0^r \rho\omega^2 rdr$$

因爲液體是不可壓縮的，所以密度 $\rho$ 爲一常數。

上式積分後可得

$$P(r) = P_0 + \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2$$

其中 $P_0$ 爲在中心軸處的液體壓力。

(b) 若容器內所裝者僅爲氣體，則因氣體可以壓縮，密度 $\rho$ 不再是常數，而爲 r 座標的函數。即

$$\rho = P(r) = m\,n(r)$$

其中 $n(r)$ 爲氣體分子密度，m 爲氣體分子質量。

依據理想氣體方程式

$$PV = NkT$$

$$P = \frac{N}{V}kT = nkT = \left(\frac{\rho}{m}\right)kT$$

即 $\rho(r) = \left(\frac{m}{kT}\right)P(r)$

由 $dP = \rho\,\omega^2 r\,dr = \frac{mP}{kT}\omega^2 r\,dr$

得 $\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = \frac{m\omega^2}{kT}\int_0^r r\,dr$

積分後，得 $P(r) = P_0 e^{\frac{mr^2\omega^2}{2kT}}$

4.(a) 在平衡狀態時，兩導體間的電位差爲零。

設 $Q_1'$，$V_1'$ 和 $Q_2'$，$V_2'$ 分別爲兩金屬球在平衡時的電量和電位，則

$$V_1' = V_2'$$

或 $\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2}$ ………………………… (1)

由電荷守恆知

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)、(2)兩式聯立，解得

$$\begin{cases} Q_1' = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)(Q_1 + Q_2) \\ Q_2' = \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)(Q_1 + Q_2) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由電容定義知

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_1}{\dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}} = 4\pi\epsilon_0 r_1$$

同理， $C_2 = 4\pi\epsilon_0 r_2$

(3)式可寫爲：

$$Q_1' = \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)(Q_1 + Q_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$Q_2' = \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)(Q_1 + Q_2)$$

(b) 在導線接通前，總電能爲 $W = \dfrac{Q_1^2}{2C_1} + \dfrac{Q_2^2}{2C_2}$

在導線接通後，總電能爲 $W' = \dfrac{Q_1'^2}{2C_1} + \dfrac{Q_2'^2}{2C_2}$

因此消耗在電阻 R 上的電能爲

$$\Delta W = W - W'$$

$$= \left(\frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}\right) - \left(\frac{Q_1'^2}{2C_1} + \frac{Q_2'^2}{2C_2}\right) \cdots\cdots\cdots (5)$$

將(4)式代入(5)式，可得

$$\Delta W = \frac{(r_2 Q_1 - r_1 Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0 r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

(c)

$$I = -C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$I = C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

(6)、(7)兩式可改寫爲

$$\frac{dV_1}{dt} = -\frac{1}{RC_1}(V_1 - V_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{RC_2}(V_1 - V_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

(8) − (9) 得

$$\frac{d}{dt}(V_1 - V_2) = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)(V_1 - V_2)$$

積分 $$\int_{V_1(0)-V_2(0)}^{V_1(t)-V_2(t)} \frac{d(V_1 - V_2)}{V_1 - V_2} = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_0^t dt$$

得 $$V_1(t) - V_2(t) = (V_1(0) - V_2(0))\, e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)t}$$

兩邊除以R，得

$$\frac{V_1(t) - V_2(t)}{R} = \left(\frac{V_1(0) - V_2(0)}{R}\right) e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)t}$$

$$I(t) = I(0)\, e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)t}$$

其中 $$I(0) = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2}\right)$$