教育部八十二學年度高級中學
數學競賽複賽試題特輯

國立臺灣師範大學數學系提供

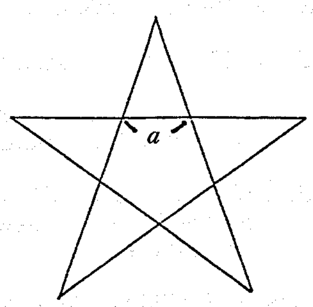
壹、一、臺北市複賽試題(一)

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為 49 分。
   第一題 10 分，第二題 12 分，第三題 13 分，第四題 14 分。
2. 考試時間：2小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

問題一、設 P 是 $\triangle ABC$ 內部一點，直線 AP 與 $\overline{BC}$ 交於 D，直線 BP 與 $\overline{CA}$ 交於 E，直線 CP 與 $\overline{AB}$ 交於 F。若 $\overline{AP}:\overline{PD}=\overline{BP}:\overline{PE}=\overline{CP}:\overline{PF}$，試證 P 是 $\triangle ABC$ 的重心。（10分）

問題二、右圖是將一個邊長為 a 的正五邊形各邊延長相交所得的正五星形。將正五星形剪下，將五個等腰三角形沿底邊摺起而圍成一個正五角錐，試求此五角錐的體積。（12分）



問題三、在一個邊長為 1 的正方形內任意作二十個兩兩不重疊的小正方形。試證其中必有四個正方形的邊長之和不大於 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$。（13分）

問題四、在 $1,2,3,\cdots\cdots,2^{1993}$ 等前 2^{1993} 個正整數中，將每個正整數的最大正奇因數相加，其和為何？（14分）

二、臺北市複賽試題(二)

注意事項：

1. 本試卷共七題，滿分爲 21 分，每題各 3 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

問題一、有三個連續奇整數的乘積是形如39******7的九位數，這三個奇數中最小的一個爲_________。（3分）

問題二、10^{82} 的所有正因數的常用對數值的和爲_________。（3分）

問題三、將 1969, 1970, 1971, ……, 1993 等二十五個連續整數相乘，其乘積除以 10^7 的餘數爲_________。（3分）

問題四、將一正整數 n 的最右位數字（即個位數字）移到最左位而得出另一正整數。若所得的整數是 $\frac{3}{2}n$，則此種 n 的最小值爲_________。（3分）

問題五、方程式 $[\frac{x}{2}]=[\sqrt{x}]$ 的非負實數解爲_________。其中的 $[y]$ 表示小於或等於 y 的最大整數。（3分）

問題六、$\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 分別在兩個互相垂直的平面上。若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle BAC=\angle BCD=90°$，$\angle BDC=60°$，則向量 $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 的夾角的正弦值爲_______（3分）

問題七、三個圓 C_0, C_1 與 C_2 的方程式分別爲

$$C_0: x^2+y^2=400,$$
$$C_1: (x-10)^2+y^2=100,$$
$$C_2: (x+6)^2+y^2=36.$$

若另一圓 C_3 位於 x 軸上方且與圓 C_0 內切而與圓 C_1, C_2 都外切，則圓 C_3 的圓心坐標爲_________。（3分）

貳、一、臺北區複賽試題(一)

計算與證明題（共三題）

注意事項：

1. 本試卷共3題：第1題16分，第2、3題各15分。
2. 考試時間：1小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

1. 在坐標空間中，一正四面體內接於以原點爲球心，半徑爲1的球。它有一頂點在直線 $x=y=z$ 上，且其 x 坐標大於0，另一頂點在 xy 平面上，且其 x 坐標也大於0，則其四個頂點的坐標爲何？（16分）
2. 設 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 爲一係數都是複數的 n 次多項式。試證：若存在一正整數 m，使得 $(f(x))^m$ 的係數都是有理數，則 $a_1,\cdots\cdots,a_n$ 必定都是有理數。（15分）
3. 設 $f(x)$ 爲實係數的多項式，若 α 爲實數，且

$$\alpha^3-9\alpha^2+6\alpha=(f(\alpha))^3-9(f(\alpha))^2+6f(\alpha)=1993$$

求滿足 $(f_n(\alpha))^3-9(f_n(\alpha))^2+6f_n(\alpha)=1993$ 的所有正整數 n。其中

$$f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f(f(x)),\cdots\cdots,f_{k+1}(x)=f(f_k(x)),\cdots。$$

（15分）

二、臺北區複賽試題(二)

填充題（共六題，每題4分）

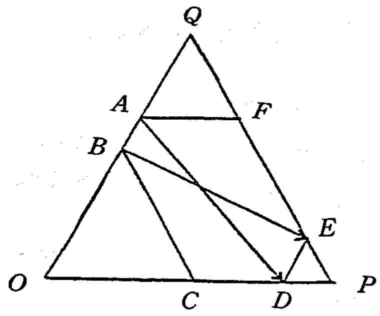
注意事項：

1. 本試卷共6題；每題4分。
2. 考試時間：1小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

1. 設 a,b,c 爲不相等的實數，則 $\begin{cases}\dfrac{x}{a^3}+\dfrac{y}{a^2}+\dfrac{z^2}{a}=1+\dfrac{1}{a}\\ \dfrac{x}{b^3}+\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z^2}{b}=1+\dfrac{1}{b}\\ \dfrac{x}{c^3}+\dfrac{y}{c^2}+\dfrac{z^2}{c}=1+\dfrac{1}{c}\end{cases}$ 的解爲__________。

2. 坐標平面上，以原點為圓心，半徑為 10 的圓內，x 與 y 坐標都是整數的點共有多少點？_________。

3. 如右圖中，$\triangle OPQ$，$\triangle OBC$，$\triangle PED$與$\triangle QAF$都是三角形，其邊長分別為 6，3，1與2，則 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$ _________。



4. 已知坐標平面上，拋物線 $y^2=4x$ 上兩點 $A(1,2)$，$B(\frac{1}{2},-\sqrt{2})$，若其上一點C位於直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的左側，使得$\triangle ABC$的面積最大，則C點的坐標為_________。

5. 已知 $A_0=(1,2)$，$A_1=(2,5)$，$A_2=(3,4)$，且對於任意 $i\geq 3$，A_i 為 $\overline{A_{i-2}A_{i-3}}$ 的中點。求長度和 $\sum_{i=3}^{\infty}\overline{A_{i-2}A_{i-3}}=$ _________。

6. 五隊夫婦排成一列，男女相鄰但夫妻不相鄰的排法共有多少種？_________。

叁、一、新竹區複賽試題(一)

注意事項：
1. 本試卷共三題；滿分 49 分。
   第一題及第二題各 16 分，第三題 17 分。
2. 考試時間：2小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

1. (16分) 設N表示所有正整數所成的集合，是否存在一個函數 $f:N\rightarrow N$，使得 $f(f(n))=n+1$，$\forall n\in N$？證明你的答案。

2. (16分) 已知在平面上四個點 A,B,C,P 中，$\overline{PA}=3$，$\overline{PB}=2$，且$\triangle ABC$ 為正三角形，問P與C的距離 $\overline{PC}$ 最大是多少？

3. (17分) 阿華投擲一個硬幣，若出現正面，則得 a 點，若出現反面，則得 b 點。(a,b 為正整數，且 $a>b$)。假設他在第 n 次投擲時得到的點數記為 a_n。設

$$S=\{a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_n,\cdots\}$$

且令T為所有這種S的聯集，若N、T共有 35 個元素，且 $58\notin T$。求 a 與 b 的所有可能的值。其中N表示所有正整數所成的集合。

二、新竹區複賽試題(二)

注意事項：

1. 本試卷共五題；滿分爲 21 分。
   第一、二、三、四題各4分，第五題5分。
2. 考試時間：1小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

1. （4分）若 $32,080,080,040,010,001=(3x)^5$。則 $x=$ ＿＿＿＿＿。
2. （4分）單位圓內有一個長爲 b 寬爲 h 的內接長方形與一個底爲 b 的內接等腰三角形有相同面積，則 $h=$ ＿＿＿＿＿。
3. （4分）在坐標平面上，從點 $P(x_0, y_0)$ 向拋物線 $y^2=4px$ 作兩切線，其切點分別爲 P_1 與 P_2，則 $\triangle PP_1P_2$ 的重心坐標爲 ＿＿＿＿＿。
4. （4分）從1到49的49個正整數中，隨機抽取6個數，則這6個數都不相鄰（即任意兩個數的差都不等於1）的機率是 ＿＿＿＿＿。
5. （5分）設 r_1, r_2, r_3 是多項式 $f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 的三個根，且 $0<r_i<1$，$\forall i=1,2,3$。則 $8a+9b$ 的最大值爲 ＿＿＿＿＿。

肆、一、花蓮區複賽試題(一)

注意事項：

1. 本試卷共4題；第1、2、3題各12分，第4題13分。
2. 考試時間：2小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

1. （12分）試證明存在兩個正整數 m 與 n，滿足

$$\sqrt{m+n}+\sqrt{n}=(\sqrt{11}+\sqrt{18})^{1993}$$

2. （12分）設 P 爲 $\triangle ABC$ 內部一點，且 D,E,F 分別爲直線 AP,BP,CP 與 $\triangle ABC$ 三邊的交點，試證：

(a) $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}+\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$　　(b) $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PE}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PF}}\geq 6$

3. （12分）在已知三角形 ABC 之三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上，分別取 D，E，F 點，其中

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=1 \qquad \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{2}{3} \qquad \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{3}{2}$$

問在$\triangle ABC$內部是否可找到一點P使得$\overline{PD}$，$\overline{PE}$，$\overline{PF}$三等分$\triangle ABC$之面積？又若P點存在，則應如何決定其位置？

4. （13分）試討論用圓規及直尺作出 3° 角的可能性。

二、花蓮區複賽試題(二)

注意事項：

1. 本試卷共 6 題，每題3.5分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

1. 設P點爲平面E：$x+2y+3z=6$之點，A,B之坐標分別爲$(2,4,3)$，$(1,3,2)$。若 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 爲最小時，則P點的坐標爲 ＿＿＿＿＿。
2. 若實數 x，y，z 滿足下列方程式
$$4x^2+4xy+4y^2-16x+4y+5^{(z-1)^2}+27=0$$
則 $x+y+z$ 的值爲 ＿＿＿＿＿。
3. 設 a，b，b，c，a，a，a，d 爲一正八位數由左至右的數字，其中 $b=a+d$。若首四位數字與末四位數字所形成的四位數之差爲875，則此八位數爲 ＿＿＿＿＿。
4. 設 $f(t)=|(1+3\cos t-4\sin t)+i(-2+4\cot t+3\sin t)|$，則 f 在 $[0,2\pi]$ 之最大值爲 ＿＿＿＿。
5. 設邊長爲整數的某一菱形的兩對角線長分別爲 $2p$ 及一偶數，其中 p 爲一質數。試以 p 的多項式表示出此菱形的面積？答：＿＿＿＿＿＿＿。
6. 設 $ABCD$ 爲一個長方形，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=4$，今將$\triangle ABC$ 沿著對角線 $\overline{AC}$ 向上翻折，使之與原平面成垂直，得$\triangle AB_1C$，則$\overline{B_1D}=$ ＿＿＿＿＿＿。

伍、一、高雄市複賽試題(一)

1. 已知AB為直角三角形ABC之斜邊，設D,E,F將AB分成四等分，即$AD=DE=EF=FB$，且$CD=11$，$CF=7$，試求AB之長。

2. 已知$n\in N$，$X_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$

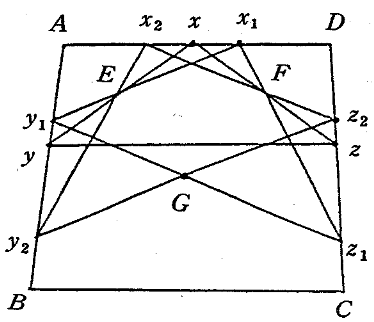
   求證
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i+\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^{2}}\leq\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}$$

3. 在 15 個空盒中，每次在其中n個盒中各放一個球，求經過有限次後，第 1 個盒中恰有 1 個球，第 2 個盒中恰有 2 個球，……，第 15 個盒中恰有 15 個球的所有可能之n值。

4. 設$\alpha,\beta\in R$, $n\in N$定義函數
$$I_{[\alpha,\beta]}(x)=\begin{cases}1, & \alpha\leq x\leq\beta\ ;\\ 0, & x\text{為其它實數}\end{cases}$$
   且
$$\prod_{i=1}^{n} I_{[\alpha,\beta]}(x_i)=I_{[\alpha,\beta]}(x_1)\cdot I_{[\alpha,\beta]}(x_2)\cdots\cdots I_{[\alpha,\beta]}(x_n)$$
   令 $y_1=min\{x_1,\cdots,x_n\}$, $y_2=max\{x_1,\cdots,x_n\}$

   考慮函數
$$f(a,d)=\left(\frac{1}{2\sqrt{3b}}\right)^n\prod_{i=1}^{n} I_{[a-\ 3b,\ a+\ 3b]}(x_i)$$
   欲使$f(a,b)$之值最大，則a, b應各為何值？請以y_1, y_2表示之。

5. 如圖：$ABCD$為一四邊形，$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$分別為$\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$上兩點。E,F,G分別為$\overline{x_1y_1}$和$\overline{x_2y_2}$, $\overline{x_1z_1}$和$\overline{x_2z_2}$, $\overline{y_1z_1}$和$\overline{y_2z_2}$的交點。x為$\overline{x_1x_2}$上的任一點。$\overrightarrow{XE}$射線交$\overline{y_1y_2}$於y，$\overrightarrow{XF}$射線交$\overline{z_1z_2}$於z，試證$\overline{yz}$和$\overline{y_1z_1}$的交點在$\overline{y_1z}$上。



二、高雄市複賽試題(二)

1. 設 $u_1, u_2, \cdots, u_{1993}$ 爲 1993 個連續整數，若 $u_1+u_{19}+u_{199}+u_{1993}=2300$，試求：(1) u_{1993} 之値；(2) $u_1+u_2+\cdots+u_{1993}$ 之値。
2. 在 $(1+x^5+x^9)^{100}$ 之展開式中，求 x^{100} 項的係數（請以階乘表示之）。
3. 長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，今 P, Q 兩定點分別在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{DA}$ 上，且 $\overline{PB}=\dfrac{1}{4}a$，$\overline{DQ}=\dfrac{1}{3}b$，若 E, F 分別爲 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CD}$ 上之動點，則 $\overline{PE}+\overline{EF}+\overline{FQ}$ 之最小值爲何（請以 a, b 表示之）？
4. 設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲 n 個異實數，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 爲 n 個實數，若 $A(x)$, $B(x)$, $F(x)$ 皆爲多項式，其中 $A(x)$, $B(x)$ 之次數均 $\leqq n-2$，$F(x)$ 之次數 $\leqq n-1$，且滿足
$$A(x_i)=y_i, \quad 1\leqq i\leqq n-1$$
$$B(x_i)=y_i, \quad 2\leqq i\leqq n$$
$$F(x_i)=y_i, \quad 1\leqq i\leqq n$$
令 a, b, c 分別爲多項式 $A(x)$, $B(x)$ 及 $F(x)$ 之領導係數（即最高次項之係數），試證：$c=\dfrac{b-a}{x_n-x_1}$
5. 在一平面上，有四個共頂點（令此點爲 v）之正多邊形 A_1, A_2, A_3, A_4，其邊數分別爲 p, q, r, s，若此四個正多邊形 A_1, A_2, A_3, A_4 中以 v 爲頂點之內角分別爲 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$，且 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$，則 (p, q, r, s) 可能的情形有那些？請列擧三種，並列出解題過程。
6. 設 $\triangle ABC$ 之三邊爲 a, b, c。(1) 試證：$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$，(2) 若 $(a+b)(b+c)(c+a)=8abc$，試列出三內角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 之關係式。

陸、一、屏東區複賽試題(一)

1. 令 $p(x)=0$ 爲一 5 次整係數多項式方程式，$p(x)$ 至少有一整數根，若 $p(2)=13$，且 $p(10)=5$，試求一個 x 值滿足 $p(x)=0$。
2. n 爲大於 2 的整數。試求最小的正整數 n，使得 $2|n$, $3|n+1$, $4|n+2$, ……, $10|n+8$。（p, q 均爲整數，符號 $p|q$ 表示“p 整除 q”，因此 q 爲 p 之倍數）
3. 在 $\triangle ABC$ 的三邊 AB, BC, CA 上各取三點 X, Y, Z，

使得 $\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{BY}{YC}=\dfrac{CZ}{ZA}=\dfrac{1}{4}$ 連接 AY, BZ 及 CX 兩兩相交於 D, E, F。

(1) 求 $\triangle ADB$ 與 $\triangle ABC$ 之面積比。(2) 求 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 之面積比。

4. 使用 1,2,3,4,5,6,7,8,9 九個數字（每個數字都用，且只用一次），做成兩個數使其乘積最大。請說明你如何找出你的答案。（例如可做出12345與6789兩個數或123與456789 兩個數，但當然你可做出另兩數，其乘積會比 12345 ×6789 及123×456789大）

二、屏東區複賽試題(二)

1. 試證除了 $(x,y)=(0,7)$ 與 $(-7,0)$ 之外，方程式 $x^3+7^3=y^3$ 沒有整數解。
2. 判斷 $f(x)=\sin(x^2)$ 是否爲週期函數，請說明理由（若存在正數 p 使得對所有實數 x 均有 $f(x)=f(x+p)$ 則稱 (x) 爲週期函數，而使 $f(x)=f(x+p)$ 的最小正數 p 稱爲該週期函數之週期，例如 $f(x)=\sin(x)$ 爲週期 2π 之週期函數。）
3. 在圓周上有 10 個點，將所有點兩兩相連，假定無三條連線在圓內共點，請問圓內一共有多少個交點？又請問在圓內除端點外無重疊部分的線段共有多少條？
4. n 爲正整數，若 $f(n+1)=(-1)^{n+1}n-2f(n)$ 且 $f(1)=f(1986)$
求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(1985)$。
5. $y=x^3-3x+2$ 與 $x+4y=4$ 的圖形相交於點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)，若 $x_1+x_2+x_3=A$ 且 $y_1+y_2+y_3=B$，求 (A, B)。
6. 若 $\cos^2 22.5^0$ 爲 $x^2+bx+c=0$ 之一根，其中 b 與 c 均爲有理數，
試求 (b, c)。

柒、一、臺南區複賽試題(一)

1. 令 $n\geqq 3$ 爲一正奇數，若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 表示 n^2-2n+2 個整數（$m=n^2-2n+2$）。試證：必能從中取出 n 個數，使其和能被 n 整除。(12分)
2. 設 $\triangle ABC$ 之內部有1993 個點，今以頂點 A, B, C 和這1993 個點將 $\triangle ABC$ 分割成多少個小三角形？(12分)
3. 設 $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ 爲一整數係數之多項式，$0<k<n$，若存在一個質數 p，使得 $p^2 \mid a_0$, $p \mid a_0$, $p \mid a_1, \cdots, p \mid a_{k-1}$，但 $p \mid a_k$。試證：$f(x)$ 有

一次數至少爲 k 之不可分因式（所謂一多項式爲不可分（佈於Q）指它不能寫成兩個眞因式之乘積）。(13分)

4. 若三正數 a, b, c 之間有 $a^2+b^2+c^2-2abc=1$ 之關係，且 $a>1$，則 b 及 c 所取之值之範圍爲何？(12分)

二、臺南區複賽試題(二)

1. 令 r 爲一實數，試證：

$$(1+x_1^2+\cdots+x_n^2)^r(1+y_1^2+\cdots+y_n^2)^{-r}$$
$$\leqq 2^{|r|}[1+(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{|r|}$$

2. 若 x 滿足方程式 $\sin^{1993}x+\cos^{1993}x=1$，試求 $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ 所有可能之值。

3. 求所有滿足 $xf(x)=(x-4)f(x+1)$ 之多項式。

4. 設 $t^m-1 \mid t^n-1$，其中 t 爲一正整數，且 $t>1$，試證 $m|n$。

5. 求 $\dfrac{x^2+2ax+1}{x^2-2ax+1}$ 之極大值與極小值，a 爲一實數。

6. 已知數列 $<a_n>$ 定義如下：$a_1=2$，$a_2=4$，當 $n>2$ 時，
$a_n=(a_{n-1}+a_{n-2})/2$，試問數列 $<a_n>$ 是否收斂？若收斂，則其極限爲何？