從微積分發展史中看極限概念的演變(一)

李肖梅
私立吳鳳工商專科學校

數學及自然科學家沒有微積分就像天文學家沒有望遠鏡，生物學家沒有顯微鏡一樣。數學的知識是國家社會資源的一種，而微積分又是這個資源的發揚光大，極限却是微積分的精神之所在。微積分不是憑空產生的，它經歷了很長一段時間的醞釀，而它的基本思想精神所在，極限的起源，甚至可以追溯到更遠的古代。在二千多年前我國古代文學名著<莊子>裡，惠施曾說：「一尺之捶，日取其半，萬世不絕」。從這句話就迸發出微積分基本思想極限的火花。極限概念在不同數學分支佔有一席之地，因此，是一個極重要的數學概念，但是它的重要性是什麼呢？而何謂極限呢？基本上來說，某些極限概念的產生是當某個數學物件（譬如說某個幾何圖形或一個數目），是可被視為跨越某個無限過程後的結果。極限概念在數學的運用上是必需的，有了極限概念之後無理數的觀念，圓周率、不規則曲線圖形的面積、體積等，及對數、三角函數等，變的有意義也易瞭解，因為有限過程是不足以使分析數學的重要理論發展到那裡去。極限概念是微積分的邏輯概念基礎，沒有了它學生學了再多的微積分理論也都儘是皮毛運算的學習而已。而無法達到更上一層樓的境界。

研究學生了解極限概念的研究者（Confrey, 1980; Davis, 1984, 1985; Davis & Vinner, 1986; Dreyfus, 1990; Fischbeinetal., 1979; Fless, 1988; Orton, 1983a, 1983b, 1986, 1987; Orton & Reynold, 1986; Sierpinska, 1987; Tall, 1981, 1985; Tall & Schwarzengerber, 1978; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1989, 1991）發現某些錯誤及誤解似乎是廣泛地具有某些特殊模式，而這些特定的誤解及錯誤的某些概念的表現是大多數學生共同的困難。研究極限概念史的發展或許可提供有價值的內幕原因來說明為什麼這麼多人如此想及如此作這些題目。Confrey（1980）就說：「發現及探討某個概念的認知問題，就要藉助研討某個概念或某組相關概念史發展的演變而得知。」筆者深信就某些方面來說，學生必須經歷創造數學知識這一個階段，也就是說學生本身必須從頭來經驗某數學概念的產生的必要性，進而瞭解數學概念演變發展的必要性。Kline(1970) 曾強

調：

毫無疑問的某些偉大的數學家所面臨的困難也正是現今學生的拌脚石，學生經驗這些拌脚石的存在，但却沒有化解這些拌脚石的邏輯背景的辦法……甚至，學生所經歷的這些困難正如同早期數學家一般，須藉著慢慢地習慣及接受這些新概念，不斷的嘗試及從直觀方面體驗，當然也可以經由老師的指引及誘導（ P.270 ）。

研究極限概念的發展史，事實上，是非常必要的。因爲筆者發現許多現今所發現的概念的表達問題也曾困擾過往日的數學家，而他們都是當代最偉大的思想家。這個發現顯示，至少，在學習上存在某些概念上的困難及困擾以至於阻止正常的學習及吸收極限概念，這是正常及不可避免的學習過程。同時這也顯示在學習某概念時，每個人都必須經歷了解此概念的不同階段。否則就無法突破及精通此概念。爲此筆者希望就微積分發展史而探討爲何極限概念是如此難以精通。

『連續』這個概念的發展史是與極限概念的發展史並行的。數學的連續概念，雖然不容易單獨了解而且沒有極限概念作基礎是無法了解的，但它使很多問題容易著手。譬如說物理上的固體機械學中的某一固體，如果我們把每一個固體認爲是有限個但却是大量的原子所組成的，而每一個原子就數學觀點來說都是分開的而不是連續的量；那麼就會很不容易了解，在研究極限概念的發展史中，我們就看出爲何往日的數學家無法滿意的來回答科學發展上具有重要性的微積分的問題。就是因爲無限過程所涉及的極限概念及技巧不存在的關係。我們也看得出來很多次數學家非常逼近及了解極限這個概念，但又擦肩而過以至無法正確來定義極限概念，我們也會了解極限概念的正式定義，（在 1870年代由 Weiershrass 所定義的）是必須以此定義之形態成立。這些都一一顯示極限概念對數學及科學的重要性及必需性，它漫長的演變過程及它爲何必須是其最後定義的形式等這些都是爲何微積分對學生而言是這麼困難的以及無法精通的徵結所在。

從這篇歷史背景的探討，我們將會了解爲何許多困擾現今學生的問題，像無限過程這個概念，極限及數論（ Confrey, 1980; Taback, 1975; Williams, 1989, Orton, 1983a, 1983b ）等也曾困擾過往日偉大的思想家及數學家。似乎人類以整體而言，在了解微積分的基礎概念上都必須經歷某些階段的了解，就如同現今的學生如要眞正精通微積分就必經歷此過程一般。基本上造成學習極限概念困難的原因就是人類的有限思緒無法透視，必須經歷無限過程至極限這個概念，事實上，人類所接觸的事物都是有限的。而在數學這個學科內，我們看得出，無限這個概念出現在非常早期的數學發

展史上。我們需要的是一個橋樑去溝通無法透視為一體的一個無限過程和跨越這個無限過程後的可能情況產生的結果，而這個跨越無限過程的橋樑就是極限這個概念。

希臘前期古埃及的數學—希臘的推論系統數學

希臘文化前的古埃及時期製定了一套數值及空間關係的理論，而這個理論的產生是長期觀察大自然的經驗的產物，其中包括經由長期測試及插補法而發現的方形底角錐體的體積的公式（ Boyer, 1949 ），巴比倫的天文學家研究的問題包括連續的變量，藉著觀察某函數數值的記錄（比如說月光的亮度）來推論函數極大值的近似值（ Boyer, 1949 ）。這些成就對現代數學家也許一文不值，但是對只憑感官感覺而來組織知識及利用生疏材料來推理的當代數學思想家而言却是非凡的成就。Boyer（1949）說：

> 所有埃及的數學研究工作是用比缺乏推理證明而冒然下結論更基本的方式，那就是應用一些離散的個案，而以有限個數字為主的規則運用，因此他們沒有一個三角幾何圖形可以代表所有三角形的觀念，而這種抽象的一般化觀念正是推理系統的中心思想（P.15）。

因此希臘前期之埃及文化還未複雜到使他們的數學概念能一般化，譬如說，對所有的三角形而言，若能試著去證明一個命題是適用一個三角形就立刻適用於所有的三角形的概念。

古希臘的數學家繼承了數學應該是一個推論系統的態度，而此心態決定後來數學能一般化的特性。這種觀念的產生最早首推希臘數學家Thales（Boyer, 1949），可能Thales是受了埃及和巴比倫思想家的影響，只可惜這時期的資訊是片斷的而無法加以考證。此外，數學家維持推理系統的原因是因為希臘數學家相信單一和大自然的合理性，這個信仰使他們認為自然界的定律是可推理而來的，而且也是數學的一部份（ Boyer, 1949 ），古希臘哲學家Pythagoras所領導的一派學者主張『萬有皆數』（All is number），依這個觀點而論，事實上與此觀點無法分割的，是希臘的哲學認知，是視幾何圖形為一抽象物體而非實存的具體物體。Kline（1972）就如此說：

> 希臘數學家對數學概念最偉大的貢獻之一是意識強調數學整體性，數字和幾何圖形是抽象的事實，人腦可思考觀念及明確的區分具體物體或圖片。……甚而幾何的認知在希臘前古埃及文化中確實與物質連繫著。對埃及人而言，比如說，一條直線僅僅是一條繩索或一塊土地的邊長或長方形是一塊土地的邊界（P.29）。

希臘時代的概念

在現代分析數學發展史上一項必需的要件，就是有正確的數論觀念，現今所使用的實數系並非可直接觀察而能獲知，能觀察得出來的是計物數，換句話說，就是正整數，其他所演繹出來的數系大部份是人類的發明，所以Leopold就曾說過：「上帝製造了整數，其他的數都是人類所製造出來的。」(Kline, 1972, p. 979)，古希臘不把分數2/3視爲一單一數目，而視其爲一比值2：3 (Boyer, 1949; Kline,1972)，他們發展了一套比例 (ratio) 的理論，而視比例爲一有次序的一對整數。因此，希臘的數論被限制在現今所謂的有理數論內，雖然他們對有理數的認知與現今有理數不同。此時，希臘數學家們也積極努力解決面積及長度的問題。因爲面積和長度一般而言是無法不用同義字來定義，亦即用已知的概念來定義，因此他們的理論是建立在應用問題上，換句話說，面積的基本求法就是把一個圖形放置在另一個圖形上來觀察二者是否能吻合，或者圖形落在另一圖形內。希臘幾何學家不認爲一個簡單的圖形，譬如說，長方形或線段是有面積或長度的，而視其爲此圖形與另一圖形兩圖形的比值，兩圓形A和A' (線段或長方形)被稱爲是可比較的 (Commensurable)，如果可找到第三個圖形B，使得A和A'被切割成圖形B的整倍數個。任何一對線段都具備有理數長度 (或任何一對長方形有理數邊長者) 均稱爲可比較的。若線段具有“有理數”長度，則任何一對線段都是可比較的，但是他們發現，(此發現對希臘幾何學家造成很大的恐慌) 就是有些對線段是不可比較的 (incommensurable)(Boyer, 1949; Browne, 1934; Cajori, 1915, 1923; Edwards, 1979; Kline, 1972)。事實上，他們發現邊長爲一的正方形之對角線與其邊長是不可比較的。因此，一個必然的結果，就是並非所有的線段都具有有理數的長度。

這個不可比較的現象對希臘數學家來說，就意謂著數與幾何量是不可一一對應的概念，而這種不可一一對應的理論阻遏了希臘數學的發展。他們談論幾何量，但卻不視度量與數爲同一個對應物，這是因爲他們的數系只發展現今所謂的有理數系，也就是說任何一對數字都是可比較的有理數。

有些數學家嘗試著去補救或設法解決這個不可比較的窘境，而產生所謂的“無窮小 (infinitesimals)”的線段，來做共同單位，去測量正方形的邊長及對角線的辦法，但是希臘數學家一般而言都不太相信“無窮小”的存在。確實，承認“無窮小”的存在是正確的，因爲這也就是等於承認“無限大 (infinity)”的存在，而希臘思想

家及數學家，有如Boyer (1949)及Edwards (1979)提過好幾次，存有“無限大恐懼症(horror of infinity) ” Kline (1972)就提過“好與壞 (good and evil) ”在古埃及時期被視爲是“有限與無限 (limited and unlimited) ”。因希臘思想家對大自然的合理現象有強烈的信心，而且也相信數學是非常眞實的反應大自然的科學，因此他們非常反對所謂的無限集合及無限過程。亞里斯多德 (Aristotle) 就曾區分所謂的“潛在無限大 (potential infinity) ”與“實際無限大 (actual infinity) ” (Boyer, 1949; Fischbeineyal., 1979, Kline, 1972 ; Tall, 1981)。“潛在無限大”存在以下的情況中，就是說不論人身在何處都可往前躍進一步，這種現象就稱之爲潛在無限大，舉例來說，對任一個正整數而言都可以找一個更大的正整數，所以正整數集合就可視爲潛在無限大，因爲若站在一百萬上，我們仍可繼續數一百萬零一，一百萬零二等等。不過，正整數這個集合本身若完全視爲一個存在的整體，那麼它就是“實際無限大” (Kline, 1980)。雖然無限大有此區分，亞里斯多德却否認實際無限大的存在，他說：「以事實論點來說，數學家不需要無限大也不必用到它。(Boyer, 1949, p. 41)」

希臘數學家試著去捕捉“時間與空間”的眞正意義。有些用原子論 (atomistic view) 來詮釋時間與空間。視其爲單獨單位原子組合而成，有些却認爲時間與空間是連接在一起的，而柏拉圖 (Plato) 嘗試去融和這二種觀點，而認爲時間與空間是“由流動的介子 (the flowing of the apeiron) 組合而成。(Boyer, 1949, p. 28) ”這種離散和連續的關係困擾著希臘人，Kline (1972) 就曾提及並複述亞里斯多德的點與線的關係，他說：「雖然他承認點是在線上，他認爲一條直線却並非由點組合而成，因爲連續是不可能由離散的物質組合而成……(p. 175-176)。」希臘數學在數論、時間和空間上概念的弱點，被基諾 (Zeno) 的四個著名的悖論指出前二個悖論，被稱爲二分論 (Dichotomy) 及阿基里斯 (Achilles)悖論，此二悖論擬似解說時間與空間是無限可分割這個說法在邏輯上的矛盾，而後二個悖論被稱爲是射箭 (Arrow) 及競走 (the Stade) 是從另一個方面來顯示，以原子論來說明時間及空間的矛盾，此四悖論可參閱Boyer (1949, p. 24) 和Kline (1972, p. 35-37) 以便了解其內容。有關二分法悖論是這樣記載的：

> 某一跑步者作如下推論。在跑步人達到終點線之前必須先經過中點。然後再必須跑到 3/4 處，它是剩下距離的一半。而在跑完最後的 1/4 這段路之前，必須跑到這段路的中點。因為這些中點是沒有止境的，因此，跑步人將根本不

能達到終點。

換言之，若在“空間是可無限分割(infinitely divisible)”及“有限線段是含有無限個點(infinitely number of points)”的假設下，那麼在有限時間內超越有限線段是不可能的(Kline, 1972, p. 35)。但是希臘哲理家及數學家無法解釋這個悖論，甚而幾世紀後像加俐略(Galileo) 這位偉大的天文學家也被此悖論困惑而無法釋疑(Boyer, 1949)，Boyer (1949) 提出像二分法這個悖論困惑很多思想家，是因爲無窮級數的收斂至一個有限和這個過程是無法被接受的，他說：「顯然基諾悖論的解答牽涉到連續性、極限，和無限集合論等抽象觀念，而這些抽象觀念是希臘人還未能思考及創造出來的數學概念(p. 25)」

或許這個問題的癥結是在於無法接受及了解一個“有限多”的區間是如何能分割成“無限多”的子區間這個道理。基諾的悖論似乎使希臘數學家銳氣受到挫折(Boyer, 1949; Cajori, 1915; Kilmister, 1980; Kline, 1972)，而不再用量來描述及分析變量這種現象，特別是不再量化“移動(motion)”。事實上，反觀數學發展史，似乎了解移動是比了解形狀及數目來的困難。對這個論點，Boyer (1949) 講評如下：「只要亞里斯多德及希臘思想家認爲運動是具連續性而數目是具離散性，那麼一個嚴謹的數學分析理念及滿意的自然運動力科學就很難產生(p. 43)。」

用圓的內接及外切正多邊形這種方法來逼近圓面積或求圓周率，是最基本求預估圓面積及證明一些圓面積的理論的方法。早期的幾何學家期盼用不斷地加倍內接正多邊形的邊數，那麼就可看出結局一正多邊形與圓相吻合。雖然後來的幾何學家知道並不存有一個“最後的正多邊形(last polygon)”，這些由加倍數邊所獲內底邊及高可測知，因而便可由計算出三角形的面積而求出內接及外切正多邊形的面積。譬如說假設 $\{P_n\}$ 是一個數列，而 P_n 表邊數爲 2^n 的圓內接正多邊形，和類似的 $\{Q_n\}$ 數列爲邊數爲 2^n 的圓外切正多邊形，那麼

$$P_n\text{ 的面積} < \text{圓面積 } C < Q_n \text{ 的面積}$$

如果把上式第一個及第三個正多邊形在 n 之値很大時的面積求出，那麼所求圓面積的近似値就相當逼近眞値。當然沒有一個很大的 n 値存在會使 P_n 與 Q_n 與圓吻合，但是我們不難看出爲何早期幾何學家會認爲圓周上的點是具有某種尺寸，好像一種“原子弧長(atom of arc length)”似的單位長度。

這個圓內接正多邊形數列很可能是第一個很自然而又非常有用的數列。現代數學家都知道圓面積 C 是此數列的邊數逼近無限大時，圓內接正多邊形的面積的極限可定義爲

圓的面積。但是我們必須認清希臘數學家並沒有可跨越無限過程或可完成這種無限過程的極限概念，因而，不論從何角度來說，他們却認爲求圓面積就是求這個無限過程的最終結果。古希臘的大多數數學家及哲學家並不相信無限大或無限小的存在性，也不相信任何感官所不能測定的事物。譬如說 Boyer (1949) 就提到：「…亞里斯多德…就無法接受超過思想所不能表達的事物。其結果就是他否定“實際無限大”的實際存在，並把“無限大”這個詞句限制於應用在“潛在無限大”的觀點上。(p. 40)」在那個時期的數學家，認爲圓面積是正多邊形面積所組成的數列的極限是不正確的觀念，因爲人類無法用肉眼去追蹤正多邊形最後變化爲圓的過程，而這種視覺上的無限過程是無法辦到的。因此，要去解釋爲何正多邊形所成數列能“最後”變成圓就如同基諾悖論一樣無法接受。

雖然古代數學家研究幾何問題，潛意識或意識中都牽涉到無限過程這個概念，但是他們都能躲避去直接面臨無限過程這個概念 (因而躲避極限概念)，而用有名的“窮盡法 (Method of Exhaustion) ”這個古老的技巧來探討數列的發展。“窮盡法”被後來的幾何學家所廣泛應用。其基本方法是很精巧的被 Eudoxis 的公設說明及應用如下所述：

> Eudoxis公設：設 M_0 及 ε 為已知量；假設 M_1 是去掉一大半 M_0 所成 (所以 $M_1 \leqq M_0/2$)，同理 M_2 亦是去掉一大半 M_1 所成 (所以 $M_2 \leqq M_1/2$)，如果此種過程繼續下去，產生 $M_j \leqq M_{j-1}/2$。則有一自然數 n 存在使得 $M_n < \varepsilon$ 成立。

白話一點來說，就是如果繼續不斷的二分切割一個量，最終我們會到達一個階段，那就是所剩餘的量比我們預知的任何量都小。藉著這個“窮盡法”，希臘數學家能夠避免面臨無限過程的“完成”這個概念，却也爲此付出昂貴的代價，因爲這種方法看似合乎邏輯，而事實上却應用雙重否定假設推理。這也就是說此證明經常是反反覆覆及困難重重的。Edwards (1979) 就提及：

> 一個合邏輯完整的反證法是不需明顯極限概念而可獲得的，特別是，希臘人對無限過程的神秘性，也就是我們所謂的極限概念，是隱含在 Eudoxu's 的原理中 (P. 27)。

雖然 Eudoxis 的公設是爲了要避免觸及無限過程的困難，但是現代極限概念的種子却深植其中，首先，很明顯地，直觀認出 $\{ (\frac{1}{2})^n \}$ 這個數列逼近 0 的事實，其次，令人驚嘆地是認出 M_n 這個量最終會比任何預知的固定量還要小這個觀念。先前提

(下轉第 46 頁)

地相關科教設施。

此外新加坡青年科學營與香港聯校科學展覽也分別於五月廿五日及七月廿二日起展開約七天至十天，我國各選派二名學生代表及二位陪同人員前往與會，進行非常順利。

教育部郭部長特於五月卅一日上午接見參加美國科展得獎學生，予以嘉勉。科教館則於中午假晶華酒店貴賓室，舉行「中華民國參加國際科學展覽活動代表團返國記者會」，教育部李次長及多位長官蒞臨指導鼓勵。同時總統府李資政國鼎先生於九月十五日接見參加美、加、星、港等國際科學展覽活動之四團學生代表，當面嘉許，還特地邀請中央研究院院士李遠哲博士與學生親切座談，學生均獲益良多，意義十分重大。

本項活動每年均在十二月份辦理報名，次年二月份辦理評審，除選拔正選代表，並給予多項獎項與獎勵。有興趣的同學可經由學校辦理或直接向國立臺灣科學教育館詢問有關事項。（國立臺灣科學教育館館址：台北市南海路41號。電話：02-3116733）

（上承第37頁）

及，希臘數學家有“恐懼無限大”這個心理，但是阿基米德却使用無限小作爲直觀測試問題的工具，Boyer（1949）解說此論點：「用這種啓發式的方法，阿基米德能預測微積分可成就的一些了不起的結果（p. 50）」，但是Boyer（1949）認爲：「阿基米德使用啓發式（heuristic method）的方法……用窮盡法作爲初期展示極限嚴謹化的示範方法而已（p. 51）。」特別值得一提的是阿基米德的有名的成就，就是發現拋物線所圍面積的公式（Boyer, 1949; Kline, 1972），他試著考慮以下數列之和：

$$A, A(1+1/4), A(1+1/4+1/4^2)\cdots A(1+1/4+1/4^2+\cdots+1/(1/4)^n),\cdots$$

藉著雙重否定假設推理這個窮盡法推論所求面積不會大於（3/4）A也不會小於(3/4)A，（A在此處表某一拋物線內接三角形面積），因此

$$A(1+1/4+1/16+1/64+\cdots+1/4^n)=(3/4)A$$

亦即所求面積等於(3/4)A。

（未完待續）