從微積分發展史中看極限概念的演變(三)

李肖梅
私立吳鳳工商專科學校

Cauchy 和 Weiertrass

最後，到了十九世紀，極限概念的嚴謹定義終於形成，立見的效果就是微積分有堅固穩定而合邏輯的基礎，另外困惑數學家多年，例如從古希臘就存在，像 Zeno 的悖論等問題終於得以解決。當微積分有了堅固穩定的基礎，用度量來解釋移動等的問題算是解答，導數變得有意義，混淆不明的速度的定義終可配合直觀概念得以清晰。在最後一個階段使嚴謹的極限概念得以正名，該推 Augustine-Louis Cauchy (1789-1857) 及 Karl Weierstrass (1815-1897) 二位功臣。

Cauchy 在 1821 到 1829 年間發表了三篇有關微積分的論文，其中極限概念的定義非常接近現代的定義。Boyer (1949) 就指出以前的數學家爲 Cauchy 鋪好了極限概念普及化及顯示極限概念重要性的道路，但是他們所傳遞的大部分仍屬於幾何化，因而只是直觀而非準確的概念。Cauchy 的極限定義是“算術化”而非“幾何化”，其中所定義的毫無幾何圖形爲參考資料，“當一個變數所衍生連續的數值無限制地逼近一個固定的數，到最後可使其差要多小都可以辦得到得任意小得數時，我們稱後者爲此變數之極限 (Boyer, 1949, p.272)。”

使用此極限定義，Cauchy 就能很明確的說明一個無窮級數“和”的意義，因此就使 Zeno 的著名的阿奇里悖論的困擾問題得以滿意的解決。

Boyer 敍述說：『雖然 Cauchy 很小心的研究極限概念，在他的論文中仍存有一些詞句需要進一步的說明 (p.284)。』譬如說，這句“無限制地逼近 (approach indefinitely)”和“要多小就可以任意小 (as little as one wishes)”就包含了過去幾千年對極限所造成的認知困難。某變數逼近其極限這個觀念需要有喚起隱含的移動直觀性和量化的一般性 (Boyer, 1949)。因此在 Cauchy 的定義仍保有動態性的內涵，也就是古代數學家所遭遇的困難，試著去跟隨數值的移動，一步步地在視覺上期待到達“無限過程的最後的階段 (final stages)”。Cauchy 的函數，

極限，連續和導數等概念基本上都是正確地被定義出來，唯一可惜的地方是它使用的言語是動態並未達到現代定義的準確性。

到了1870年代，Weierstrass最後終於定了現代的，完整的，算術化的極限定義（Boyer, 1949）。Weierstrass在1872年證明了存在有一個完全違反數學幾何直觀概念的函數（譬如說，存在有一個連續的曲線，但在曲線上每一點的切線都不能定義其存在）由此可證幾何直觀的判斷是不完全可靠的，因此微積分的基礎必須是嚴謹的，儘可能的要正式合理化。Weiertrass的數列極限的定義，根據Boyer（1949）所述是以函數爲討論重點，並陳述如下：

> L被稱之為數列S_n的極限若且唯若對每一個正數ε而言，都存有一正整數N_0，若$n > N_0$則$L - S_n$之差以絕對值而言是比ε小（P. 287）。

除了些許文字的改變外，此定義就是現今微積分教課書中的極限定義，而一個連續變數的函數的極限定義是類同的。

Weierstrass的定義就是長期研究極限概念所需要的“安全保障”，而且也是現今數學所使用的定義，它完全地排除了用視覺去感受一個無限過程逼近其“最後階段”的必需性，它是純粹靜態的，完全脫離直觀帶有移動的特性。在決定一已知數列是否能有一已知數L爲極限，我們所需要考慮的是某不等式是否經過代數運算而能有解，並不需要我們去經歷無限過程的路徑。Weierstrass的定義還含有一種內建的“功能性”使此定義可以一般化，因此，經過少許簡易的變化，此定義可以明確地應用在多變數的函數上，甚至還很輕易地推廣到抽象的測量空間等方面。

Weierstrass的極限定義就是讓人有一種難以了解此定義所欲表達之數學意義的缺點，此單一句子很難讓讀者明白消化定義的精華所在，這就是不依靠直觀所產生的嚴謹定義所要付出的代價。一個數學機械人可以機械性的使用定義，而不需要任何視覺上代替品，來了解所欲執行的命令，但是數學家尤其是學生們就不是這樣，他們需要藉著日常生活的經驗及感官的觸覺，去判斷了解數學的活動，因此如要使極限定義有意義，學生們必須具備有直觀的一些例證，可以用來非正式的探討極限定義。Weierstrass的定義若能先具備一邏輯符號的理念就會比較容易解解，因此若L是某數列S_n的極限之完全及必要的條件就可改寫成：

已知$\varepsilon > 0$，若存n_0對所有$n > n_0$都可$|S_n - L| < \varepsilon$

另外一個偶而有幫助的說詞是這樣的：

對每一個$\varepsilon > 0$而言，除了有限個的自然數n之外，我們都有

$| S_n - L | < \varepsilon$ 成立。

在提供了極限概念的嚴謹定義的同時，Weierstrass 也發現了另一困難的概念需要避免的，那就是實數的概念需要定位，在試圖縮短容易理解的有理數與無法用視覺來理解的無理數的鴻溝，Cauchy 曾提及可以定義無理數為有理數數列的極限。但 Cauchy 忽略了他的定義是在繞圈圈用來定義的極限概念去定義實數，而實數又是瞭解極限的必須概念，Boyer（1949）很清楚地把這個困難說明：

> 因為極限是被定義一個數，而此數是某一數列所逼近的數，此逼近的方式為此數與數列中的某些項值之差可比任意指定的值還要小，無理數的存在是需要在極限的定義下才能存在，而在未定極限定義前，所試圖定義的無理數就無法存在（P. 281）。

因此若要使微積分有堅固穩定的基石，就必須找一個合理的方法來解釋實數，沒有極限概念的根據，實數到底是什麼呢？Weierstrass 靠著以小數代表實數而成的集合這個觀念作到這點，另一位把實數公理化推展的人就是 Dedekind（Boyer,1949）。根據“分割公理（Cut Axiom）”，也就是說若實數被分割成左集合 L 及右集合 R，每一個集合 L 中的實數都比集合 R 中的實數要小，那麼不是集合 L 有最後一個數就是集合 R 中有第一個數。Dedekind 定義實數的方法也許是最肯定的一種說法，它能使實數與數線上的點很自然的一一對應。另外一位需要提及的數學家就是 Cantor，他的無限集合理論（theory of infinite sets)是依據雖然看起來簡單却非常原始的主張，那就是比較無限集合的“大小（size）”看看此無限集合是否可與其他的集合做一一對應，這種比較集合“大小”的觀念使我們對實數及數線有進一步的瞭解。“不可再細分”的方法，以不相同的面貌由 Cavalieri 一直追溯到阿基米得時期，是微積分的前身。“不可再細分”方法主要概念上的困難，在於如何求出一個二度空間的面積，當我們把此面積當成是一些一度空間的長度的集合，而此一度空間長度是沒有面積的，而這個觀念就是微積分的基礎概念。在 1854 年 Riemann，由於改進了 Cauchy 的研究，而發表了一直延用至今的定積分的公式。要定義定積分 $\int_a^b f(x)$，我們先分割線段 $[a, b]$ 為以下各點：

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_i \leq \cdots \leq x_n \leq b$$

在區間 (x_i, x_{i+1}) 中任選一點 x_i^*，然後求其和，

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i)$$

因為如果繼續不斷的來細分這個已知區域［a,b］，此時定積分被視為此和的近似值所成數列的極限值。

結　論

希臘前期數學的發展當推古埃及和巴比倫，此時的數學建立在用整數和整數的比值上的算術運算，以及一些觀察大自然而產生的幾何經驗為主。

古希臘把數學建立在傳統的推理體系上，所有的數學的敍述都是由某些已知的公設及合邏輯的推論而獲得。對希臘數學家而言，數只包含整數，整數的比值和它們的運算，無理數並不存在。因此他們不承認邊長為1的正方形的對角線的長度為一個數，而視此長度為一幾何“量”，不能發明數論理念來合理的代表幾何量是希臘數學發展上的一大缺失。

古希臘數學家完全迷失在以視覺及感官來判斷事物的領域之內，因此而無法透視一個無限過程有可完成的可能性的理念，若非他們發明了“窮盡法”，希臘數學家的數學發展就會被限制在直線圖形的研究上，根據Eudoxis的公設而創造出來的“窮盡法”，避免了必須去考慮一個無限過程完成的這道手續，但為此所付出的代價就是一些反反覆覆瑣碎的證明，以及使數學經歷數千年緩慢的發展。連續與不連續的合離關係對古希臘數學家造成很複雜的困擾，有關移動的Zeno的悖論因為古希臘數學概念的不夠完全而無法得以解答，而此悖論反而阻遏了希臘數學家嘗試去量化探討移動，以及大自然變量現象之研究，數學家阿基米得曾試圖由很微小的面積觀念去探討現代的積分，但可惜的是他只把它當一個研究工具，並未深入研究其基本理論。

到了中世紀時期，量化移動的問題受到了重視並有些進展，十六及十七世紀有了更進一步的瞭解移動量化性及幾何方面的研究。很多幾何學家努力為累贅的“窮盡法”找代替品，雖然很多的幾何問題得以解決，但大多數都是直觀的方法，其邏輯基礎不夠穩定而未被學者所認同，此時對無限大的概念及連續性的本質有很多的推測及研究，數學家失去了對無限過程抵抗的意願。

牛頓和Leibniz綜合了他們先進們的研究，使數學新生的一支派一微積分，得以發明並有效的應用在科學上解決很多問題。但他們無法明白清楚解釋微積分的邏輯基礎（譬如說，兩個分別逼近零的量的比值是什麼意思？）。數學家們很有興趣在加強微積分邏輯基礎穩固上的研究，到了十八世紀更多的努力在推廣了解和解釋牛頓的研究，以及試圖為微積分另尋新路，此時很多數學家開始發現微積分必須建立在極限的概念上，

很多企圖正式地說明何謂極限。

極限至今仍延用的滿意的定義終於在1870年由Weierstrass所訂定。隨伴Weierstrass的極限定義而需要加以定位的是數論，如此極限不必用來定義無理數(以免產生重覆轉圈圈的定義)Weierstrass完成了不以極限定義數論的研究，後來實數系被Dedekind 以另一種不同的公理而發展出來，使得數學分析學終於能以嚴謹滿意的基礎發揚光大。

參考文獻

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development,* New York: Dover Publications, INC.

Browne, E. (1934). The incommensurables of geometry. *The Mathematics Teacher,* 27.

Cajori, F. (1915). The history of Zeno's argument on motion: Phases in the development of the theory of limits. *American Mathematical Monthly,* Vol. 22: 1-6, 39-47, 77-82, 109-115, 145-149, 178-186, 215-220, 253-258, 292-297.

Cajori, F. (1923). Grafting of the theory of limits on the calculus of Leibniz. *American Mathematical Monthly,* vol. 30. pp.223-234.

Confrey, J. (1980). *Conceptual chnange, number concepts and the introduction to calculus.* DAI, 44, 872A. (University Microfilms No.80-20, 924)

Davis, R. B .(1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education.* New Jersy: Ablex Publishing Corporation.

Davis, R. B. (1985a). The role of representations in problem solving: Case studies. *The Journal of Mathematical Behavior,* 4, 85-97.

Davis, R. B. (1985b). Learning mathematical concepts: The case of Lucy. *Journal of Mathematical Behavior,* 4, 135-153.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior,* 5, 281-303.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. Mathematics and Cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education. p.113-134.

Edwards, C. H. (1979). The historical development of the calculus. New York: Springer-Verlag.

Fischbein, D. ; Tirosh, D. ; & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in mathematics,*10. pp.3-40.

Fless, M. (1988). *An investigation of introductory calculus students' understanding of limits and derivatives.,* DAI.

Kilmister, C. W. (1980). Zeno, Aristotle, Weyl and Shuard: Two-and-a-half millenia of worries over number. *The Mathematics Gazette,* vol. 64, No. 429: 149-158.

Kline, M. (1970). Logic versus pedagogy. *The American Mathematical Monthly*, 77, 264-282.

Kline, M. (1972) Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford University Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty.* New York: Oxford University Press.

Orton, A. (1983a). Students' understanding of integration, *Educational studies in mathematics*, 14, 1:1-18.

Orton, A. (1983b). Students' understanding of differentiation, *Educational studies in mathematics*, 14, 3: 235-250.

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in school*, 13, 5: 23-26.

Orton, A. (1985). When should we teach calculus? *Mathematics in school*, 14, 2: 11-15.

Orton, A. (1986). Introducing calculus: An accumulation of teaching ideas? *International Journal of mathematics education and science technology*, Vol. 17. No. 6: 659-668.

Orton, A. (1987). *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practice.* Westminster, London: Cassell Educational Limited.

Orton, T. & Reynold, C. (1986). Taking maths to the limit. *Mathematics in school*, 15, 4: 28-32.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in mathematics*, Vol. 18.

Taback, S. (1975). The child's concept of limit. In M. Rosskopf (ed.), *Children's mathematical concepts: Six Piagetian Studies in mathematics education.* Teacher college, Columbia University.

Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in school*, 10, 3, 30-33.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching* , No.110: 49-53.

Tall, D. & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12: 151-169.

Williams, S. (1989). *Understanding of the limit concept in college calculus students.* DAI.

Williams, S. (1991). Models of limits held by college calculus students. *Journal for research in mathematics education*, Vol.22, 3:219-236.

李育梅（ 1992 ），美國數學師範生對極限概念認知了解程度之探討，全華科技圖書股份有限公司。