從微積分發展史中看極限概念的演變(二)

李肖梅
私立吳鳳工商專科學校

中世紀時期

約紀元前500年，由於羅馬帝國瓦解，西歐科學的發展及學者的數學研究沉寂了幾百年的時間。因爲Byzantine及Muslim文明的保留，使希臘的傳統數學知識並未遺失而得以保存遺傳下來（Edwards, 1972）。Edwards（1979）說：

> 大約有四個世紀，回教世界保存了希臘數學家的傳統，並加上東方其他數學分枝，如算術及代數，而得以發揚光大之。在十二世紀，阿拉伯科學開始走下坡，幸運地，西歐開始由它的黑暗沈睡中甦醒，開始來推展新數學知識的發展（P. 85）。

因此，有一長時期的空檔，數學史的發展並未把極限概念加以光大，所幸的是古代希臘文化也並未失傳。

到了十三世紀，亞里斯多德在科學方面的成果得以自由的推廣流傳，加速了對自然界的“時間及空間以及不可分割”等概念的探討。在此時期，有些學者還是主張時間是由不可再分的單元組成，而且認爲一小時是由22560個“利那（instants）”或者“時間的原子（atoms of time）”這種小單位組成。有些學者則認爲時間是由無限多個“連續物”所組成（Boyer, 1949）。

在十四世紀過了1/4之後“量的改變”及“量的變化”等問題受到牛津Merton大學學者的重視而開始著手研究。特別注意研究如何“量化移動”等（Edwards,1979）。這對數學而言是新方向的開始，希臘數學家不能釋懷於基諾悖論就是因爲不知應如何“量化（quantity）”移動而只能做“質化（quality）”移動的緣故（Boyer, 1949），因此Merton大學學者們可能是第一群數學家試圖用數學來分析變量。這些學者試著用適當的定義來說明“均匀速度（uniform speed）”和“均匀加速度（uniform acceleration）”以及公式化“平均速度定理（mean speed theorem)”此定理說明在均匀加速度下，在任何一段時間區間內平均速度是初始速度與終止速度的算術平均值，因此直到十四世紀，數學家開始嘗試用推理來了解“時間及運動”，這是

動力科學發展所必需的理念。中世紀的其他思想家也開始研究了解自然界的變化及質的運動，其中最著名的學者是Nicole Oresme(1320-1380)。Oresme可能是第一位如現代數學家一般會應用幾何圖形表函數者(Boyer, 1949; Edwards, 1979), Oresme試著利用"…最有效的幾何圖表及直觀觀念，和座標系統，來使他的範例更具說服力及簡單明瞭性(Boyer, 1949, p.80)，"也使得Calculater的證明顯得"反反覆覆"及累贅的複雜"文字敍述"(Boyer, 1949, p.78)。中世紀時期幾何學的工作仍舊繼續不斷的發展，雖然此時期的工作成果並不比希臘時期有顯著的突飛猛進，但至少他們使得古代知識更加活躍有生氣。

Boyer(1949)總結中世紀的發展如下：

> 曾提及在中世紀數學的發展並未提昇古典希臘的幾何的層次及代數理論。它的貢獻主要在乎推測理念的形成，大多數是由哲學的觀點著手，探討有關無限大、無限小和連續，以及從新的觀點量化來推展移動及變量的研究。此類研究擔當起微積分概念及發展的重責，由於他們的研究使得早期概念創始者的思想得以與變量的圖形配合和函數觀念等靜態的希臘幾何觀點融和為一(P.94)。

中世紀的數學家面臨並解決一些包含無窮量的求和的問題(是現今數學中的無窮級數求和等問題)。Edwards(1979)就說過"無窮級數"這門科目迷惑著中世紀的哲學家和數學家，顯然他們被無限這個概念吸引，並由他們的好爭論辨解此一概念中的一些悖論例證而顯示出來(P.91)。

Calculator 考慮過由直觀方面來解決一些"長而複雜的文字證明"…類似平均速度的問題，譬如某一動點由某一初始速度來通過第一個半段時間，然後以2倍初始速度通過1/8的時間，如此繼續下去，換言之，他獲得此級數之和為：

$$1/2+2/4+3/8+\cdots+n/2^n+\cdots\cdots$$

Oresme也解過同樣類似此無窮和的題目，Edwards(1979)說：

> 無窮級數的研究在十五及十六世紀繼續以Swineshead和Oresme的風格進行著，並未超越他們原有的文字敍述及幾何的技巧。這些早期無窮級數研究的主要貢獻，並非特殊問題結果的獲得，而是對新概念觀點的鼓勵，就是自由接受及應用無限過程於數學問題上(P.93)。

從現代的觀點看來，十三及十四世紀產生了二個非常重要的事實，第一件就是自由的在數學上應用無限過程，數學家開始克服希臘時期的無限大恐懼症，此為最後極限發

展的必須階段，第二件就是開始用數來分析變量，因此，數學家不必限制在古希臘時期以爲世界是一個靜態不變的觀念之中。

十六及十七世紀

十六及十七世紀時的一些史蹟並非直接對極限的發展和微積分有貢獻，但它却簡化了一些運算，同時增添了新的數學的運算環境，對日後微積分的發展有必要性的。雖然勉勉強強的，但數學家們開始接受無理數及負數爲眞實的數（ Boyer, 1949 ）, Francois Viete(1540-1603)發明了一套有系統有效的符號，包括英文字母的指定，使得一個方程式中的已知數與未知數能明顯的區分出來（ Edwards, 1979 ），這種進步使得Rene Descartes（1596-1650）能採用現今標準的代數符號（ Edwards, 1979 ）。這種符號的使用，使得數學家們能彼此很清晰地及簡潔地溝通定理、定義和問題的解答，這種現象是早期數學家所辦不到的，因爲他們使用長而不清楚的文字敍述，無法把問題的眞正意思明確的表達出來。Descartes 和Pierre de Fermat(1601-1665)開始創造出解析幾何和強調變數（ variables ） 的概念，而變數概念是“發展微積分不可缺少的（ Edwards, 1979, p. 79 ）。”這些改變與進步使得數學的研究範圍得以推廣，數學領域得以發展，對數學發展史及極限概念有更有效的幫助。

阿基米德的研究得以推廣，而在十六世紀的末期變得非常受歡迎（ Boyer, 1949），很快地數學家們進展到可以直接發揚古希臘的研究，繼續解出有關面積、體積、形心及其幾何特性等問題。十六世紀末期及十七世紀初期以此爲研究活動的重點。因它的普及以及雙重否定證明的累贅所產生的不方便，此時期數學家開始顯示對古代“窮盡法”的不滿意，很多數學家，有名的有Simon Stevin在1585年和Luca Valerio在1600年，試圖修正阿基米德的運算過程，因爲不可否認它每次都必須使用雙重否認的間接推理法（ double reductio ad absurdum ）。另一派的研究者，著名的有Kepler，加俐略及加俐略的學生Cavalieri ，基本上排除“窮盡法”的證明，而利用不很嚴謹的啓發式方法從很多問題的解答中，發展出“不可再分法（ method of indivisible)”此有點類似現今微積分教課書中所介紹直觀的敍述面積及體積的各種不同的公式，同時也類似阿基米德（ Archimedes ）最開始所用來解釋“無限小”的工具。雖然Cavalieri 能避免使用“窮盡法”仍能很正確的找出許多幾何問題的解答，但他却無法回答以下幾個問題：爲什麼固體能由無厚度的實體組合而成？或者爲什麼我們可以比較不同的“不可再分”的固體實體？（ Boyer, 1949 ），Torricelli(1608-1647)

（是加俐略的門生）及 Cavalieri（Edwards, 1979）雖然也試著使用“不可再細分”方法，但却了解這個方法所產生的邏輯上的困難（Boyer, 1949），就如同 Boyer（1949）所說，使用“不可再細分”的實體方法是沒有“安全保障（safe-guide）”的。

在數學上使用無限過程的“安全保障”的必需性—像Cavalieri 及其他的人，使用“不可細分”實體去組合成固體—事實上是涉及使用極限的理論。缺乏極限概念及理論，此時代的幾何學家只能在此二種不滿意的方法中任選其一。他們可以使用“窮盡法”，此法在邏輯上是無可攻擊，但却由於文字的累贅的口語敍述，導致延誤了發現的過程，或者，他們可以使用“不可再細分”實體法，此法建立在邏輯基礎不穩定的概念上，而使得使用者不太自在。

除了有關面積、體積和形心等問題外，另外一個重要的幾何問題也在此時得以進行研究，那就是找曲線上某點切線的問題。此求曲線上某點切線的問題日後成爲微分的基本重點概念及應用。對此問題的研究者的包括Torricelli, Fermat, Descartes 和Isaac Barrow（他是牛頓的老師）和其他人（Boyer, 1949; Edwards,1979），他們所使用的方法是直觀性的並無邏輯基礎，因此常遭到攻擊。雖然如此，這種啓發式的研究結果找出許多問題的解答，日後發現這些解答是正確的答案。Gauss 曾這樣說：“雖然我找到問題的答案，但是我却不明瞭我是如何求解的（Kline,1970,p.271）。”到了1650年代Hudde, Sluse 和Huygens（各自獨立）（Boyer,1949;Edwards, 1979）把這種解題的藝術提昇到能夠一一寫出任何有理函數之曲線的運算規則。

十六和十七世紀除了以上的成就外，加俐略和Torricelli（當然還有其他的人）使得了解速度及移動等自然現象又有一大進步。此時加俐略發明了自由落體移動的距離規則（公式），同時他也很有興趣鑽研“無限大”的存在性（Boyer, 1949）。他觀察出一個無限集合可與其子集合有一一對應的可能性，譬如說，自然數（計物數）可與完全平方數一一對應。

1	2	3	4	5	6	7	8 …………………
1	4	9	16	25	36	49	64 …………………

雖然有此發現加俐略却輕率地在他的研究中使用“不可再細分”的整體概念。加俐略感覺“無限大和不可再細分對我們人類而言是很自然不能理解的東西”，在了解連續概念時，他建議說也許在有限與無限集合間可能還存有“第三種集合”的可能性。這種有第三種集合存在於有限集合與無限集合的論點似乎今日看來很可笑，因爲“無限”的定義

就是“不是有限的”，但却說明古代數學家對“潛在無限大”與“實際無限大”的看法，也許可說明爲何這種觀念是現今許多學生認爲一個數列在到達其極限前存有一“最後一項”同出一轍吧（Davis & Vinner, 1986; Tall & Vinner, 1981）。加俐略描述“連續”是由“不可再細分”的部分組成，類同流體擬聚成形，Boyer（1949）就說這種比喩被稱爲是“一種最美麗的努力說詞使人類能用某種方法描述如何從有限超越到無限（P. 116）”。

此段時期恰在牛頓（Newton）與Leibniz發明微積分之前的前奏時段，對往後微積分的發現來說是一令人興奮的時期，但對極限概念而言，數學家仍未能有進一步的清晰了解，雖然他們展示出令人驚嘆的獨創技巧，來計算出只能應用極限概念才能求得的無限過程的結果。很多人注意到他們使用的方法可能產生矛盾，也知道他們需要有堅固穩定的邏輯基礎。其中有少數幾位數學家幾乎已經敲到了極限的大門。因此Roberval在依循古幾何學家使用不可再細分的示範時說，“首先，顯示未知量在內接及外切圖形之中，而其誤差可小於任何假設的已知量（Boyer, 1949, p. 146）”此引言正是今日極限定義中所使用的術語。談到此我們仍需提一爲數學家Gregory of st.Vincent，他“可能是第一位明顯地去定義無窮級數的和是一個量，此量被稱爲是這個無窮級數的極限（Boyer, 1949, p. 137）”，換言之一個無窮級數的和可以用來定義一個前所未知的數。

牛頓和Leibniz

牛頓和Leibniz綜合了先進者的研究，終於發明了數學的新的一支—微積分，並發明了很多的定理以及微積分定理的應用，雖然他們有很大的成就，牛頓和Leibniz在極限概念上的認知和了解，並未超過他們的先進們。牛頓研究差商，以現代的術語來說，就是用來定義導數的定義（亦稱爲瞬時改變速率）。要定義某函數 f 之導數，必須先寫出

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

之表式（在此地 h 之值不能爲零，此公式才有意義），然後，經過代數運算的簡化手續，最後，才求當 h 之值近零時，此分數之極限爲何。因此定義導數時，是要求當兩變量同時逼近零時其商的極限，而非兩變量極限之商。這個求導數的極限概念困擾著牛頓和當代學者，因爲若我們讓 h 眞的爲零，則分子與分母所組成的分數形成$\frac{0}{0}$，一個毫無意義

的商值，牛頓他本人也承認說毫無疑問這是一個在求解問題時有效果的方法，但卻無法明確的解釋為什麼這個方法是有效的，最大的原因就是在當時一個明確有效的數學極限定義尚未產生。就如同 Boyer (1949) 所提示，我們可看出牛頓首先想到無限小的量，此無限小量既不是有限的亦不完全為零。“似鬼魂般的量 (ghosts of departed quantities)”(“似鬼魂般的量”是 Berkeley 最早使用的名詞 (Edwards, 1979)，意指某微小而無重量如鬼魂般輕飄的量。) 被後世用此名詞來談論微小量。再者，Boyer (1949) 又進一步說明：

> “無限小的量 (evanescent quantities)”和“主要的最後比值 (prime and ultimate ratio)”這二名詞牛頓並未明確的解釋清楚，他的答案類似反反覆覆的同義解釋“但是這個答案很簡單，因為最後的速度的意思是指當物體移動時，既不是在它到達最後地點之前物體靜止，也不是在到達之後物體停止，而是在其到達目的地的那剎那時刻……同樣地，無限小的量的最後比值是被視為兩個量的比值，而不是在這二個量變零之前，也不是在其變零之後，而是在他們變零之一剎那 (P. 216)。”

同樣模糊不清的解釋也曾被 Leibniz 嘗試用過，譬如說，Boyer (1949) 引用了 Leibniz 寫的信中的一段話，“我們認無限小並非是一個簡單及絕對的零，而是一個相對的零……它是一個非常小的量，而且在它消逝之前仍保有數的特性 (P.218-219)。”

牛頓和 Leibniz 推出很多微分的基本運算規則，很多積分應用的技巧，衍生出很多重要的級數展開式和解出很多特殊曲線及函數的獨創計算式 (Edwards, 1979)，這種傳統計算式的精華被日後的數學家發揚光大，其中最有名的首推 Leonhard Euler (1707-1783) (Edwards, 1919)。但，微積分發展的主流派卻不以計算為主，而是另一個與牛頓和 Leibniz 不同的方向。Boyer (1949) 對此點加以說明：“整個的十八世紀對微分流數法 (method of fluxions) 或微積分的基本理論抱著懷疑的態度 (P. 224)”。這個新的微積分很明顯地是一個正確的理論，因為它很成功地解答了科學及數學上的問題，很可惜的是它邏輯基礎不夠清晰，如果這一派新的數學不是建立在一個堅固穩定的邏輯基礎上，那麼這些存在在內部互相不協調的地方，如果應用在科學上面是很可能的會造成可怕的錯誤。因為這一緣故，很多數學思想家們開始發出懷疑的聲音，其中最有名及影響最深的批評者該是 George Berkeley，他寫了一本書來評論及批判牛頓的研究，Boyer (1949) 及 Edwards (1979) 二人都認為他的批評相當中肯及合理。Berkeley 對牛頓研究的批評是缺乏合理的解釋及偶而產生的

不和協及矛盾之處。特別地，Brekeley 指出當牛頓希望求導數時，牛頓列出一個含有二個變量 x 和 h 的式子，而特別強調 x 和 h 均是不為零之數，經過一道簡化手續之後除以 h 之值（只有當 h 不為零時此除式才有意義），然後令 $h=0$，Berkeley十分正確地反對此說法，因為如果在求導數的最後時刻令 $h=0$，那麼不正與在求導數的開始時刻，令 $h\neq 0$ 的要求互相抵觸嗎？

由於Berkeley的強力批評，牛頓定義導數的背後邏輯基礎需要加以合理化，因此其他的數學家就著手研究彌補改進之法。首先有部份學者的著作只是Berkeley的"精神上的二次答辯（Spirited rejoinders）"，"大多數的作品只能證明作者根本不了解Berkeley之本意，甚至不懂微積分是什麼…（Edwards, p. 295）"。Benjamin Robins在回應James Jurin 的一篇小論文時，推崇牛頓的研究，但最終仍無法滿意的嘗試清晰解說牛頓的思想（Boyer, 1949）。Robins分辨出所謂"最終比值"一詞乃是比喻的意思，用來參考

> 一個固定的量，卻被藉著繼續不斷的增加或減少而多多少少在改變的變量逼近……提供的這個變量，可任意的接近另一個固定的量，其差可為任意指定無論多小都可以辦得到的微小量……雖然可使變量任意接近固定量，但是卻是絕對不能等於的量（Boyer, 1949, p.230）。

以上這個定義除了它累贅的文字敘述之外，它堅持極限是不可及的（the limit can never be reached），而此極限不可到達的觀念就限制了常數數列有極限的可能性。Boyer（1949）就說明了Jurin 和Robins之間的爭論（兩者皆試圖為牛頓作答辯，但卻彼此不同意對方說詞及做法）把此時期對極限概念認知困難的原因表明。Boyer（1949）為此進一步說明此爭辯：

> 一個變數是否被考慮必須到達其極限這個問題佔有很重要的地位 Robins 持有不可到達極限的理論；Jurin 強調有變數是可到達其極限的，並強而有力的控訴他的對手把牛頓的本意給扭曲了。雖然很難判斷牛頓的本意，而"最終比值"一詞卻很明顯的贊成 Jurin 的說詞，但是卻無法避免其內存有關於無限小的問題以及0/0真正代表意義等的邏輯困難，似乎此時是有必要去接受 Robins的合邏輯的觀點來接受變數不必要達到（等於）其極限（P. 231）。

Boyer（1949）也特別描述了Robins 的觀點，是變數不但"不需要"而事實上也"不可能"到達其極限。在討論這個主題的最後，Boyer（1949）提出"是否一個變數到達其極限之問題，在現今極限的定義說詞中，根本不是一個重要問題，大可不必為此

爭議（P.232）。

此時期其他的學者也紛紛發展出微積分的理論，試著從不同於牛頓和Leibniz 的方向開始推論微積分的規則及定理，但是這些研究者也同樣面臨基礎理論不能清晰的說明及邏輯上的困難。Lagrange嘗試把微積分建立在使用無窮級數的展開式上(Boyer, 1949）。利用這些級數展開式中的係數去定義牛頓和Leibniz 的無限微小及微分，可是這必須在假設這樣的級數展開式存在的前題下才可行，而這個前題比相信牛頓和Leibniz 的研究一樣地有困難（除此之外，我們都知道玩弄有限項“和”的遊戲並不能保證無限項“和”的存在），根據Edwards（1979）的說法，Lagrange希望“在微積分中抹殺所有無限小和極限的概念…”John Lander在1758年出版了一本書Residual Analysis,其中他似乎毫不考慮地把代數規則運算，應用在“不定型（indeterminate）”的分式上，此式中分子分母皆逼近於零（Boyer, 1949）。Landen盼望微積分的成立能建立在已知的代數運算原則和幾何理論上，而沒有介紹仍非常陌生的假想的移動（imaginary motion）或不可思議的無限小（infinitesimals）。此“假想的移動”一詞可能是參照牛頓的微小流數（fluxions）”。

以上的討論並不是說十八世紀的努力是毫無成果。譬如說，d'Alembert基本上就正確地定義導數是兩增量（increments）比值的極限（Boyer, 1949;Edwards, 1979），而且很用心地“呈現出一個令人滿意的極限概念”（Boyer, 1949,p.253)，雖然d'Alembert 的定義仍然缺乏可以清晰的取代某些神秘的無限小的說詞。但是d'Alembert定義一個量被稱爲是另個量的極限定義却非常接近現代的定義：

> 當第二個變量可用很小的已知誤差來預估第一個量時，不論此已知誤差是多麼的小，而此逼近的變量無論如何逼近都不能超越其逼近的量，如果是這樣的話，此變量的誤差及此變量的極限都是絕對不可指定的（Cajori, 1923, P.224）。

Boyer（1949）對此也加以說明：

> 由于他的幾何理想化概念，d'Alembert 精心完成的極限概念缺乏很明確的來取代必須用來說明無限小的詞句。因此對d'Alembert來說當割線上的二點合而為一時而成為切線，而說此線是割線的極限就是强迫吾人必須用視覺去追蹤這二點變為一點之過程，因此陷入了Zeno的悖論的矛盾中(P.249)。

Lagrange 很明顯的對極限的認知感到猶豫不決，因爲他試圖定義極限如下：『眞正的極限是一個不可超越的量，但却是一個我們可以無限制的逼近的量』（Cajori, 1923，p.223）。這種說法讓人會以爲極限是指單邊的極限而言。

Simon L'Huilier 在 1787 年發表了一篇微積分的論文，其中以極限爲基礎（Boyer，1949，p.255），他的極限的定義使得“某變數永遠或者永遠小於極限；某變數是不可能在極限值的上下移動（Cojori，1923，p.228）。”有趣的是他警告其他學者不要嘗試分別去解釋這個$\frac{d^2y}{dx^2}$式中的分子與分母。他認爲 $\lim\frac{\triangle y}{\triangle x}$ 是一個變數，而非極限爲零的二個變數（Cojori，1923）。

Euler 爲十八世紀微積分的發展預備了一條道路，他在 1748 年出版一本專集 Introductio in Analysis Infinitorum，在此研究中，雖然偶而會過份的引用未曾定義的無限小的數，然而却給後來造成很大的貢獻，其中最有價值的貢獻是 Euler 很明確地使用函數的概念（就是在二變數間可一一對應的規則），造成函數而非幾何圖形成爲主要的研究對象（Boyer，1949；Edwards，1979），函數概念的探討成爲日後極限概念的產生的重要依據，Edwards（1979）曾這樣說：“是由於函數概念的驗明正身，而非曲線的圖形成爲主要的研究對象，使得幾何概念得以算術化…（P. 270）”。

爲何“算術化（arithmetization）”很重要呢？由於以上的討論，我們知道在此世紀的末期，數學家們終於能夠找出了一個嚴謹的極限定義，而此定義完全以數字來表示。而在正式合邏輯的極限定義中，幾何的觀念完完全全不在考慮之內，因此可以很明確的說明“這個數列之值有那個數爲極限”，而不可以清楚解釋“這個曲線數列逼近另一條曲線爲極限”或“這個區域是那些區域所成數列的極限”，而眞正這些說詞的後面所含的意義是（如果有的話）有一些幾何圖形所表數值如面積、曲線段、長度等，可由此圖形對應數值的變化形成數列以另一個“極限圖形”的數值爲極限。（事實上這種反覆同義的說法有其危險性，在很多情況下這些數值（如面積、曲線之長等等）被稱之爲“極限圖形可能是一個事先無法完全定義的量”，因爲可能需要去“定義”一個極限圖形的數值爲另一些一一對應值逼近的極限圖形。Boyer（1949）就曾數次提到“算術化”的必需性（P.104,124,153,235,271）直到此一世紀之前，數學家的思想是傾向於幾何化而非算術化。由於算術化的研究求解問題，終於引導發展出微積分的嚴謹基礎的產生，但是在此時微積分仍有些幾何化的傾向，因此所求極限是否可及仍造成認知上的困擾。

（未完待續）