教育部八十二學年度高級中學數學競賽複賽試題參考答案

國立臺灣師範大學數學系

試題請參閱本刊 166 期第 28 頁～37 頁。

壹、一、台北市複賽試題(一)

問題 1：在$\triangle PBC$與$\triangle PEF$中，因為$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PE}}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PF}}(=r)$且$\angle BPC=\angle EPF$，所以，$\triangle PBC\sim\triangle PEF$，由此得$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=r$且$\angle PBC=\angle PEF$，$\overline{BC}/\!/\overline{EF}$。同理，$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=r$，$\overline{CA}/\!/\overline{FD}$，$\overline{AB}/\!/\overline{DE}$。因為$\square EFBD$與$\square EFDC$都是平行四邊形，所以，對邊長相等。於是，$\overline{BD}=\overline{EF}=\overline{CD}$，即：$D$是$\overline{BC}$的中點，$E$是$\overline{CA}$的中點，$F$是$\overline{AB}$的中點。由此可知$P$是$\triangle ABC$的重心。

問題 2：設正五角錐的頂點為P，$\overline{AB}$是底(正五邊形)的一邊，$\overline{AB}$的中點為M，底的中心為O。因為P至底的垂足是O，所以，正五角錐的體積是$\overline{PO}$與底面積之乘積的三分之一。因為$\overline{AB}=a$，所以，

$$\overline{OM}=\overline{AM}\times\tan\angle OAB=\frac{a}{2}\times\tan 54^\circ=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}a$$

$$底面積=\frac{5}{2}\overline{AB}\times\overline{OM}=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}a^2 。$$

$$\overline{PM}=\overline{AM}\times\tan\angle PAB=\frac{a}{2}\times\tan 72^\circ=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a 。$$

$$\overline{PO}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{OM}^2}=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}a=2\overline{OM} 。$$

$$正五角錐的體積=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}a\times\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2=\frac{5+2\sqrt{5}}{12}a^3 。$$

※本題使用了下述特別角的三角函數值公式：

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} 。$$

問題3：假設在二十個正方形中，面積最小的四個正方形的邊長分別爲 a_1, a_2, a_3 與 a_4，又假設此四個正方形的面積之和爲 s，因爲二十個正方形兩兩不重疊，所以，其面積總和不大於給定的正方形的面積 l。又因爲此四個最小正方形的面積之和不大於全部面積總和的五分之一，所以，可得 $s \leqslant \frac{1}{5}$。依歌西不等式，得

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^2 \leqslant (l^2+l^2+l^2+l^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2) = 4s 。$$

於是，得 $a_1+a_2+a_3+a_4 \leqslant 2\sqrt{s} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$。

問題4：對任一組正整數 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，令 $S(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中每個正整數的最大正奇因數的和。另外，對每個正整數 n，令 $S_n = S(1, 2, 3, \cdots, 2^n)$。於是，得

$$S_1 = S(1, 2) = 1+1 = 2$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S(1, 2, 3, \cdots, 2^{n+1}) \\ &= S(1, 3, 5, \cdots, 2^{n+1}-1) + S(2, 4, 6, \cdots, 2^{n+1}) \\ &= (1+3+5+\cdots+(2^{n+1}-1)) + S(1, 2, 3, \cdots, 2^n) \\ &= (2^n)^2 + S_n = 4^n + S_n \end{aligned}$$

根據上述遞迴關係式，可得

$$\begin{aligned} S_{1993} &= (S_{1993}-S_{1992}) + (S_{1992}-S_{1991}) + \cdots + (S_3-S_2) + (S_2-S_1) + S_1 \\ &= 4^{1992} + 4^{1991} + \cdots + 4^2 + 4^1 + 2 \\ &= \frac{4^{1993}-4}{3} + 2 \\ &= \frac{4^{1993}+2}{3} \end{aligned}$$

二、台北市複賽試題(二)

問題一：<u>729</u>。　問題二：<u>282449</u>。　問題三：<u>6000000</u>。　問題四：<u>285714</u>

問題五：<u>$0\leqslant x<1$ 與 $2\leqslant x<6$</u>。　問題六：<u>$\sqrt{\frac{7}{10}}$</u>。　問題七：<u>$\left(-\frac{20}{11},\frac{80\sqrt{3}}{11}\right)$</u>

貳、一、台北區複賽試題(一)

1. 設正四面體的頂點為 A、B、C、D。

令 A 表落在直線 $x=y=z$ 上且 x 坐標大於 0 的點，B 表落在 xy 平面上且 x 坐標大於 0 的點，所以，$A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$。

因為 B,C,D 所在的平面與球 $x^2+y^2+z^2=1$ 所截的軌跡為圓，設其半徑為 r，則正三角形 $\triangle BCD$ 內接於此圓，所以其邊長 $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BD}=\sqrt{3}\,r$，亦即此正四面體的稜長為 $\sqrt{3}\,r$，令 $O=(0,0)$，P 為 $\triangle BCD$ 的重心，則 A,O,P 共線，且垂直 B,C,D 平面，且 P 為 $\triangle BCD$ 的外心，所以

$$(\sqrt{3}\,r)^2=(\overline{AB})^2=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2=(\overline{AO}+\overline{OP})^2+(\overline{PB})^2$$
$$=(1+\sqrt{1-r^2})^2+r^2$$

故得 $r=\frac{\sqrt{8}}{3}$，稜長 $=\sqrt{3}\,r=\sqrt{\frac{8}{3}}$，而且 P 的坐標為 $\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}},-\frac{1}{3\sqrt{3}},-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$。

設 B 的坐標為 $(x_1,y_1,0)$，則滿足

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=1 \\ \left(x_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(0-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{8}{3} \\ x_1>0 \end{cases}$$

解得　$x_1=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$，　$y_1=\frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$

設 Q 為 $\overline{CD}$ 之中點，則 $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BP}$，所以 Q 的坐標為 $\left(\frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12},\right.$

$\frac{-2\sqrt{3}}{12}$）。

由於$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{BQ}$且位於$B, C, D$平面上，所以，$\overleftrightarrow{CD}$的參數方程式為

$$\begin{cases} x = (\sqrt{15}+\sqrt{3})\,t + \dfrac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12} \\ y = (\sqrt{15}-\sqrt{3})\,t + \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12} \\ z = -2\sqrt{15}\,t - \dfrac{2\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

當 $t = \pm\frac{1}{12}$ 時，$x^2+y^2+z^2=1$

所以，C的坐標為$\left(0, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\right)$

D的坐標為$\left(\frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\right)$

即四個頂點坐標分別為

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}, 0\right),$$

$$\left(0, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\right)$$

2.（解法一）

由於$(f(x))^m$的展開式仍為每個$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$中取一項相乘之積的總和，所以，

x^{nm}的係數為1（每個$f(x)$都取x^n相乘）

x^{nm-1}的係數為ma_1（其中一個$f(x)$取a_1x^{n-1}，其餘的$m-1$個$f(x)$都取x^n）

x^{nm-2}的係數為$ma_2+\frac{m(m-1)}{1.2}a_1^2$（其中一個$f(x)$取$a_2x^{n-2}$，其餘的$m-1$個$f(x)$都取$x^n$相乘得$ma_2x^{nm-2}$；又其中二個$f(x)$都取$a_1x^{n-1}$，其餘的$m-2$個$f(x)$都取$x^n$相乘得$\frac{m(m-2)}{1.2}a_1^2x^{nm-2}$）

⋮

x^{nm-n} 的係數爲 $ma_n+f_n(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$。此處 $f_n(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$ 爲以 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 爲未定元的有理係數多項式。

因此可依次推得 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是有理數。

（解法二）

由多項式定理 $(y_1+y_2+\cdots y_k)^m=\sum\limits_{\substack{c_1+\cdots+c_k=m\\0\le c_i\le m}}\dfrac{m!}{c_1!\,c_2!\cdots c_k!}\,y_1^{c_1}y_2^{c_2}\cdots y_k^{c_k}$ 知

$$(f(x))^m=\sum_{\substack{b_0+\cdots+b_n=m\\0\le b_i\le m}}\frac{m!}{b_0!\,b_1!\cdots b_n!}(x^n)^{b_0}(a_1x^{n-1})^{b_1}\cdots(a_n)^{b_n}$$

$$=\sum_{\substack{b_0+\cdots+b_n=m\\0\le b_i\le m}}\frac{m!}{b_0!\,b_1!\cdots b_n!}a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_{n-1}^{b_{n-1}}a_n^{b_n}x^{b_0n+b_1(n-1)+\cdots+b_{n-1}}$$

由於 $b_0n+b_1(n-1)+\cdots+b_{n-1}=nm-k$（其中 $k=1,2,\cdots,n$）的非負整數解爲

$b_0=m-1,\quad b_k=1;$

$b_0=m-2,\quad b_1=1,\quad b_{k-1}=1;$

$\vdots$

知對於任意 $k=1,2,\cdots,n$，x^{nm-k} 的係數皆可寫成 $ma_k+f_k(a_1,\cdots,a_{k-1})$ 的形式，其中 $f_k(a_1,\cdots,a_{k-1})$ 爲 $a_1,\cdots,a_{k-1}$ 的有理係數多項式。

故可依次推得 $a_1,\cdots,a_n$ 都是有理數。

3.（解法一）：由題設知

$\alpha^3-9\alpha^2+6\alpha=(f(\alpha))^3-9(f(\alpha))^2+6(f(\alpha))$

$\Rightarrow\ [\alpha-f(\alpha)]\{[\alpha^2+\alpha f(\alpha)+(f(\alpha))^2]-9[\alpha+f(\alpha)]+6\}=0$

令 $f(\alpha)=x$，考慮 x 之二次函數

$g(x)=\alpha^2+\alpha x+x^2-9(\alpha+x)+6$

$\quad=x^2+(\alpha-9)x+(\alpha^2-9\alpha+6)$

則 $g(x)$ 有實根 $\Leftrightarrow$ 其判別式 $\triangle\ge0$。

但 $\triangle=(\alpha-9)^2-4(\alpha^2-9\alpha+6)$

$\quad=-3(\alpha^2-6\alpha-19)$

$\therefore\ \triangle\ge0\Leftrightarrow\alpha^2-6\alpha-19\le0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{6-\sqrt{112}}{2} \leq \alpha \leq \frac{6+\sqrt{112}}{2} \quad 。$$

但當 $\frac{6-\sqrt{112}}{2} \leq \alpha \leq \frac{6+\sqrt{112}}{2}$ 時

$$\alpha^3-9\alpha^2+6\alpha-1993<0$$

所以 $[\alpha^2+\alpha f(\alpha)+(f(\alpha))^2]-9[\alpha+f(\alpha)]+6\neq 0$

因此 $f(\alpha)=\alpha$

設 $f_k(\alpha)=\alpha$

則 $f_{k+1}(\alpha)=f(f_k(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$

故由數學歸納法可知 $f_n(\alpha)=\alpha$, $\forall n \in N$

因此，對於任意的非負整數 n ,

$$(f_n(\alpha))^3-9(f_n(\alpha))^2+6(f_n(\alpha))=1993$$

（解法二）：考慮多項式

$$g(x)=x^3-9x^2+6x-1993$$

$\Rightarrow \quad g'(x)=3x^2-18x+6=3(x^2-6x+2)$

$$g''(x)=6x-18$$

$$g'(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=3\pm\sqrt{7}$$

$$g''(3+\sqrt{7})=6\sqrt{7}>0, \quad g''(3-\sqrt{7})=-6\sqrt{7}<0$$

且 $g(x)$ 在 $x=3+\sqrt{7}$ 有相對極小值，在 $x=3-\sqrt{7}$ 有相對極大值。

但 $g(3-\sqrt{7})<0$, $g(3+\sqrt{7})<0$

且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

故 $g(x)$ 只有一個實根。但 α 及 $f(x)$ 均為 $g(x)$ 之實根，$\therefore f(\alpha)=\alpha$ 。

設 $f_k(\alpha)=\alpha$

則 $f_{k+1}(\alpha)=f(f_k(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$

故由數學歸納法知，$f_n(\alpha)=\alpha$, $\forall \alpha \in N$

因此，對於任意之非負整數 n ,

$$(f_n(\alpha))^3-9(f_n(\alpha))^2+6(f_n(\alpha))=1993 \quad \#$$

（解法三）：考慮方程式

$$x^3-9x^2+6x-1993=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

令　$x=y+3$，則(1)可改寫成

$$y^3-21y-2029=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$\therefore$　$p=-21,\quad q=-2029$

$\Rightarrow$　$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}>0$

所以(2)，只有一個實根

$\Rightarrow$　(1)只有一個實根。

但 α 及 $f(x)$ 均為(1)之實根，$\therefore\ \alpha=f(x)$

設　$f_k(\alpha)=\alpha$

則　$f_{k+1}(\alpha)=f(f_k(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$

故由數學歸納法知，$f_n(\alpha)=\alpha$，　$\forall n\in N$

因此，對於任意之非負整數 n

$$(f_n(\alpha))^3-9(f_n(\alpha))^2+6(f_n(\alpha))=1993$$ #

二、台北區複賽試題(二)

1. $x=abc,\ y=-(ab+bc+ca),\quad z=\pm\sqrt{a+b+c+1}$

2. 305　3. 18　4. $\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{8},\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$　5. $2\sqrt{10}+\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　6. 3840

叁、一、新竹區複賽試題(一)

1. 答案：不存在

假設存在一個函數 $f:\ N\to N$，使 $f(f(n))=n+1\quad \forall n\in N$

則一方面將 $f(n)$ 視為一個正整數，可得

$$f(f(f(n))=f(n)+1\qquad \forall n\in N$$

另一方面，$f(f(n))=n+1$ 兩邊，經過函數 f 的像相等，即

得　$f(f(f(n))=f(n+1)\qquad \forall n\in N$

所以　$f(n+1)=f(n)+1\qquad \forall n\in N$

假設　$f(1)=k$，則由上式可推得

$$f(n+1)=n+k\qquad \forall n\in N$$

所以　$f(f(n+1))=f(n+k)$

由於 $f(f(n+1))=(n+1)+1$

$f(n+k)=(n+k-1)+k$

所以 $n+2=n+2k-1$

$2k=3 \qquad k=\dfrac{3}{2}$

即 $f(1)=\dfrac{3}{2}$

此與 $f: N\to N$ 矛盾，所以上列這種函數不存在。

2. 取一坐標系，使P點爲原點，且使A的坐標爲$A(3,0)$，因爲$\overline{PB}=2$，所以可以假設B點的坐標爲$B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

設M爲$\overline{AB}$的中點，則M的坐標爲$M\left(\dfrac{3+2\cos\theta}{2}, \sin\theta\right)$。因爲要求$\overline{PC}$的最大值，所以這樣的$C$點一定與$P$點在直線$AB$的不同側。

設C點的坐標爲$C(x,y)$，則向量$\overrightarrow{MC}$與$\overrightarrow{AB}$垂直，且其長度爲$\overline{AB}$長度的$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$倍，即 $\overline{MC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$ 。

因此 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\sin\theta, 3-2\cos\theta)$

故 $x=\dfrac{3+2\cos\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\theta=\dfrac{3}{2}+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

$y=\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3-2\cos\theta)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

$$\overline{PC}^2=\left(\frac{3}{2}+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\right)^2$$

$$=13-6\cos\theta+6\sqrt{3}\sin\theta$$

$$=13-12\left\{\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right\}$$

$$=13-12\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$$

要使$\overline{PC}$最大，則 $\dfrac{\pi}{6}-\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ ，即 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

此時 $\overline{PC}^2=25$ ， $\overline{PC}=5$

所以 $\overline{PC}$ 最大是5。

3. 集合 $T=\{\,ma+nb\ ;\ m,n\in N\cup\{0\},\ ma+nb>0\,\}$

(i) 我們先證明a與b互質：

若$(a,b)=d>1$，則$d\mid ma+nb$，所以，當 $k>0$ ，$d+k$時，$k\notin T$。

因爲$d>1$，所以滿足 $k>0$ 且 $d+k$ 的 k有無限多個，所以 $N-T$ 中有無限多個元素，此與假設 $N-T$有35個元素矛盾，所以$(a,b)=1$。

(ii) 其次我們證明若$k\in N,\ k\geqslant ab$，則 $k\in T$：

設$k\in N,\ k\geqslant ab$ 。因爲 $(a,b)=1$

所以存在整數m,n，使 $ma+nb=k$ ，而且我們可以假設$0\leqslant m\leqslant b-1$。

所以 $nb=k-ma\geqslant ab-(b-1)a=a\geqslant 0$

故 $n\geqslant 0$

因爲 $k\in N,\ k=ma+nb,\ m\geqslant 0,\ n\geqslant 0$，所以 $k\in T$ 。

(iii) 現在我們算算看T中小於ab的元素有多少個：

若 $k\in T,\ k<ab$，則k可表示成下列形式：

$k=ma+nb$，其中 $m,n\geqslant 0$ ，且$1\leqslant k<ab$

而且這種表示法是唯一的。理由如下：

若 $k=ma+nb$，其中 $m,n\geqslant 0,\ 1\leqslant k<ab$

且 $k=m'a+n'b$，其中 $m',n'\geqslant 0,\ 1\leqslant k<ab$

則 $(m-m')a=(n'-n)b$

因爲 $(a,b)=1$，所以 $a\mid(n'-n)$，且 $b\mid(m-m')$

因爲 $1\leqslant k<ab$，所以 $0\leqslant n,\ n'<a,\ 0\leqslant m,\ m'<b$

因此得 $n'=n,\ m'=m$

由上面的討論可知T中小於ab的元素的個數爲

$$\sum_{\substack{m,\,n\geq 0\\ 0<ma+nb\leq ab-1}} 1 = a-1+\sum_{m=1}^{b-1}\ \sum_{0\leq n<\frac{ab-ma}{b}} 1$$

$$=a-1+\sum_{m=1}^{b-1}\left\{\left[\frac{ab-ma}{b}\right]+1\right\}$$

$$=a-1+(b-1)a+b-1+\sum_{m=1}^{b-1}\left[\frac{-ma}{b}\right]$$

$$=a-1+(b-1)a-\sum_{m=1}^{b-1}\left[\frac{ma}{b}\right]$$

$$=ab-1-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{b-1}\left\{\left[\frac{ma}{b}\right]+\left[\frac{(b-m)a}{b}\right]\right\}$$

$$=ab-1-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{b-1}(a-1)$$

$$=ab-1-\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

$$=\frac{1}{2}(ab+a+b-3)$$

因此 $N-T$ 的元素的個數爲

$$(ab-1)-\frac{1}{2}(ab+a+b-3)=\frac{1}{2}(ab-a-b+1)$$

$$=\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

$\therefore\ \frac{1}{2}(a-1)(b-1)=35$

$(a-1)(b-1)=70=2\cdot5\cdot7$

因爲 $a>b$，所以 (a,b) 可能的值爲

$(71,2)$, $(36,3)$, $(15,6)$, $(11,8)$

由於 $(36,3)\neq1$，$(15,3)\neq1$，所以 $(36,3)$ 和 $(15,3)$ 不合。

又因爲 $58\notin T$，所以 $(71,2)$ 不合。

故答案爲 $a=11$, $b=8$

二、新竹區複賽試題(二)

1. $\underline{667}$ 2. $\underline{\frac{2}{3}\text{或}\frac{2}{5}}$ 3. $\underline{\left(\frac{y_0^2-px_0}{3p},\ y_0\right)}$ 4. $\underline{\frac{22919}{45402}\left(=\frac{C_6^{44}}{C_6^{49}}\right)}$ 5. $\underline{8}$

肆、一、花蓮區複賽試題(一)

證明題：

1. （證明）：由二項式定理知道存在兩正整數 a，b，使得

$$(\sqrt{11}+\sqrt{18})^{1993}=a\sqrt{11}+b\sqrt{2}$$

且 $(\sqrt{11}-\sqrt{18})^{1993}=a\sqrt{11}-b\sqrt{2}$

因此，$(-7)^{1993}=11a^2-2b^2$

即 $11a^2+7^{1993}=2b^2$

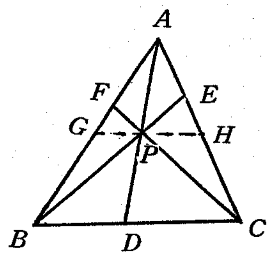
取 $n=11a^2$ 且 $m=7^{1993}$

得 $\sqrt{m+n}+\sqrt{n}=\sqrt{2b^2}+\sqrt{11a^2}$

$$=a\sqrt{11}+b\sqrt{2}=(\sqrt{11}+\sqrt{18})^{1993}$$

2. （證明）：

(a) 如圖過 P 作 $\overline{BC}$ 的平行線分別交 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 於 G 與 H。



令 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=k$

則 $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HC}}=k$ ………… (1)

且 $\dfrac{\overline{GB}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{HC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{k+1}$ …… (2)

$\because$ $\overline{GH}\mathbin{/\!/}\overline{BC}$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{GP}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{FB}}=1-\dfrac{\overline{GB}}{\overline{FB}}=1-\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{\overline{AB}}{\overline{FB}}$（由(2)知 $\overline{GB}=\dfrac{1}{k+1}\overline{AB}$）

$$=1-\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right) \cdots\cdots\cdots (3)$$

同理 $\dfrac{\overline{HP}}{\overline{BC}}=1-\dfrac{1}{k+1}\left(1+\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\right)$ ……… (4)

(3)+(4)得 $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{GP}}{\overline{BC}}+\dfrac{\overline{PH}}{\overline{BC}}=2-\dfrac{1}{k+1}\left(2+\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}+\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\right)$

又 $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP}+\overline{PD}}=\dfrac{k}{k+1}$

$$\therefore\quad \frac{k}{k+1}=2-\frac{1}{k+1}\left(2+\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\right)$$

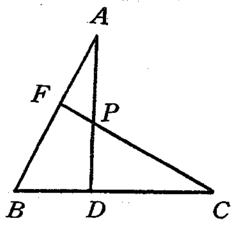
化簡得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}+\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=k=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}$

(b) 同理 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}+\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PE}}$ 及 $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}+\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PF}}$

因此 $$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{PF}}=\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\right)+\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}+\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}\right)+\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}+\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\right)$$
$$=\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}+\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}\right)+\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}+\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\right)+\left(\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}+\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right)$$

令 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=a$，則 $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=\dfrac{1}{a}$，由算術平均數≥幾何平均數

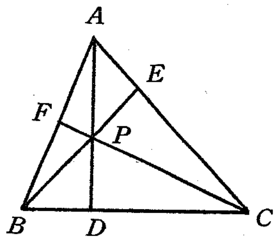
知 $a+\dfrac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$



同理 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}+\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\geq 2$，　$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}+\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\geq 2$

故 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PE}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PF}}\geq 6$

（附註）2.(a)的另一種證法



$\because$ F,P,C 共線

由孟氏定理知 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PA}}=1$ ………(1)

$\because$ $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 共點

由帥氏定理知 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$ ………(2)

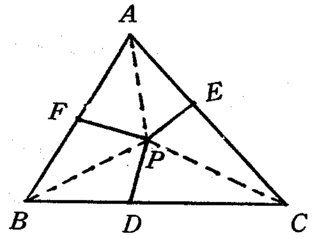
故 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{FB}\cdot\overline{EA}}{\overline{AF}\cdot\overline{CE}}$ ……………………………(3)

因此，由(1)與(3)得 $$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}+1\right)=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\left(\frac{\overline{FB}\cdot\overline{EA}}{\overline{AF}\cdot\overline{CE}}+1\right)$$
$$=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}+\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$$

3. （證明）

（附註：以下用 $a\triangle ABC$，$a\square APCD$ 代表 $\triangle ABC$ 的面積及四邊形 $APCD$ 的面積）

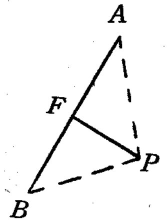
(a) 先證明 P 點的存在性：



設 $\begin{cases} a\triangle PAB = \alpha \cdot a\triangle ABC \\ a\triangle PBC = \beta \cdot a\triangle ABC \\ a\triangle PAC = \gamma \cdot a\triangle ABC \end{cases}$

則　$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\gamma > 0$　且 $\alpha + \beta + \gamma = 1$

因　$a\square PEAF = \frac{1}{3}\triangle ABC$



故　$\frac{1}{3} = \frac{a\square PEAF}{a\triangle ABC} = \frac{a\triangle AFP + a\triangle AEP}{a\triangle ABC}$

又因 $a\triangle AFP + a\triangle BFP = a\triangle ABP = \alpha\, a\triangle ABC$

且　$\frac{a\triangle AFP}{a\triangle BFP} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$

故　$a\triangle AFP = \frac{1}{2}a\triangle ABP = \frac{1}{2}\alpha \cdot a\triangle ABC$

同理　$a\triangle AEP = \frac{2}{5}\gamma \cdot a\triangle ABC$

因此，　$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{2}{5}\gamma$ ………… (1)

同理，由 $a\square PFBD = \frac{1}{3}a\triangle ABC$，可得

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{2}{5}\beta \text{ ………… (2)}$$

同理，由 $a\square PDEC = \frac{1}{3}a\triangle ABC$，可得

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{5}\beta + \frac{3}{5}\gamma \text{ ………… (3)}$$

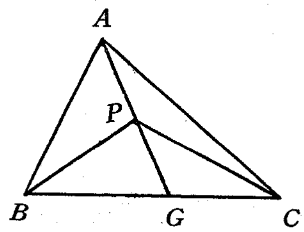
(1)−(2)　得　$-\frac{2}{5}\beta + \frac{2}{5}\gamma = 0$　　即 $\beta = \gamma$

代入(3) 得 $\beta=\gamma=\dfrac{5}{18}$

代入(1) 可得 $\alpha=\dfrac{4}{9}$

因爲α，β，γ均爲正數，故P有解。

(b) P點的找法：



先證：P爲$\triangle ABC$內一點，$\overrightarrow{AP}$交$\overline{BC}$於G

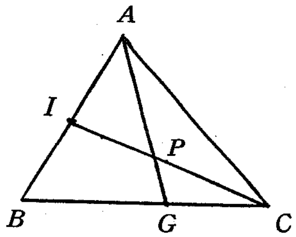
則 $a\triangle APB : a\triangle APC=\overline{BG}:\overline{CG}$

$$\frac{a\triangle AGB}{a\triangle AGC}=\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}$$

且 $\dfrac{a\triangle PGB}{a\triangle PGC}=\dfrac{\overline{BG}}{\overline{CG}}$（等高則面積之比等於底之比）

故 $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\dfrac{a\triangle AGB-a\triangle PGB}{a\triangle AGC-a\triangle PGC}=\dfrac{a\triangle APB}{a\triangle APC}$

由(a)知 $\dfrac{a\triangle APB}{a\triangle APC}=\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{8}{5}$



在$\overline{BC}$上找一點G，使得 $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{CG}}=\dfrac{8}{5}$

連接$\overline{AG}$，P在$\overline{AG}$上

同理，$\dfrac{a\triangle BPC}{a\triangle APC}=\dfrac{\beta}{\gamma}=1$

在$\overline{AB}$上找一點I，使得 $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{BI}}=\dfrac{1}{1}$

連接$\overline{CI}$，P在$\overline{CI}$上

$\therefore$ $\overline{AG}$與$\overline{CI}$的交點即爲所求。

4.（解）

因 $3^\circ=18^\circ-15^\circ$，

我們知 $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

因爲$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{6}$均可用尺規作圖求得，所以3°角可用尺規作圖求得。

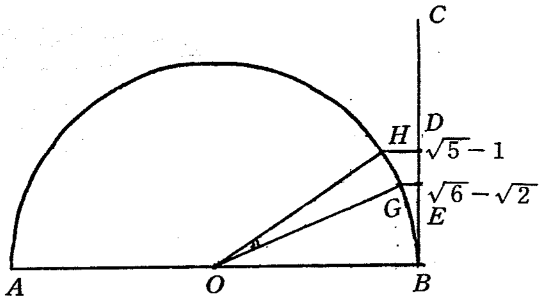
作法：

① 作半徑爲4的圓O，$\overline{AB}$爲直徑。

② 過B作 $\overleftrightarrow{BC} \perp \overline{AB}$

③ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上取 D, E 兩點，使得 $\overline{BD}=\sqrt{5}-1$， $\overline{BE}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ （如圖）。

④ 過 D, E 作平行 $\overline{AB}$之直線，分別交圓於 G, H，$\angle GOH$ 即爲所求。



二、花蓮區複賽試題(二)

1. $\left(\frac{7}{10}, \frac{41}{20}, \frac{2}{5}\right)$　2. 2　3. 19931118　4. $5+\sqrt{5}$

5. P^3-P　6. $\frac{\sqrt{337}}{5}$

（上承第16頁）

Yager, R. E. (1984). Defining the discipline of science education. Science Education, 68(1)：35-37.

陳家秀，(1991)，理性的決策？理性的反思！載於《博雅教育文集》第一輯，台北：國立臺北師範學院。

趙金祁，(1993 a)，人文與科技平衡中科學教育扮演的角色。科學教育月刊，156 期。

趙金祁，(1993 b)，科學理念衝擊下科學教育再出發芻議。科學教育月刊，158 期。

趙金祁，(1993 c)，三維人文科技通識架構芻議。科學教育月刊，160 期。

許榮富、楊文金，(1988)，STS之研究方法設計及其內涵分析研究。中華民國第三屆科學教育學術研討會論文彙編，55-57頁。

楊文金，(1992)，全民的科學教育。載於《博雅教育文集》第二輯，台北：國立臺北師範學院。

楊文金，(1993)，多重現實與電學概念理解研究。《科學教育學刊》，第一卷第二期，135-160頁。

羅素(邱言曦譯)，民69，西洋哲學史。台北：臺灣中華書局。