第二十四屆國際物理奧林匹亞競賽理論試題及參考答案

林明瑞
國立臺灣師範大學物理系

第二十四屆國際物理奧林匹亞競賽於1993年7月10日至18日在美國維琴尼亞州威廉斯堡威廉瑪莉學院舉行。參賽學生共計201人，來自四十一個國家。理論部分於7月12日舉行競試，中間休息一天後，於7月14日舉行實驗操作競試。理論試題共有三大題，每題10分，合計30分，實驗試題則有二大題，每題10分，合計20分。理論和實驗競試皆從上午八時開始持續至下午一時，共五小時。現提供理論試題解答及評分標準供讀者參考。實驗試題部分，稍後將續在本刊發表。

一、理論競賽試題 1993年7月12日　競試時間：五小時

先讀注意事項

注意事項：1. 僅能使用所供應的筆。
2. 僅能在答題紙上有標記的頁面上作答。
3. 每題開始時，換用新頁。
4. 在每一頁的頂部寫下：—— 試題的題碼
—— 每一道試題解答所用的頁碼
—— 每一道試題解答所用的總頁數

例（就試題1.而言）：1 1/4；1 2/4；1 3/4；1 4/4；

常　數　表

物理量	符號	數值
地球的平均半徑	R_E	6.4×10^{6} m .
重力加速度	g	$9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.
牛頓萬有引力常數	G	$6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2\,Kg^{-2}}$.
眞空的介電係數	ε_0	$8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$.
眞空的磁導率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{NA^{-2}}$.
眞空（或空氣）中的光速	c	$3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.
基本電荷	e	1.60×10^{-19} C .
電子的質量	m_e	9.11×10^{-31} Kg .
質子的質量	m_p	1.67×10^{-27} Kg .
普朗克常數	h	6.63×10^{-34} J s .
亞佛加厥常數	N_A	$6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$.
波茲曼常數	k	$1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}$.
摩耳氣體常數	R	$8.31\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$.

理論試題 1 ：大氣電學

從靜電學的觀點來看，地球的表面可以認爲是一個良好的導體。它所帶有的電荷總電量爲Q_0，平均表面電荷密度爲σ_0。

1. 在良好的天氣狀況下，大氣中有一方向朝下的電場E_0，在地球表面處的電場強度值約爲150 V/m。 試推算地球表面電荷密度和地球表面所帶有的總電量。
2. 大氣中方向朝下的電場強度，其大小隨離地高度的增加而遞減。在離地100m的高度處，其值爲100 V/m。試計算在地球表面和離地高度100 m 處之間的大氣，其每一立方公尺(m^3)所含淨電量的平均值。
3. 題 2.中所計算的淨電量密度實際上是由於大氣中每單位體積內含有大致等量的帶正電和帶負電的單電荷離子(n_+和n_-)所造成的結果。在良好的天氣狀況下，靠近地球表面處，$n_+ \approx n_- \approx 6 \times 10^8\ m^{-3}$。這些離子在垂直電場的作用下運動，它們的速率正比於所受的電場強度：

$$v \approx 1.5 \times 10^{-4} E$$

其中 v 的單位爲m/s，E爲V/m。試問，若沒有如閃電等過程的產生以維持地表電荷，單純考慮由於大氣中離子的運動，而使地球的表面電荷，經由中和作用而減少，則減少至一半所需的時間有多長？

4. 有一種測量大氣電場強度以及σ_0 的方法是利用如圖一所示的系統。一對四分圓的金屬板，與地絕緣但彼此相連，裝設在一接地的，均勻轉動的圓盤的正下方，圓盤上挖有兩個四分圓形狀的洞。(在此圖中，爲了能清楚顯示裝置，圓盤與四分圓金屬板的間距已加以誇大)。圓盤與轉動一周，與地絕緣的四分圓板有兩次完全暴露於大氣的電場中，但1/4週期後則又完全與該電場隔離。以T代表圓盤轉動的週期。四分圓金屬板的內徑和外徑分別爲r_1和r_2，如圖二所示。設當四分圓板完全被遮蔽時的刻爲 t = 0。試求在 t = 0 至 t = T/2的

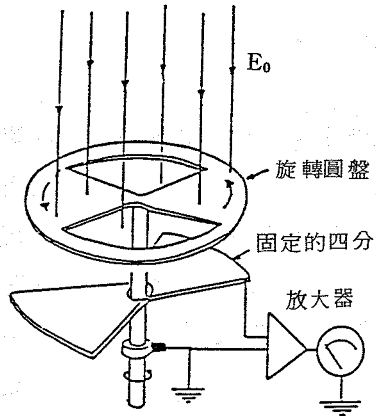


圖 一

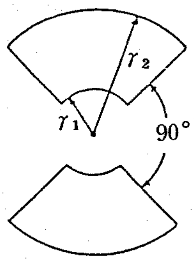


圖 二

時段中，四分圓板的上層表面所感應的總電量 q(t)，以時間爲變數的數學函數表示之，並畫出此函數圖形。（在此題中，大氣離子電流的效應可以忽略。）

5. 把題4.所描述的系統接通一放大器，它的輸入部分等效於一個電容器C和一個電阻所並聯成的電路，如圖三所示。（你可以假設四分圓系統的電容，與C相比，可以忽略。）

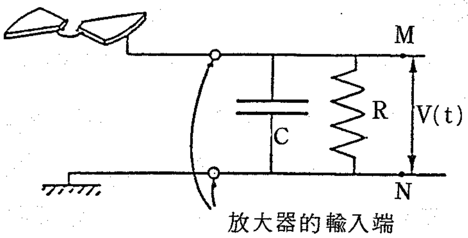


圖 三

當圓盤以週期T，一開始旋轉後，分別考慮在下列兩種不同的旋轉週期情況下，以繪圖方式顯示M和N兩點間的電壓差隨時間t變化的情形：

(a) $T = T_a \ll CR$

(b) $T = T_b \gg CR$

（假設C和R的數值固定不變，只有(a)和(b)中的T值有所不同。）以V_a和V_b分別代表(a)和(b)兩種情況中最大的電壓值，試以數學式表明$\frac{V_a}{V_b}$的近似比值。

6. 假設$E_0 = 150$ V/m，$r_1 = 1$ cm，$r_2 = 7$ cm，C = 0.01 μF，R = 20 MΩ，並且圓盤每秒轉動 50 周。在這種情況下，近似地求出在圓盤轉動一圈中，最大的電壓值V。

理論試題2：作用在透明稜鏡上的雷射力

藉由折射作用，一高強度雷射可在一小的透明稜鏡上產生可觀的力。爲了理解這句話確是如此，考慮一個小的玻璃三稜鏡，其頂角爲$A = \pi - 2\alpha$，底邊長爲2h，寬度爲w。又此稜鏡的折射率爲n，密度爲ρ。

假設此稜鏡放置在一沿水平面射向x方向的雷射光束中。（在本題中假設此稜鏡不會轉動，也就是它的頂點一直逆對著雷射光束的方向，它的三角面平行於xy平面，它的底面則平行於yz平面，如圖一所示。）在稜鏡周圍的空氣折射率$n_{空氣} = 1$。假設此稜鏡面上鍍有防止反射的薄膜，所以鏡面上不會發生反射。

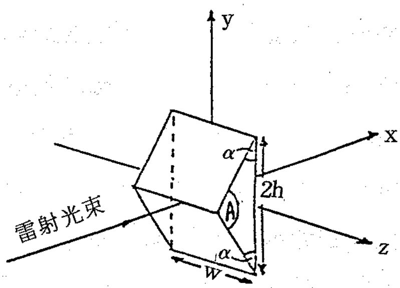


圖 一

雷射光束的強度，在 z 方向沿著橫寬的部分是均勻的，但在 x 軸的兩側，則光束強度隨著離 x 軸的距離 y 的增加而呈線性遞減，在 $y = 0$ 時有最大值 I_0，但在 $y = \pm 4h$ 處，則降至零。（見圖二）（強度是指每單位面積的功率，以 $W \cdot m^{-2}$ 表示之）

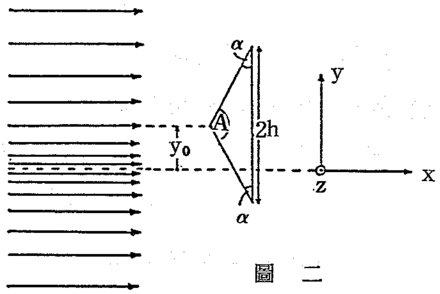


圖 二

1. 寫出方程式用以計算，在當雷射光入射稜鏡上部邊面的情況下，光線射出的角度 θ（見圖三），以 α 和 n 表示之。

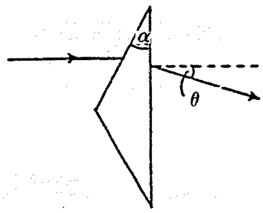
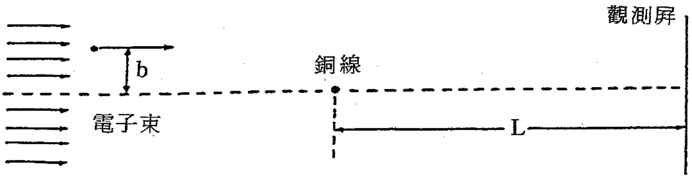


圖 三

2. 當稜鏡的頂點移離 x 軸一段距離 y_0 時，$|y_0| \leq 3h$，則雷射光對此稜鏡施有一淨力，試求此淨力在 x 方向和 y 方向上的分量，以 I_0、θ、h、w 和 y_0 表示之。繪出此淨力的兩分量，即水平方向和垂直方向的分量，以垂直位移 y_0 為變數的函數圖形。
3. 假設雷射光束在 z 方向的寬度是 1 mm，在 y 方向的厚度是 80 μm。稜鏡的 $\alpha = 30°$，$h = 10\ \mu m$，$n = 1.5$，$w = 1\ mm$，$\rho = 2.5\ g/cm^{-3}$。當稜鏡的頂點置於雷射光束中心軸下方 $y_0 = -h/2$（$= -5\ \mu m$）處時，試問需使用多少瓦特的雷射功率才能平衡此稜鏡所受的下拉重力？
4. 假定此實驗是在無重力的情況下進行，使用和題 3. 相同的稜鏡和雷射光束，但光束強度 $I_0 = 10^8\ W \cdot m^{-2}$，當稜鏡被拉離雷射光束的中心線一段距離 $y = h/20$ 後，自由釋放，試求此稜鏡的振動週期？

理論試題 3：電子束

一加速電壓 V_0 產生一束均勻的、平行的、具有能量的電子束。電子束行經一細長的、帶有正電的銅線。銅線的長度方向和電子束的起始入射方向成直角，如下圖所示。符號 b 代表電子行經銅線時，假定銅線不帶電的話，兩者間的垂直距離。越過銅線後，



電子前行至一置於距銅線 L 處的光屏（即觀測屏幕），如上圖所示。入射的電子束起先在銅線線軸的上下兩側伸展至 $\pm b_{max}$ 的距離，但是在垂直紙面的方向上，電子束的寬度和銅線的長度則可考慮為無限大。

下面提供一些數據；其他的數據可在本試卷的前頁查尋：

銅線的半徑 $= r_0 = 10^{-6}$ m

最大的 b 值 $= b_{max} = 10^{-4}$ m

銅線上每單位長度所帶的電荷 $= q_{線} = 4.4 \times 10^{-11}$ C · m^{-1}

加速電壓 $= V_0 = 2 \times 10^4$ V

銅線至觀測屏幕間的距離 $= L = 0.3$ m

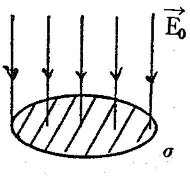
［註］：在解答第 2.～4. 小題時，可取合理的近似值，以得出分析性和數值性的解答。

1. 計算銅線所造成的電場強度 $\vec{E}$。畫圖顯示 $\vec{E}$ 值以距線軸之距離為變數的函數圖形。
2. 以古典物理計算一個電子受力後偏移的角度。解此題時所取用的參數 b 值，不致使電子撞擊到銅線。設 $\theta_{末}$ 代表電子的初速方向和到達觀測屏時的末速方向之間的角度（為一小角度）。本題即在計算 $\theta_{末}$。
3. 計算並畫出古典物理所預測的，在觀測屏上所顯示的撞擊圖樣（即強度分布圖）。
4. 量子物理對強度分布的預測，相對於古典物理而言，有一項主要的差異。畫圖顯示量子物理所預測的圖樣，並提供詳細的數量說明。

二、試題解答及評分標準

理論試題 1：大氣電學

1. 利用高斯定律



$$\sigma = \varepsilon_0 E_0$$

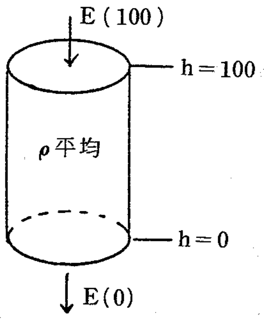
$$\therefore \quad \sigma = -8.85 \times 10^{-12} \times 150 = -1.3 \times 10^{-9} \ (\mathrm{C/m^2})$$

$$Q = 4\pi R^2 \sigma = 4\pi \times (6.4 \times 10^6)^2 \times (-1.3 \times 10^{-9}) = -6.7 \times 10^5 \ (\mathrm{C})$$

2. 考慮一截面積為 A 的圓柱體，其上下兩面所處的高度分別為 100 m 和 0 m。
   利用高斯定律：

$$E(0)A - E(100)A = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_{\text{平均}} \times 100 \times A}{\varepsilon_0}$$



$$\therefore \quad \rho_{\text{平均}} = \frac{\varepsilon_0 [E(0) - E(100)]}{100}$$

$$= \frac{8.85 \times 10^{-12} [150 - 100]}{100} = 4.4 \times 10^{-12} \ (C/m^3)$$

3. 如果在一導體中，每單位體積含有 n 個電荷，每個電荷的電量爲 q ，且以速度 v 運動，則其電流密度，即每單位面積的電流，爲：

$$j = nqv$$

在本題中，地球表面上方的大氣中含有正負離子。已知大氣中的電場方向鉛直向下，則正離子向下移動，負離子向上移動。由於地球表面帶負電，因此只有向下移動的正離子，才能有助於地球表面電荷的中和。若取鉛直向下爲正方向，則產生中和的電流密度爲

$$j = n_+ e v$$
$$= (6 \times 10^8) \times (1.6 \times 10^{-19}) \times (1.5 \times 10^{-4} E)$$
$$= 1.44 \times 10^{-14} E$$

但是 $\quad j = -\dfrac{d\sigma}{dt}$

因此， $\quad \dfrac{d\sigma}{dt} = -1.44 \times 10^{-14} E = -1.44 \times 10^{-14} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$= -\frac{1.44 \times 10^{-14}}{8.85 \times 10^{-12}} \sigma = -1.63 \times 10^{-3} \sigma \doteqdot -\frac{1}{600} \sigma$$

由上式積分，可解得

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{其中} \quad \tau \doteqdot 600 \text{ sec}$$

當 $\sigma(t) = \sigma_0/2$ 時， $t = \tau \ln 2 = 600 \times 0.693 = 415$ (sec) $\doteqdot 7$ (min)

若不利用積分，則可用下述的近似解法：

假設 j 大致維持在 $t = 0$ 時的初值，即

$$j_0 = 1.44 \times 10^{-14} E_0 = 1.44 \times 10^{-14} \times 150 = 2.15 \times 10^{-12} \ (A/m^2)$$

從題1.中，知 $\sigma_0 = -1.3 \times 10^{-9}\ C/m^2$，欲使此值減至一半，則所需「中和電流」流動的時間 t 爲

$$\left| \frac{\sigma_0}{2} \right| = j_0 t$$

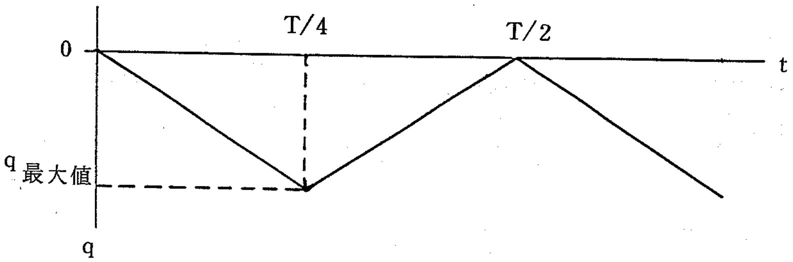
解得 $t = \dfrac{|\sigma_0|}{2\,j_0} = \dfrac{1.3\times 10^{-9}}{2\times 2.15\times 10^{-12}} \doteqdot 300\,(sec) = 5\,(min)$

4. 設當絕緣的四分圓板完全被遮蔽的時刻爲 $t=0$，則可得下列關係式：

在 $0 \leqq t \leqq \dfrac{T}{4}$ 時， $q(t) = -2\pi(r_2^2 - r_1^2)\,\varepsilon_0 E_0 \dfrac{t}{T}$

在 $\dfrac{T}{4} < t \leqq \dfrac{T}{2}$ 時， $q(t) = -\pi\,(r_2^2 - r_1^2)\,\varepsilon_0 E_0\,(1 - \dfrac{2t}{T})$

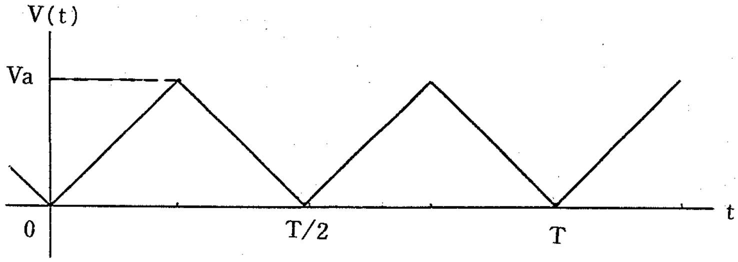
在其後接續的每四分之一週期，則依序重複上述的變化，如下圖所示：



圖中 $q_{最大值} = -\dfrac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\varepsilon_0 E_0$

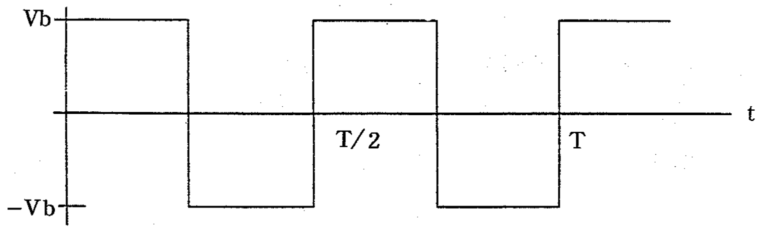
5. 此題可以不用完整的電路分析而得解。由四分圓板上的電荷流入放大器而成的電流分成兩路：一路流入電容C，其值爲 $C\dfrac{dV}{dt}$；另一路則流入電阻R，其值爲 $\dfrac{V}{R}$。電容因充電而儲存的電量爲 CV。按照在四分之一週期內，經電阻所流失電量的多寡（對比 CV），可以分成下列兩種極端的情況：

(a) 如果 $CV \gg (\dfrac{V}{R}) \times (\dfrac{T}{4})$，亦即 $T = Ta \ll CR$。在四分之一週期內，僅有很少的電荷會經電阻R而流失。因此，當絕緣的四分儀圓板經由感應作用而帶負電時，幾乎同量的正電荷會流入電容C。在 $0 \leqq t \leqq (T/4)$ 期間，V(t) 幾乎呈線性增加；在 $(T/4) < t \leqq (T/2)$ 期間，則作同量線性減少，如下圖所示：



圖中　$Va = V_{最大} \doteqdot \dfrac{|q_{最大}|}{C}$　，　$|q_{最大}|$ 爲題4.所得之值。

(b)　如果 $CV \ll (\dfrac{V}{R}) \times (\dfrac{T}{4})$ ，亦即 $T = T_b \gg CR$ ，則大多數的電荷將很迅速經由電阻放電而流失。當四分圓板上的電量 q 增加時，一穩定的正電流將流經電阻R。反之，當 q 減少時，則爲同量而方向相反的電流。此電流值大約爲 $|q_{最大}| / (T_b/4)$。因此，電阻R兩端的電壓，在每一個（T/4）期間，大致恆定，但正負相間，如下圖所示：



圖中， $V_b = V_{最大} \doteqdot \dfrac{4\,|q_{最大}|\,R}{T_b}$

由 (a) 和 (b) 可得： $\dfrac{V_a}{V_b} = \dfrac{T}{4\,CR}$

6.　已知　$CR = 10^{-8} \times 2 \times 10^{7} = 0.2$ (sec)，

$T = 1/50 = 0.02$ (sec)，

得　$CR = 10T$，滿足 $CR \gg T$ 的條依，因此可以利用前面（5a）的結果：

$$|q_{最大}| = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\varepsilon_0 E_0$$

$$= \frac{\pi}{2}[(7\times10^{-2})^2 - (1\times10^{-2})^2] \times 8.85 \times 10^{-12} \times 150$$

$$= 1.0 \times 10^{-11}\ (C)$$

所以 $V_{最大} = \dfrac{|q_{最大}|}{C} = \dfrac{1.0\times10^{-11}}{1.0\times10^{-8}} = 10^{-3}\,V = 1\,mV$

評分標準：

題1.　1分　答對 σ_0 得0.5分，答對 Q 得 0.5 分。

題2.　1分

題3.　2分　寫出　$j = nev$ 得 0.5 分；

寫出　$j = \dfrac{d\sigma}{dt}$ 得 0.5 分；

解出　$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}$ 得 0.5 分；

正確得出最後數字解，得 0.5 分；

若使用　$t = \dfrac{\sigma_0}{2j_0}$ 而得解者，最多得 1.0 分。

題4.　1.5 分　寫出正確方程式，每一方程式得0.5分；

繪出正確函數圖形，得0.5分。

題5.　3.5 分　繪出(a)的正確函數圖形，得1.0分；

繪出(b)的正確函數圖形，得1.0分；

得出正確的（Va / Vb）估計值者，得1.5分。

題6.　1分

理論試題2：作用在透明稜鏡上的雷射力

1.　由圖一知，入射角　$\alpha_1 = \alpha$

（因爲 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha = 90°$）

又　$\gamma = \alpha + \beta$

根據司涅耳折射定律，

$\sin\alpha_1 = n\sin\beta$

$\sin\theta = n\sin\gamma$

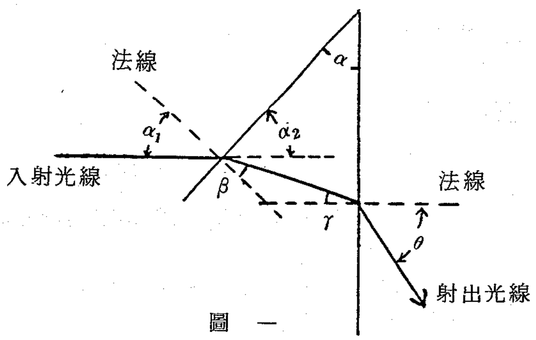


圖　一

由以上各式得：

$\theta = \sin^{-1}[\,n\sin(\alpha-\beta)\,]$

$= \sin^{-1}\{\,n\sin[\,\alpha - \sin^{-1}(\sin\alpha/n)\,]\}$

2. 作用於稜鏡的力，其大小等於雷射光穿透稜鏡前後動量變化的時間率，但方向則相反。為了便於分析，先考慮入射在稜鏡上半部的雷射光的動量變化。假設此沿 x 方向入射的雷射光束，每秒內有 n 個光子射入稜鏡的上半部。如果每一個光子的能量為 ε，則光子的入射動量為 $P_i = \varepsilon/C(\hat{i})$。當此光子以折射角 θ 射出稜鏡後所造成的動量變化為：

$$\Delta\vec{P} = \frac{\varepsilon}{C}(\cos\theta - 1)\,\hat{i} - \frac{\varepsilon}{C}\sin\theta\,\hat{j}$$

每秒內所有入射光子的總動量變化為

$$n\,\Delta\vec{P} = \frac{n\varepsilon}{C}\left[(\cos\theta - 1)\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}\right]$$

式中 $n\varepsilon$ 等於入射於稜鏡上半部的雷射光功率 P_U。因此稜鏡上半部因雷射光折射透出所受的力為：

$$\vec{F_U} = -n\Delta\vec{P} = \frac{P_U}{C}\left[(1-\cos\theta)\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\right]$$

同理，若入射於稜鏡下半部的雷射光功率為 P_L，則此部分電射光施於稜鏡下半部的力為：

$$\vec{F_L} = \frac{P_L}{C}\left[(1-\cos\theta)\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}\right]$$

因此，作用於稜鏡的淨力為

$$\vec{F} = \vec{F_U} + \vec{F_L}$$

$$= \frac{1}{C}\left[(P_U+P_L)(1-\cos\theta)\right]\hat{i} + \frac{1}{C}\left[(P_U-P_L)\sin\theta\right]\hat{j}$$

為求得 P_U 和 P_L，必須先計算出雷射光入在稜鏡上半部和下半部的平均光強，$\overline{I_U}$ 和 $\overline{I_L}$，再分別乘上垂直於雷射光束的投射面積，hw。

即：$P_U = \overline{I_U}\,hw$　　　　$P_L = \overline{I_L}\,hw$

由於光強分布 I(y) 為 y 座標的線性函數，平均光強的計算相當容易。

由題意知

$$I(y) = I_0\left(1 - \frac{y}{4h}\right)，\text{當 } 0 < y < +4h \text{ 時，}$$

$$= I_0\left(1 + \frac{y}{4h}\right)，\text{當 } -4h < y < 0 \text{ 時}$$

現在假定把稜鏡沿 y 方向移離 x 軸一段距離 y_0（$y_0 > 0$）。考慮下列兩種不同的情況：

(a) 若 $h \leqq y_0 \leqq 3h$ ，則整個稜鏡完全處於入射光束的上半部。稜鏡邊面受光的強度函數如圖二所示。

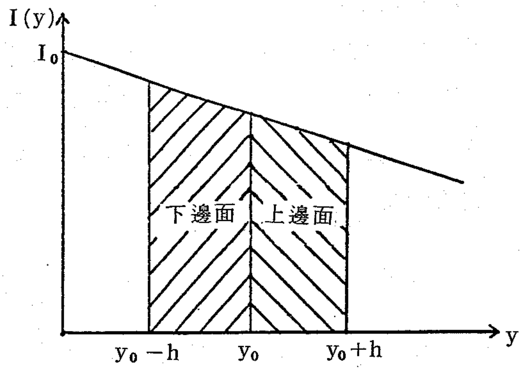


圖 二

由圖可知，稜鏡上部邊面的平均光強等於在上邊面中心處，即（$y_0 + h/2$）的光強；下部邊面的平均光強度等於在下邊面中心處，即（$y_0 - h/2$）的光強。

$$P_L = \left(\frac{y_0}{h}\right) hw\overline{I_{L1}} + \left(1-\frac{y_0}{h}\right) hw\overline{I_{L2}}$$

$$= hwI_0\left(\frac{7}{8} + \frac{y_0}{4h} - \frac{{y_0}^2}{4h^2}\right)$$

至於稜鏡上部邊面的平均光強，則和情況(a)有相同的函數關係，即

$$\overline{I_U} = I_0\left(\frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h}\right)$$

$$P_U = hw\overline{I_U} = hwI_0\left(\frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h}\right)$$

綜合以上各式可得

$$P_U + P_L = hwI_0\left(\frac{7}{4} - \frac{{y_0}^2}{4h^2}\right)$$

$$P_U - P_L = -hwI_0\frac{y_0}{2h}\left(1-\frac{y_0}{2h}\right)$$

解得稜鏡所受之力在 x 和 y 方向上的分力分別為

$$F_x = \frac{hwI_0}{C}\left(\frac{7}{4} - \frac{{y_0}^2}{4h^2}\right)(1-\cos\theta)$$

$$F_y = -\frac{hwI_0}{C}\cdot\frac{y_0}{2h}\left(1-\frac{y_0}{2h}\right)\sin\theta$$

由於入射的雷射光束，其光強分布對稱於 x 軸，以上所得對 $y_0 > 0$ 情況的解，可利用對稱關係以求得對 $y_0 < 0$ 情況的解。所得 F_x 和 F_y 的函數圖形如圖四所示。

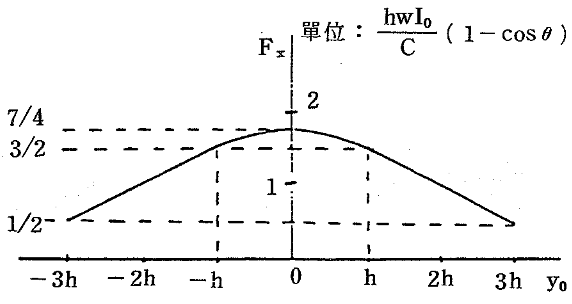


圖 四

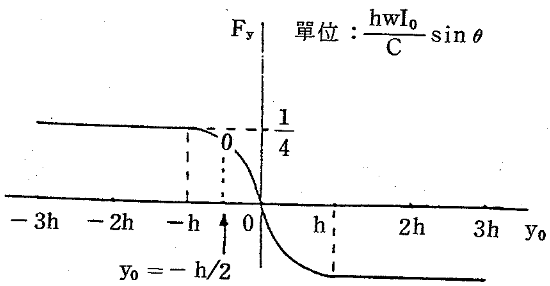


圖 四（續）

3. 由圖三可看出，當 $y_0 < 0$ 時，$F_y < 0$，亦即稜鏡受有一向上的分力，此力可用以平衡其所受的重力。題 2.所得 F_y 的解，雖然是來自於 $y_0 >$ 的情況，但是由於對稱關係，當 $y_0 < 0$ 時，所對應的 F_y，其數值相等但方向相反。因此，欲使稜鏡所受的雷射力，能平衡其重量，則雷射光的強度 I_0 必須滿足

$$\frac{I_0 hw}{C} \cdot \frac{y_0}{2h}\left(1-\frac{y_0}{2h}\right)\sin\theta = mg$$

式中 $h = 10 \times 10^{-6}$ m

$w = 10^{-3}$ m

$C = 3 \times 10^{8}$ m/s

$y_0 = h/2$

$\theta = \sin^{-1}[1.5\sin(30° - \sin^{-1}(\sin 30°/1.5))] = 15.9°$

$mg = \rho(h^2 w\tan\alpha)g$

$= (2.5\times10^{3})[(10\times10^{-6})2\times10^{-3}\times\tan 30°]\times 9.8$

$= 1.42\times10^{-9}$ N

解得 $I_0 = 8.30 \times 10^{8}$ W/m²

雷射光的光強分布 I (y)（由題 2.中所得），可繪出如圖五所示：

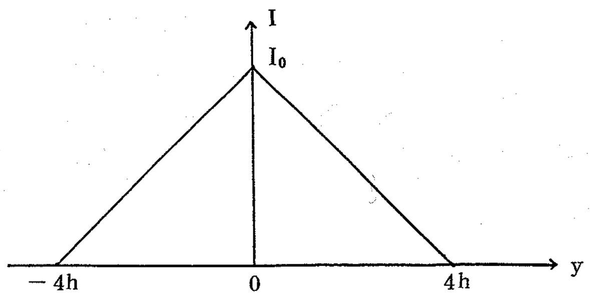


圖 五

由此圖可求得雷射光束的平均光強 $\overline{I} = I_0/2$。所需使用的

雷射光功率P為：

$$P = \bar{I} \times (\text{光束截面積})$$

$$= \frac{1}{2} \times 8.30 \times 10^{8} \times (10^{-3} \times 80 \times 10^{-6})$$

$$= 33.2 \text{ W}$$

4. 因為 $\frac{y_0}{h} = \frac{1}{20} = 0.05 \ll 1$，所以稜鏡所受的垂直分力 F_y 可以很好地近似為

$$F_y = -\left(\frac{I_0 w \sin\theta}{2C}\right) y$$

這是簡諧振子方程式，其振動角頻率為

$$\omega = \sqrt{\frac{I_0 w \sin\theta}{2C}} = \sqrt{\frac{I_0 \sin\theta}{2C\rho h^2 \tan\alpha}}$$

代入已知的數據，可求得稜鏡的振動週期T為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 10^{8} \times 2.5 \times 10^{3} \times 10^{-10} \times \tan 30^\circ}{10^{8} \times \sin 15.9^\circ}}$$

$$= 11.2 \times 10^{-3} \text{ (sec)}$$

評分標準：

題1. 1.5分

題2. 5分 導出 $\vec{F} = \frac{1}{C}[(P_U + P_L)(1-\cos\theta)]\,i$

$$+ \frac{1}{C}[(P_U - P_L)\sin\theta]\,j$$ ，得2分；

導出(2a)之解，得1分；

導出(2b)之解，得1分；

畫出圖四，得1分。

題3. 1.5分

題4. 2分

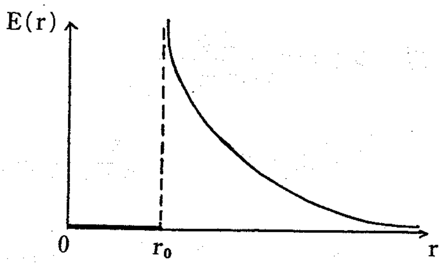
理論試題3：電子束

1. 由於對稱，電場的方向呈輻射狀，以銅線爲軸，沿徑向外，電場的大小則僅爲 r（離線軸的距離）的函數。假想有一以銅線爲軸的圓柱，半徑爲 r，則利用高斯定律可得：

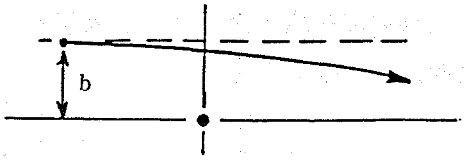
$$2\pi r E(r) = \frac{q_{線}}{\varepsilon_0}, \qquad 式中 \quad r \geqq r_0$$

$$E(r) = \frac{q_{線}}{2\pi \varepsilon_0 r} = \frac{4.4\times 10^{-11}}{2\pi\times 8.85\times 10^{-12}\times r} = \frac{0.791}{r}\ (N/C)$$

若 $r < r_0$，則 $E(r)=0$（因爲銅爲良導體，導體內部的電場爲零），$E(r)$ 的函數圖形如右圖所示：



2. 若 $\Delta\vec{P}\perp$ 代表電子在運動過程中所獲得的橫向動量（即垂直於入射方向的動量），$m\vec{v_0}$ 代表起初入射時的動量，則由於電子受力偏向的角度很小，$\theta_{末}$ 可以估計爲：



$$\theta_{末} \fallingdotseq \frac{|\Delta\vec{P}\perp|}{|m\vec{v_0}|}$$

此橫向動量 $\Delta\vec{P}\perp$ 的大小可估計如下：

電子所受的有效橫向力，其値約爲 $\frac{e\,q_{線}}{2\pi\varepsilon_0 b}$

在此有效橫向力的作用下，電子約行經 2b 的距離，因此此力作用於電子的時間爲 $\frac{2b}{v_0}$。

$$|\Delta\vec{P}\perp| \fallingdotseq (橫向力)\times(作用時間)$$

$$= \left(\frac{e\,q_{線}}{2\pi\varepsilon_0 b}\right)\times\left(\frac{2b}{v_0}\right) = \frac{e\,q_{線}}{\pi\varepsilon_0 v_0}$$

所以 $$\theta_{末} \fallingdotseq \frac{e\,q_{線}}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = \frac{q_{線}}{2\pi\varepsilon_0 V_0} = \frac{4.4\times10^{-11}}{2\pi\times8.85\times10^{-12}\times2\times10_4}$$

$$= 3.96\times10^{-5}\ (radians)$$

（上式中已應用 $\frac{1}{2} m v_0^2 = e V_0$）

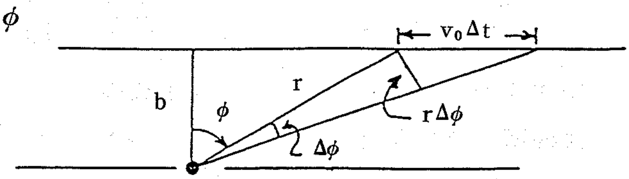
注意此偏向角非常小，並且和撞擊參數 b 無關。由於銅線帶正電，因此電子受吸引力的作用，而使其運動軌跡偏向銅線。

另一種比較準確的算法是把電子在每一小段軌跡上所獲得的 $|\Delta \vec{P}\perp|$ 積分起來。由於電子受偏的角度極小，眞正的軌跡略近於一條直線，如下圖所示：

$$|\vec{F}\perp| = \frac{e q_{線}}{2\pi \varepsilon_0 r} \cos \phi$$

$$v_0 \Delta t \cos \phi = r \Delta \phi$$

得 $$\Delta t = \frac{r \Delta \phi}{v_0 \cos \phi}$$



$$|\vec{F}\perp| \Delta t = \left(\frac{e q_{線}}{2\pi \varepsilon_0 r} \cos \phi\right)\left(\frac{r \Delta \phi}{v_0 \mathrm{ces}\, \phi}\right) = \left(\frac{e q_{線}}{2\pi \varepsilon_0 v_0}\right) \Delta \phi$$

$$|\Delta \vec{P}\perp| = \sum |\vec{F}\perp| \Delta t = \sum_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{e q_{線}}{2\pi \varepsilon_0 v_0}\right) \Delta \phi = \frac{e q_{線}}{2 \varepsilon_0 v_0}$$

此值與前法相比，僅差 $\pi/2$ 因子。

由此法所得的偏向角爲

$$\theta_{末} = \frac{|\Delta \vec{P}\perp|}{m v_0} = \frac{e q_{線}}{2 \varepsilon_0 m v_0^2} = \frac{q_{線}}{4 \varepsilon_0 v_0}$$

$$= 6.21 \times 10^{-5} \text{ (radians)}$$

3. 電子軌跡的偏向大多發生在離銅線距離爲 b 的範圍之內。由於 $b \ll L$，因此全段的電子軌跡，近似於方向改變的兩條直線，折向點靠近銅線，如下圖所示。在觀測屏上所得電子偏向的橫位移爲

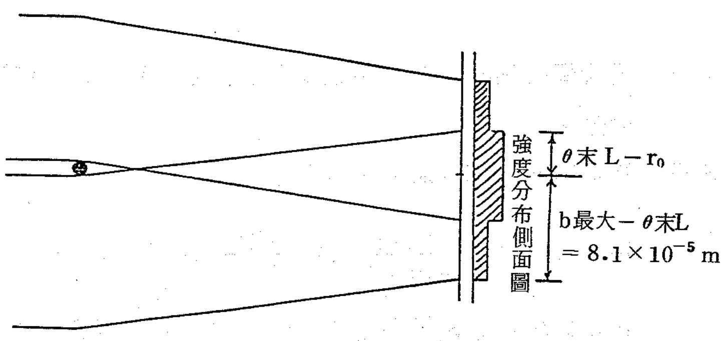
$$\theta_{末} L = 6.21 \times 10^{-5} \times 0.3 = 1.86 \times 10^{-5} \fallingdotseq 19\, r_0 \gg r_0$$

據此結果，可知來自銅線上下方的電子，經偏折後，投射在觀測屏上的區域，有一部分會重疊，如圖（下頁）所示。

重疊區域的全寬爲

$$2 \times (\theta_{末} L - r_0) \fallingdotseq 36\, r_0 = 36 \times 10^{-6} \text{ (m)}$$

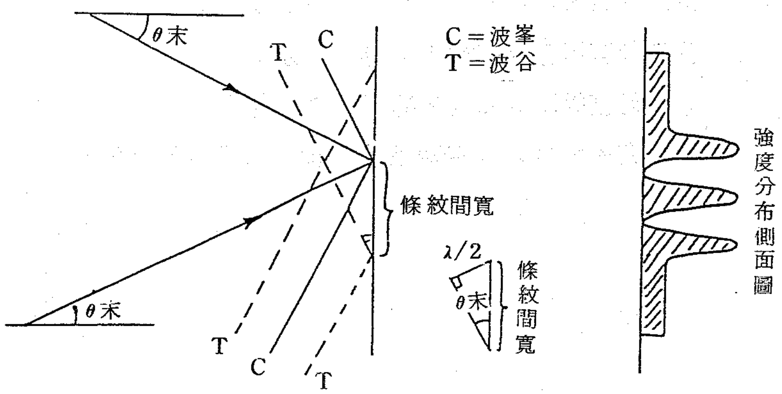
電子在觀測屏上的撞擊密度，在每一區域內都是均勻的，但在重疊區域部分則加倍。



4. 附於電子束的德布羅意波長為

$$\lambda = \frac{h}{m\,v_0} = \frac{h}{\sqrt{2\,meV_0}} = 8.68 \times 10^{-12} \text{ (m)}$$

由於此波長遠小於電子束寬度 $2\,b_{max}$（$= 2 \times 10^{-4}$ m），因此在形成入射電子束時，不致有「單狹縫繞射」的效應。在電子束越過銅線後，附於銅線上下方電子束的平面波（物質波）各以 $\theta_{末}$ 的角度互偏向內側，投射在觀測屏上，在重疊區域處產生干涉，而形成明暗相間的干涉條紋，如下圖所示：



參考上圖，可求得：

（兩相鄰加強性干涉條紋間寬）

$$= \frac{\lambda/2}{\sin\theta_{末}} \doteqdot \frac{\lambda/2}{\theta_{末}} = \frac{(1/2) \times 8.68 \times 10^{-12}}{6.21 \times 10^{-5}}$$

$$= 7.00 \times 10^{-8} \text{ (m)}$$

因為在觀測屏上重疊區域的全寬約為 36×10^{-6} m，所以大約有500條干涉亮紋。注意條紋間寬和 b 或 b_{max} 無關（這和一般的雙狹縫干涉情形不同）。

評分標準：

題 1. 1 分 正確解出銅線外的電場強度E(r)得1分。銅線內的電場強度則不列入計分。

題 2. 5 分 能解出 θ末和b無關，得1分

解得 $\theta_{末} \propto \dfrac{e\,q_{線}}{\varepsilon_0 m v_0^2}$ 或 $\dfrac{e\,q_{線}}{\varepsilon_0 v_0}$ 或相當者，得1分；

θ末的數字係數準確至4的因子以內者，得2分；

θ末的數字係數準確至20％以內者，再得1分。

題 3. 1.5分 指出有重疊區域，得0.5分；

指出在每一區域內電子撞擊密度均勻者，得0.25分；

得出正確的強度比值者，得0.25分；

就學生所解出的 $\theta_{末}$，而能正確計算圖樣全寬者，得0.25分；

就學生所解出的 $\theta_{末}$，而能正確計算重疊區域寬度者，得0.25分。

題 4. 2.5分 指出會產生兩波干涉者，得0.5分；

正確計算出德布羅意波長者，得0.5分；

正確計算出亮紋間寬者，得1.5分；

（如果亮紋間寬僅差2的因子者，得1分）

至於亮紋強度＝ 4 倍單波的強度，則不列入計分。