# 定圓外切 $n$ 邊形的最小面積、周長及推廣

邱坤毅
省立臺東高級中學

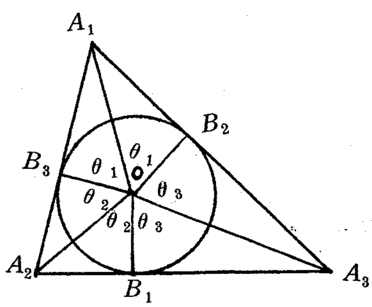
## 一、前　言

很多人學數學的目的，大都求在聯考能有好的成績，但不知數學在日常生活中能提供不少的幫助。以下舉個都市計劃的例子：甲市有個圓環，市長想做個三角公園，使其邊與圓環相切(切點可做入口處)，以美化市容。但土地及建材都十分昂貴，您如何設計三角公園使市政府的花費降到最低？如果設計成四角公園、五角公園……又該如何？

## 二、本　文

甲：我們先考慮三角形的情形：

為計算方便起見，我們先設圓半徑為 1（單位圓）




圖一

如圖一：$A_1, A_2, A_3$ 為頂點

$B_1, B_2, B_3$ 為切點

$O$ 為圓心，

$\angle A_1OB_3 = \angle A_1OB_2 = \theta_1$

$\angle A_2OB_1 = \angle A_2OB_3 = \theta_2$

$\angle A_3OB_1 = \angle A_3OB_2 = \theta_3$

已知：$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$

$\left(0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \frac{\pi}{2}\right)$

三角形面積 $= \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3$

三角形周長 $= 2(\tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3)$

求：面積及周長的最小值？

解：$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \tan(\pi - \theta_3) = -\tan\theta_3$

展開可得 $\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3=\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3$，令其值爲 $x$

利用算幾不等式：

$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3}$$

$\Rightarrow(\frac{x}{3})^3\geqslant x$ 得 $x\geqslant3\sqrt{3}$，等號成立於 $\tan\theta_1=\tan\theta_2=\tan\theta_3$ 時

即 $\theta_1=\theta_2=\theta_3$，三角形爲正三角形時有最小面積 $3\sqrt{3}$。

最小周長 $6\sqrt{3}$。

（面積、周長沒有最大值，因爲當 $A_2,A_3$ 靠近時，$A_1$ 離 $\overline{A_2A_3}$ 會愈來愈遠。）

乙：三角形的部份解決了，那四邊形呢？是否可依樣畫葫蘆呢？

很不幸的，在 $\sum_{i=1}^{4}\theta_i=\pi$ 的限制下，$\sum_{i=1}^{4}\tan i\neq\prod_{i=1}^{4}\tan\theta_i$

（$\prod_{i=1}^{n}a_n=a_1\times a_2\cdots\cdots\times a_n$），算幾不等式不能用，我們只好另闢途徑：

目前我們掌握下列的條件：（觀察圖一）

圓外切 $n$ 邊形頂點 $A_1,A_2\cdots\cdots A_n$，圓心與切點連線所張的角爲 $2\theta_1,2\theta_2,2\theta_3,\cdots,2\theta_n$

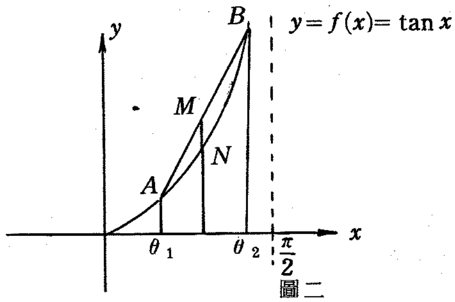
(1) $\sum_{i=1}^{n}\theta_i=\pi$

(2) 外切 $n$ 邊形的面積 $=\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i$，　周長 $=2\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i$

(3) $y=\tan x$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 時，圖形開口朝上，在高中統合下册（81年版）P 13, 14 中有介紹關於凸函數的不等式。（若 $y=f(x)$ 的圖形開口朝上則 $f(x)$ 爲凸函數）

好！！現在開始我們的尋求：令 $f(x)=\tan x$（$0<x<\frac{\pi}{2}$）（如圖二）

(1) $A$、$B$ 爲圖形上兩點坐標分別爲 $(\theta_1,f(\theta_1))$，$(\theta_2,f(\theta_2))$



圖二

$A(\theta_1, f(\theta_1))$

$B(\theta_2, f(\theta_2))$

$M(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{2})$

$N(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, f(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}))$

$M$ 為 $\overline{AB}$ 的中點，過 $M$ 向 $x$ 軸做垂線交圖形於 $N$ 點

則 $M$、$N$ 的坐標分別為

$$\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{2}\right), \left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, f\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right)$$

且 $M$ 點的位置較 $N$ 點高

$$\therefore \quad \frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

等號成立於 $A$、$B$ 兩點重合時，即 $\theta_1=\theta_2$ 時。

(2) 若曲線上的點數為 4 個，坐標分別為 $(\theta_1, f(\theta_1)), \cdots, (\theta_4, f(\theta_4))$

$$\frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)+f(\theta_3)+f(\theta_4)}{4} = \frac{\frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{2}+\frac{f(\theta_3)+f(\theta_4)}{2}}{2}$$

$$\geqslant \frac{f\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)+f\left(\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)}{2} \quad (\text{由(1)})$$

（等號成立於 $\theta_1=\theta_2$，$\theta_3=\theta_4$ 時）

又 $\quad 0<\frac{\theta_1+\theta_2}{2}<\frac{\pi}{2}, \quad 0<\frac{\theta_3+\theta_4}{2}<\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \frac{f\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)+f\left(\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)}{2} \geqslant f\left(\frac{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{\theta_3+\theta_4}{2}}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{4}\right) \quad (\text{由(1)})$$

（等號成立於 $\theta_1+\theta_2=\theta_3+\theta_4$ 時）

前兩式合併可得$\dfrac{f(\theta_1)+f(\theta_2)+f(\theta_3)+f(\theta_4)}{4} \geqslant f\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{4}\right)$

等號成立於$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4$時

(3) 由歸納法：設點數爲$n=2^k$時

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)}{n} \geqslant f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\theta_i}{n}\right)$$ 成立（等號成立於$\theta_1=\theta_2\cdots=\theta_n$時）

(4) 當$n=2^{k+1}$時

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)}{n}=\frac{\dfrac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{f(\theta_{2^{k+1}-1})+f(\theta_{2^{k+1}})}{2}}{2^k}$$

$$\geqslant\frac{f\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\cdots\cdots+f\left(\dfrac{\theta_{2^{k+1}-1}+\theta_{2^{k+1}}}{2}\right)}{2^k}$$

（由(1)等號成立於$\theta_1=\theta_2, \theta_3=\theta_4, \cdots\cdots, \theta_{2^{k+1}-1}=\theta_{2^{k+1}}$時）

$$\because\quad 0<\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \frac{\theta_3+\theta_4}{2}, \cdots\cdots, \frac{\theta_{2^{k+1}-1}+\theta_{2^{k+1}}}{2}<\frac{\pi}{2}$$

由(3)可得$$\frac{f\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\cdots\cdots+f\left(\dfrac{\theta_{2^{k+1}-1}+\theta_{2^{k+1}}}{2}\right)}{2^k}$$

$$\geqslant f\left(\frac{\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{\theta_{2^{k+1}-1}+\theta_{2^{k+1}}}{2}}{2^k}\right)$$

$$=f\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)=f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\theta_i}{n}\right)$$

（等號成立於$\theta_1+\theta_2=\theta_3+\theta_4=\cdots=\theta_{2^{k+1}-1}+\theta_{2^{k+1}}$）

前兩式合併可得$n=2^{k+1}$時 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)\geqslant f\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\theta_i}{n}\right)$成立……(*)

而等號成立於$\theta_1=\theta_2\cdots\cdots=\theta_n$時

故知$n$爲2的乘冪時則(*)式會成立且等號成立於$\theta_1=\theta_2\cdots\cdots=\theta_n$時。

(5) 當$n\neq 2^m$時我們證明(*)式依照成立

證：$\exists\, k\in N$使$n+k=2^m$ 令$\phi=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\Big/n$ $\left(0<\phi<\dfrac{\pi}{2}\right)$

則$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i) + kf(\phi)}{n+k} \geqslant f\left(\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right) + k\phi}{n+k}\right) = f(\phi)$（由(4)）

（等號成立於$\theta_1 = \theta_2 \cdots\cdots = \theta_n = \phi$時）

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i) \geqslant (n+k)\, f(\phi) - kf(\phi)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i) \geqslant f(\phi) = f\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i}{n}\right)$

(6) 我們獲得一個很重要的結果：

定理 1：若$y = f(x)$在$a < x < b$時是個凸數，而$n \in N$

則$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant f\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$（等號成立於$x_1 = x_2 \cdots\cdots = x_n$時）

證明：只是把(1)～(5)中定義域改為（$a$，$b$），其他不變。

## 三、結　論

原來的問題在(*)式可獲得解決

$\because \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \pi \quad \therefore$　面積$= \sum_{i=1}^{n} \tan\theta_i \geqslant n\tan\dfrac{\pi}{n}$

周長$= 2\sum_{i=1}^{n} \tan\theta_i \geqslant 2n\tan\dfrac{\pi}{n}$

而等號皆成立於$\theta_1 = \theta_2 \cdots\cdots = \theta_n$，即正$n$邊形時。

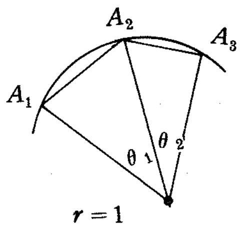
有了數學的根據，於是我們可大膽向市長說就是做成正多邊形可同時有最小面積及周長。數學的實用性不是在此展現了嗎！！

## 四、特殊化

我們檢查正$n$邊形面積$n\tan\dfrac{\pi}{n}$，發現$\lim\limits_{n\to\infty} n\tan\dfrac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi \cdot \dfrac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi$，即邊數愈多時愈接近圓面積，不是正符合我們的直覺嗎！

## 五、推　廣

如果改成內接 $n$ 邊形的話，先看三角形，定圓內接三角形中可以在弧上找三個很接近的點，所以無法找出最小面積及周長，但我們可以肯定的說，在正 $n$ 邊形時有最大面積及周長，我將其轉換為下列敍述留給讀者去證明：（要有最大面積，圓心要在 $n$ 邊形內部）




圖三

見圖三：

(1)　內接 $n$ 邊形的面積 $=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i$

周長 $=2\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\theta_i}{2}$

其中 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i=2\pi$

(2)　$y=\sin x$ 之圖形在 $0<x<\pi$ 開口向下為凹函數

(3)　再觀察定理1中不等式的方向

## 六、後　記

很少動筆寫東西，因為所學甚淺實不足取，但看到國內一群為數學教育"默默耕耘"的學者及教師們所付出的心血及九章出版社孫先生在數學園地"知其不可為而為之"的園丁精神，覺得應盡點綿薄之力。這次暑修當中一位熱心國內數學教育的一位學者在課堂上告訴我們這段話：「小水一滴不斷滴落可穿磐透石，更可潤澤大地；星星之火，接續蔓延可滾原燒野，更可溫暖人間；小小種子，灌溉栽培，可長成大樹更可遮蔭避雨；兒童初長，慧解日增，可所學具全，更可為國棟樑。」我們總希望下一代比我們更強，您說對不對？

## 七、參考資料

1. 九章數學雜誌第三期（1986.11）P.67
2. 高中統合下冊（81年版）P.13,14,20,22。