擺鐘的計時原理

詹仕鑫
省立台中文華高中

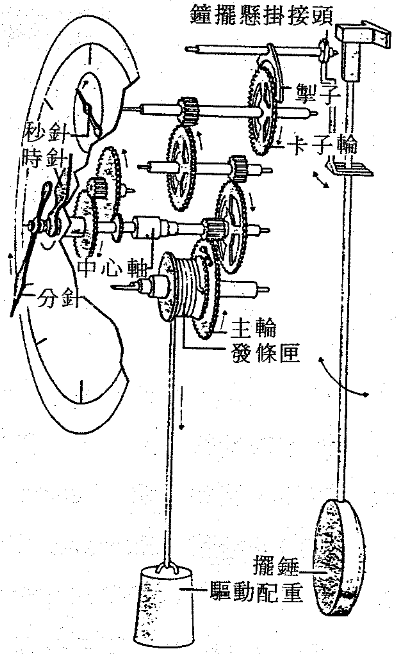
一、前　　言

假想你生活在十七世紀下半葉的英國，儘管有著拖延不止的內戰、蔓延的黑死病、以及1666年的倫敦大火，然而在科學的發展方面，英國的科學家們却有著非常令人注目的強眼表現，諸如牛頓(Isaac Newton, 1642-1727)、波以耳(Robert Boyle, 1627-1691)、哈雷(Edmund Halley, 1656-1742)、虎克(Robert Hooke, 1635-1703)等著名科學家都有非常卓越的研究成果。此時，世界上的科學活動也大部分集中在英國，1662年英王查理二世(Charles II, 1630-1685)所頒準成立的皇家學會(Royal Society)，更為科學研究活動注入了一股新的活力，增進了英國在當時科學研究方面的領先地位。在此時期，科學家們所最關心的主題之一，是設法改進計時器的低落品質，使之能夠更精確的報時，原因是當時唯一值得信賴的計時器 — 日晷，除了無法精確到分或秒的程度外，在使用上也不夠方便。另外，同時期雖然也使用到少部分的機械鐘，但是這些機械鐘的準確度比起日晷還差上一截，以致於無法廣泛地獲得採用。在此種歷史背景下，使得許多科學家們投入了增進計時器品質的研究工作。

隨著單擺等時性的發現，尋找準確機械鐘的步伐向前邁進了一大步。雖然達文西(Leonardo da Vinci, 1452-1519)在1493-94年間曾經畫了好幾張有關機械鐘的圖畫，圖中將重力擺設計到機械鐘的機械構造當中，但是我們還是認為加利略(Galileo Galilei, 1564-1642)才是實際上能夠利用單擺來計算時間的第一人。在加利略的著作中，顯示出他曾經嘗試使用某些輔助的設計來計數單擺的節拍，並維持單擺長時間規律的擺動，使之能夠用來測定極短的時距。為此，他設計了一個控制擺速的機械裝置，透過這個裝置還能夠將單擺的擺動轉變成為鐘面的轉動，可惜後來因為失明以及不幸去逝，使得這項設計無法實現。

惠更斯(Christiaan Huygens, 1629-1695)是一位荷蘭的科學家，因為設計了第一個重力驅動的擺鐘而得名。他的設計在1657年取得專利權，並由一位名為寇斯

特(Samuel Coster)的製鐘匠將之製造出來。此鐘最主要的特徵是利用重力驅動的設計，完全克服了鐘擺擺動時所產生的「循環誤差(circular error)」，使得擺動能夠規律的進行。所謂「循環誤差」係指擺錘擺動時，由於受到摩擦阻力的影響，使得擺錘擺動愈久，擺動幅角愈來愈小的現象。其設計如圖(一)所示，主要是利用驅動配重之重錘受到重力作用時，向下降落使得重錘之重力位能減少，此減少之能量透過機械構造傳遞至擺動中的擺錘，補充摩擦阻力所消耗的能量，使得擺錘能夠長期地維持規律的擺動。然而為了控制驅動重錘下墜的速度，使之能夠穩定的補充損失的能量，惠更斯特別設計了一個名為卡子(escapement)的機械裝置，此裝置是由卡子齒輪和掣子(cycloid cheeks)所構成，掣子是一根弧型的棒子，其兩端向內折入，能交替扣入卡子齒輪的齒內。掣子經由連桿與鐘擺相接，由於鐘擺的擺動，掣子的兩端規律地交替卡住卡子齒輪，使卡子齒輪每次只能旋轉一齒，卡子齒輪又與整個鐘的齒輪組相連，由於齒輪組受到重力向下拉動，這種拉力變得能夠很規則地帶動鐘面指針的轉動。惠更斯的設計也成為擺鐘的基本構造，後來的擺鐘設計者也都是依著這個架構，進行擺鐘精確度的改良工作。

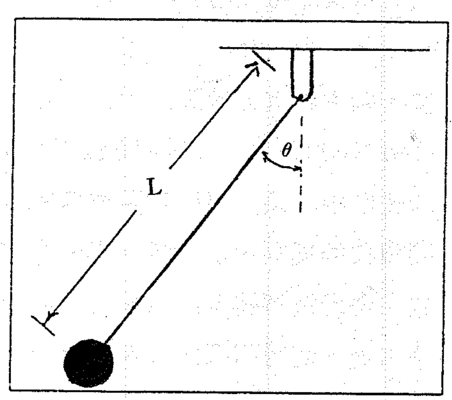


圖(一) 擺鐘的機械構造

二、擺鐘的週期

(一) 單擺的週期：

對早期的擺鐘設計者而言，並沒有任何證據可以顯示出，他們當中有人能夠使用複雜的數學公式來輔助其設計工作的進行。早在惠更斯時代，製鐘匠們都已熟知單擺的擺動週期與其擺長之平方根有關這個概念，如圖(二)，稍後，他們也由實驗當中得知：週期



圖(二) 單 擺

1秒的單擺，擺長約0.25公尺，而週期2秒的單擺，擺長則大約是1公尺。現在我們都知道，對小角度擺動的單擺而言，其週期公式爲：

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \tag{1}$$

其中T是週期，L是從轉軸到擺錘質心的距離，g是重力場強度。將 $g = 9.8\,m/s^2$ 代入(1)式，當擺長 $L = 0.25\,m$ 時，可算得其週期爲1.0035 s；而擺長 $L = 1\,m$ 時，算得之週期爲2.0071 s，此結果與以前製鐘匠們所熟知者相差不多。

㈡ 均勻細棒狀擺的週期：

上述(1)式只適用於單擺這種特殊情況中，然而大多數的鐘擺都非如此單純。在物理學中，有一個可以普遍適用於小角度擺動之各種鐘擺的週期公式：

$$T = 2\pi\sqrt{I/k} \tag{2}$$

其中T是週期，I是擺動系統的轉動慣量（moment of inertia），k是擺動系統的扭力常數（torsional constant）。茲先考慮一質量爲M，長度爲L的均勻細棒狀擺（例如：一端裝在樞軸上的米尺），如圖㈢，當其作小角度擺動時，其週期公式可依據(2)式作如下的推導：

a. 一端裝在樞軸上之細棒，其轉動慣量爲：

$$I = ML^2/3 \tag{3}$$

b. 扭力常數之定義爲：

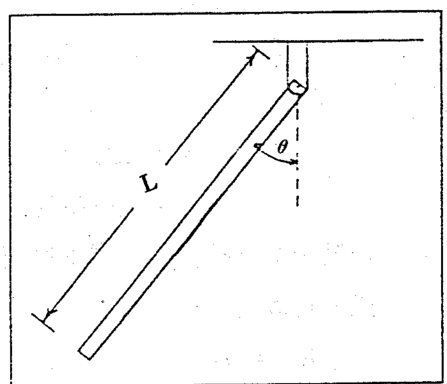
$$k = \tau / \theta \tag{4}$$

其中 τ 爲力矩，其定義爲：

$$\tau = r \times F \tag{5}$$

c. 由圖㈢可知，欲將此擺拉回平衡點之力矩量值爲：

$$\tau = (M \cdot g) \cdot (L/2) \cdot \sin\theta \tag{6}$$



圖㈢ 均勻細棒狀擺

將之代入(4)式可得：

$$k = L \cdot M \cdot g \cdot \sin\theta / 2\theta \tag{7}$$

若 θ 維持甚小，則 $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，因此k值可化簡爲：

$$k \fallingdotseq L \cdot M \cdot g / 2 \tag{8}$$

d. 將(3)式與(8)式代入(2)式中，可求得均勻細棒狀擺作小角度擺動之週期公式爲：

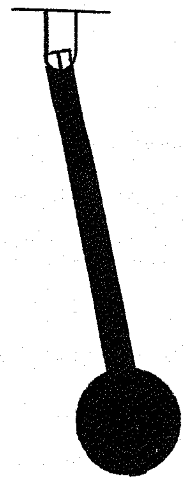
$$T = 2\pi\sqrt{(2 \cdot L)/(3 \cdot g)} \tag{9}$$

以 $L = 1\,m$，$g = 9.8\,m/s^2$ 代入(9)式，結果顯示，對質量分布均勻的細棒狀擺而言，

其擺動週期與擺之質量及製造物質無關，只要擺長為 1 m，其週期均為T= 1.6388 秒。

㈢ 複合細棒狀擺的週期：

一般鐘擺的構造都是複合擺，即都是由兩種以上之不同物質組合而成的，圖㈣所示即為常見的複合擺之一。為簡化計，我們只考慮由兩種不同物質組合成之複合細棒狀擺，如圖㈤。假設擺之上段質量為 M_1，長度為 L_1，下段質量為 M_2，長度為 L_2，則此雙質量複合擺作小角度擺動之週期公式可表示為：



圖㈣ 常見的複合擺

$$T=2\pi\sqrt{(I_1+I_2)/(K_1+K_2)} \tag{10}$$

其中 I_1、I_2 分別為 M_1 及 M_2 對樞軸之轉動慣量，K_1、K_2 分別為 M_1 及 M_2 對樞軸之扭力常數。此週期公式可依據⑽式作如下的推導：

a. 上段對樞軸之轉動慣量為：

$$I_1 = M_1L_1{}^2/3 \tag{11}$$

b. 依平行軸定理，下段對樞軸之轉動慣量為：

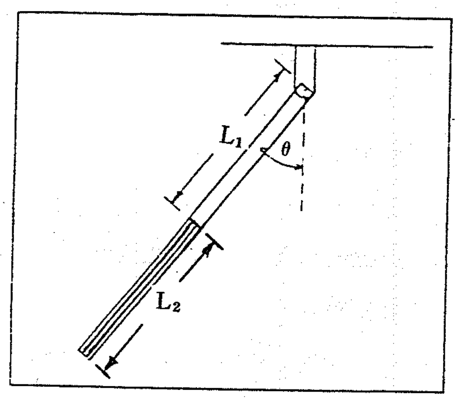
$$I_2 = (M_2L_2{}^2/12) + M_2\cdot(L_1+L_2/2)^2 \tag{12}$$

c. 若擺角 θ 維持甚小，則上段對樞軸之扭力常數為：

$$k_1 \fallingdotseq M_1\cdot g\cdot(L_1/2) \tag{13}$$

d. 下段對樞軸之扭力常數為：

$$k_2 \fallingdotseq M_2\cdot g\cdot(L_1+L_2/2) \tag{14}$$



圖㈤ 複合細棒狀擺

e. 將⑾～⒁式分別代入⑽式中，可求得此複合細棒狀擺作小角度擺動的週期公式為：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M_1L_1{}^2/3)+(M_2L_2{}^2/12)+M_2\cdot(L_1+L_2/2)^2}{M_1\cdot g\cdot(L_1/2)+M_2\cdot g\cdot(L_1+L_2/2)}} \tag{15}$$

此式甚為繁複，為了使計算結果能夠與均勻細棒狀擺以及下文所將加以討論之補償鐘作比較，茲假設以下幾項條件：

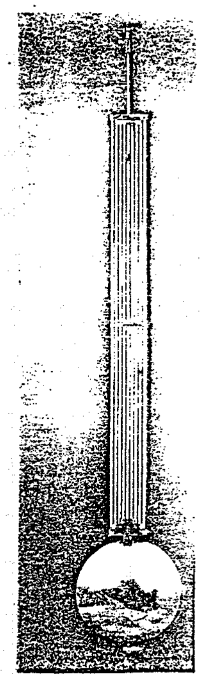
1. 棒為圓柱形，截面積為 $2\ cm^2$，直徑約 1.6 cm。
2. 只考慮 0℃，1 atm之情況，此時全棒長 $L=100cm$。
3. 上段為黃銅（密度 $\rho_1=8.5\ g/cm^3$）製成，長 $L_1=60\ cm$，質量 $M_1=1020g$。
4. 下段為水銀柱（密度 $\rho_2=13.6\ g/cm^3$），長 $L_2=40\ cm$，質量 $M_2=1088\ g$，係由一極薄且輕，質量可忽略之圓柱狀固體容器所盛裝。

將上述條件及 $g=980\ cm/s^2$ 代入⒂式，可得 0℃時複合細棒狀擺作小角度擺動的週期為 $T=1.6892$ 秒。由於此擺的質心位置較低（距樞軸約 55.8 cm），故其週期較等長均勻細棒狀擺（質心距樞軸 50 cm）之週期 $T=1.6388$ 秒為長。

三、「熱脹冷縮」對擺鐘週期的影響

㈠ 為克服「熱脹冷縮」所設計的補償鐘：

擺鐘的製造技術，到了十八世紀初期呈現出快速的進展，此時的製鐘技巧已精密到每個齒輪、輪軸乃至鐘面都用手工精雕細琢的程度。然而，為了製造出更精確的擺鐘，製鐘匠們開始研製補償鐘（compensated clock），嘗試著用不同的方法來補償擺鐘最常見的共同誤差，就是受到氣溫的影響，使得擺鐘有冷天走得快、熱天走得慢的趨勢。通常金屬隨著溫度的改變，會有熱脹冷縮的情況，由於擺鐘的週期是擺長的函數，因此擺鐘設計者必須藉由巧妙的設計，使擺長雖然伸長或縮短了，但是其有效長度卻仍然能夠維持固定。在這些補償鐘的設計者當中，有二位的設計最受到大家的推崇與採用，其一是英國製鐘匠哈里森（John Harrison, 1693-1776），他是一位著迷於改進擺鐘及彈簧鐘之準確度的製鐘匠。他設計出一個由鋼棒及黃銅棒互相交替併排成對的鐘擺，如圖㈥，其中黃銅棒是固定在鋼棒的尾端。當氣溫升高時，鋼棒向下伸長，使得擺鐘的質心下降；但是黃銅棒卻向上伸長，使鐘擺的質心上昇，調整適當的鐘擺長度，即可使這兩項因擺長增加而造成的誤差，恰好完全抵消。另外，由於擺長之增加幅度與其熱膨脹係數成正比，鋼之熱膨脹係數較小（約為黃銅的0.6倍），故鋼棒向下伸長較少，黃銅棒向上伸長較多，對樞軸而言，若適當的選擇擺長，有可能使二者轉動慣量與扭力常數的改變恰好抵消，亦即可使



圖㈥ 哈里森式補償擺

得此補償鐘的週期，並不會隨氣溫的改變而有所變化。由於這種擺鐘的造型特殊，有點類似烤肉時所使用的鐵格架子。因此又常被稱為「烤架型」（gridiron）的鐘擺。

英國的葛蘭姆（George Graham, 1673-1751）是另一位傑出的製鐘匠，他對這個問題有另外的解決方法，雖然他所使用的補償原理和哈里森所使用的完全相同，但是在製造方法以及精確度上，却都比哈里森的設計高明一些。他的設計是在黃銅製的擺錘基座上，裝上一小罐水銀，如圖(七)，當氣溫升高時，黃銅棒向下伸長，但罐內的水銀將向上升高，由於水銀之熱膨脹係數較大（約為黃銅的3.2倍），因此只要一小罐水銀就能產生出甚佳的補償效果，加上水銀柱的裝卸與調整均頗為方便，使得葛蘭姆的設計獲得許多的讚賞，可稱之為補償鐘的經典之作。


圖(七) 葛蘭姆式補償擺

以上兩種補償方法都可以製造出相當精確的擺鐘，其誤差甚至能夠控制在一個月只差幾秒的範圍之內。這種補償鐘的設計無疑是相當成功的，不過，我們相信它在當時必然是身價非凡的吧！

為了能夠更深刻體認哈理森及葛蘭姆式補償鐘的價值，我們擬進一步以數據加以說明。當然我們必須先瞭解熱脹冷縮對擺鐘精確度的影響程度，其次，再分別討論哈理森及葛蘭姆之補償鐘對計時誤差的改進情形。

(二) 溫度對均勻細棒狀擺之週期的影響：

考慮一支在0℃時長度為 L＝100 cm 之黃銅製細棒狀擺（線膨脹係數 $\alpha_1 = 18.9 \times 10^{-6}$（1／℃）），若只考慮其線膨脹現象，則其長度隨溫度之變化情形為：

$$L = 100 + 0.00189 \cdot t \text{ cm}$$

其中 t 為攝氏溫度。考慮 t＝10～30℃的變化範圍，分別求得不同溫度之擺長，將之代入(9)式，可計算得如表(一)之結果。

表(一)的數據顯示：隨著溫度的增加，均勻細棒狀擺之週期亦隨之增加。若以20℃（約為台灣地區之年平均溫度）時之週期為標準，求得不同溫度下，擺鐘的每日誤差秒數，並將此數據轉換成每日誤差(Y)與溫度(X)之關係曲線，如圖(八)，可知為一近似直線，因此我們進一步求其迴歸公式為：

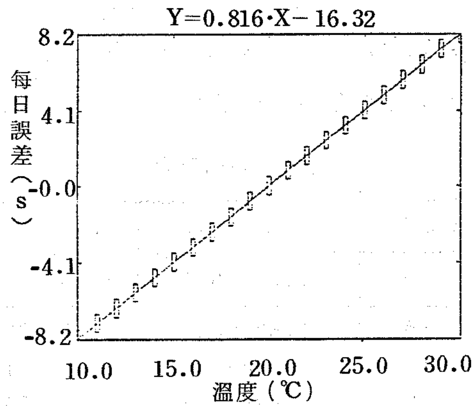
$$Y = 0.816 \cdot X - 16.32$$

表(一) 不同溫度下，均勻細棒狀擺之週期及每日誤差秒數* 表

溫度(℃)	週 期 (秒)	每日誤差(s)	溫度(℃)	週 期 (秒)	每日誤差(s)
0	1.6387821	−16.3250	20	1.639092	0
10	1.6389369	−8.1621	21	1.639107	0.8162
11	1.6389524	−7.3459	22	1.639123	1.6323
12	1.6389679	−6.5296	23	1.639138	2.4485
13	1.6389834	−5.7134	24	1.639154	3.2646
14	1.6389989	−4.8972	25	1.639169	4.0808
15	1.6390143	−4.0810	26	1.639185	4.8969
16	1.6390298	−3.2647	27	1.639200	5.7130
17	1.6390453	−2.4485	28	1.639216	6.5291
18	1.6390608	−1.6324	29	1.639231	7.3452
19	1.6390763	−0.8162	30	1.639247	8.1613

* 「每日誤差」係以 20℃的週期為標準加以推算。

由此結果可知：當氣溫每升高 1 ℃，均勻細棒狀擺每日之誤差約為 0.816 s，一個月以 30 日計算，則每月之誤差可達 24.48 s。

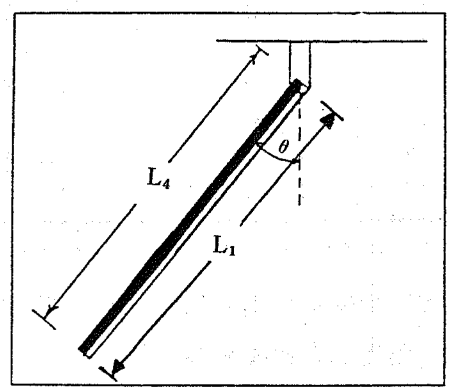


圖(八) 均勻細棒狀擺之溫度與每日誤差的關係圖

(三) 溫度對複合細棒狀擺之週期的影響：

1. 哈里森式複合細棒狀擺：

哈里森補償鐘的特徵，是具有一個由合併成對相互交替之鋼棒及黃銅棒組成之鐘擺。為簡化計，我們只考慮 0 ℃ 時，長度均為 100 cm，截面積均為 2 cm^2 之黃銅棒及鋼棒（密度 $\rho_4 = 7.86\ g/cm^3$，線膨脹係數 $\alpha_4 = 11 \times 10^{-6}$ (1/℃)）各一支所組成之複合細棒狀擺，如圖(九)。假設黃銅棒之質量為 M_1，長度為 L_1，鋼棒之質量為 M_4，長度為 L_4，則此雙質量複合擺作小角度擺動的週期公式仍與(10)式相同。我們可依據(10)式進一步作如下的推導：



圖(九) 哈里森式複合細棒狀擺

a. 黃銅棒對樞軸之轉動慣量為：

$$I_1 = M_1 L_1^2 / 3 \qquad (16)$$

b. 鋼棒對樞軸之轉動慣量爲：

$$I_2 = M_4 L_4^2 / 3 \tag{17}$$

c. 若擺角 θ 維持甚小，則黃銅棒對樞軸之扭力常數爲：

$$k_1 \fallingdotseq M_1 \cdot g \cdot (L_1 / 2) \tag{18}$$

d. 鋼棒對樞軸之扭力常數爲：

$$k_2 \fallingdotseq M_4 \cdot g \cdot (L_4 / 2) \tag{19}$$

e. 將(16)～(19)式分別代入(10)式中，可求得哈里森式複合細棒狀擺作小角度擺動之週期公式爲：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(M_1 L_1^2 / 3) + (M_4 L_4^2 / 3)}{M_1 \cdot g \cdot (L_1 / 2) + M_4 \cdot g \cdot (L_4 / 2)}} \tag{20}$$

若只考慮其線膨脹現象，則黃銅棒及鋼棒之長度隨溫度之變化情形分別爲：

$$L_1 = 100 + 0.00189 \cdot t \ \text{cm}$$

$$L_4 = 100 + 0.00110 \cdot t \ \text{cm}$$

考慮溫度 $t = 10 \sim 30$ ℃ 的變化範圍，分別求得不同溫度之細棒長，將之代入(20)式，即可計算得如表(二)之結果：

表(二)　不同溫度下，哈里森式複合細棒狀擺之週期及每日誤差秒數* 表

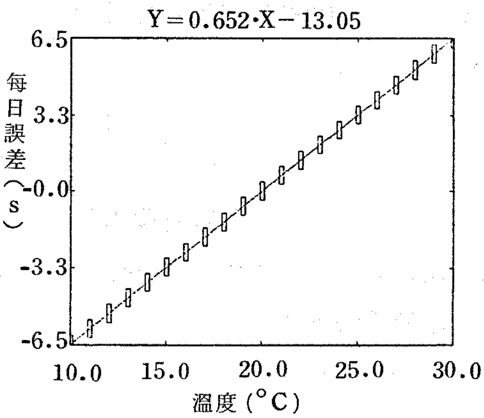
溫度(℃)	週期（秒）	每日誤差(s)	溫度(℃)	週期（秒）	每日誤差(s)
0	1.6387821	−13.0476	20	1.6390296	0
10	1.6389058	−6.5236	21	1.6390420	0.6523
11	1.6389182	−5.8713	22	1.6390543	1.3047
12	1.6389306	−5.2189	23	1.6390667	1.9570
13	1.6389429	−4.5665	24	1.6390791	2.6094
14	1.6389553	−3.9141	25	1.6390915	3.2617
15	1.6389677	−3.2618	26	1.6391038	3.9140
16	1.6389801	−2.6094	27	1.6391162	4.5663
17	1.6389925	−1.9571	28	1.6391286	5.2186
18	1.6390048	−1.3047	29	1.6391410	5.8710
19	1.6390172	−0.6523	30	1.6391533	6.5233

*「每日誤差」係以20℃的週期爲標準加以推算。

表(二)仍顯示出相同的結果，隨著溫度的增加，哈里森式複合細棒狀擺之週期亦隨之增加。將表(二)之數據轉換成每日誤差（Y）與溫度（X）之關係曲線，亦爲一近似直線，如圖(十)所示，進一步可算得其迴歸公式爲：

$$Y = 0.652 \cdot X - 13.05$$

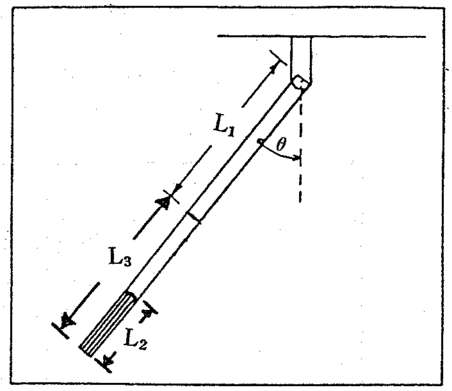
由此結果可知：氣溫每升高1℃，哈里森式複合細棒狀擺每日之誤差約爲 0.652 s，每月誤差則約爲19.57 s。將此與表㈠的結果作比較，即可發現此補償擺的誤差變小了，準確度約較均勻細棒狀擺提昇了 20 %。我們經由以上粗略的計算，即可證明哈里森的設計確實可以提昇擺鐘的準確度，當然若加上更精密的考慮，適當調整其原來的擺長，必然可以製造出更精密的擺鐘。



圖㈩　哈里森式複合細棒狀擺之溫度與每日誤差的關係圖

2. 葛蘭姆式複合細棒狀擺：

葛蘭姆式複合細棒狀擺的設計，是使用一個黃銅擺，並在其基座附上一小罐水銀。爲簡化計，我們只考慮一黃銅製之固體棒，在其尾端接上一個質量極輕且厚度可不計的中空透明玻璃管（線膨脹係數 $\alpha_3 = 9 \times 10^{-6}$（1/℃）），管內可盛入不同長度之水銀柱（線膨脹係數 $\alpha_2 = 61 \times 10^{-6}$（1/℃）），如圖㈩一。假設黃銅棒質量爲 M_1，長度爲 L_1，玻璃管之長度爲 L_3，管內盛裝之水銀柱質量爲 M_2，長度爲 L_2，組成一個葛蘭姆式的雙質量複合細棒狀擺，使其作小角度擺動的週期公式仍與⑽式相同。我們可依據⑽式進一步作如下的推導：



圖㈩一　葛蘭姆式複合細棒狀擺

a. 黃銅棒對樞軸之轉動慣量爲：

$$I_1 = M_1 L_1^2 / 3 \tag{21}$$

b. 依平行軸定理，水銀柱對樞軸之轉動慣量爲：

$$I_2 = (M_2 L_2^2 / 12) + M_2 \cdot (L_1 + L_3 - L_2/2)^2 \tag{22}$$

c. 若擺角 θ 維持甚小，則黃銅棒對樞軸之扭力常數爲：

$$k_1 \fallingdotseq M_1 \cdot g \cdot (L_1/2) \tag{23}$$

d. 水銀柱對樞軸之扭力常數爲：

$$k_2 \fallingdotseq M_2 \cdot g \cdot (L_1 + L_3 - L_2/2) \tag{24}$$

e. 將(21)～(24)式分別代入(10)式中，可求得葛蘭姆式複合細棒狀擺作小角度擺動的週期公式爲：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M_1L_1{}^2/3)+(M_2L_2{}^2/12)+M_2\cdot(L_1+L_3-L_2/2)^2}{M_1\cdot g\cdot(L_1/2)+M_2\cdot g\cdot(L_1+L_3-L_2/2)}} \quad (25)$$

爲了更有條理的瞭解葛蘭姆式補償鐘，對增進擺鐘準確度的價值，我們先確定葛蘭姆式複合細棒狀擺中水銀柱的長度，然後，再進一步討論溫度對此葛蘭姆式複合細棒狀擺之週期的影響。

(1) 水銀柱長度不同時，葛蘭姆複合細棒狀擺之週期：

爲使以下之計算結果能夠和前述的討論互作比較，我們作如下之假設條件：由於玻璃管之管壁甚薄，因此可將黃銅棒與水銀柱之截面積均視爲 $A=2\ cm^2$，而在0℃,1 atm時，全棒長 $L=100$ cm，其中黃銅棒長 $L_1=60$ cm，玻璃管長 $L_3=40$ cm，內裝水銀柱長度 L_2 可以調整，其可調整之範圍爲 0～40 cm。不考慮溫度之改變，即0℃時，將上述條件及不同之 L_2 分別代入(25)式，可計算得如表(三)之結果：

表(三) 0℃時，內裝不同水銀柱長度之葛蘭姆式複合細棒狀擺的週期

L_2 (cm)	T_0 (秒)	L_2 (cm)	T_0 (秒)
0	1.2693951	18	1.6841676
2	1.4025299	20	1.6911701
4	1.4883758	22	1.6960504
6	1.5474734	24	1.6992096
8	1.5898133	26	1.7009572
10	1.6209147	28	1.7015362
		30	1.7011403
11.5	1.6398135	32	1.6999263
		34	1.6980228
12	1.6440978	36	1.6955365
14	1.6614880	38	1.6925570
16	1.6745126	40	1.6891604

將表(三)之數據轉換成週期（Y）與水銀柱長度（X）之關係圖形，呈現出如圖(士)之曲線。由表(三)及圖(士)可推知：0℃，1 atm時，長度爲 100 cm 之均勻細棒狀擺的週期（T=1.6388 s），大約與全長 100 cm 內裝 11.5 cm 水銀柱之葛蘭姆式複合細棒狀擺的週期（T=1.6389 s）相同，因此以下我們取內裝 11.5 cm水銀柱之葛蘭姆式複合細棒狀擺來分析「熱脹冷縮」對此擺之週期的影響。

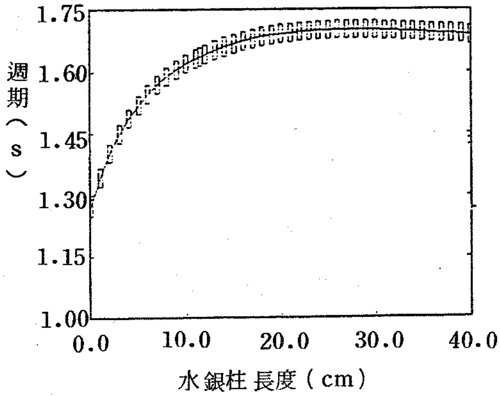
(2) 溫度對葛蘭姆式複合細棒狀擺之週期的影響：

要決定這種雙質量擺的週期與溫度之關係，首先要修正由於溫度改變而引起之擺長變化。在只考慮線膨脹的情況下，此葛蘭姆式複合細棒狀擺各部分棒長隨溫度之變化情形爲：

$L_1 = 60 + 0.001134 \cdot t$ cm

$L_2 = 11.5 + 0.0007015 \cdot t$ cm

$L_3 = 40 + 0.0036 . t$ cm



圖㈢ 葛蘭姆式複合細棒狀擺之週期與水銀柱長度的關係圖

考慮溫度 t＝10～30℃ 的變化範圍，分別求得不同溫度時，此擺之各部分長度，並將之代入㉕式，可計算得如表㈣之結果：

表㈣ 不同溫度下，葛蘭姆式複合細棒狀擺之週期及每日誤差秒數＊表

溫度(℃)	週期 (秒)	每日誤差(s)	溫度(℃)	週期 (秒)	每日誤差(s)
0	1.6389135	− 11.1463	20	1.6391250	0
10	1.6390192	− 5.5730	21	1.6391355	0.5573
11	1.6390298	− 5.0157	22	1.6391461	1.1146
12	1.6390404	− 4.4584	23	1.6391567	1.6719
13	1.6390510	− 3.9011	24	1.6391673	2.2291
14	1.6390615	− 3.3438	25	1.6391778	2.7864
15	1.6390721	− 2.7865	26	1.6391884	3.3437
16	1.6390827	− 2.2292	27	1.6391990	3.9010
17	1.6390933	− 1.6719	28	1.6392096	4.4582
18	1.6391038	− 1.1146	29	1.6392201	5.0155
19	1.6391144	− 0.5573	30	1.6392307	5.5728

＊「每日誤差」係以 20℃的週期爲標準加以推算。

由表㈣仍可發現，隨著溫度的增加，葛蘭姆式複合細棒狀擺之週期亦隨之增加。將表㈣之數據轉換成每日誤差（Y）與溫度（X）之關係曲線，亦爲一近似直線，如圖㈢所示，進一步可算得其迴歸公式爲：

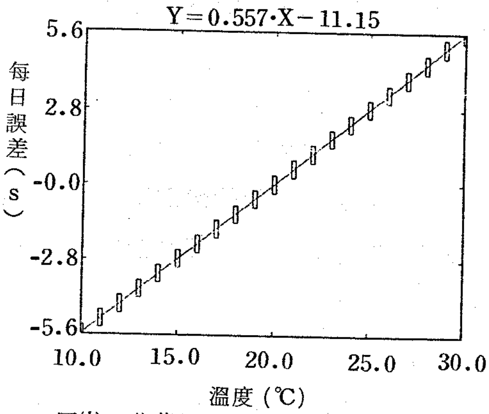
$$Y = 0.557 \cdot X - 11 \cdot 15$$

由此可知：氣溫每升高 1℃，擺鐘每日之誤差約爲 0.557s，即每月誤差大約16.72s。將此與表㈠之結果作比較，可發現擺鐘之誤差也變小了，準確度約較均勻細棒狀擺提昇

了 32 %。經由此簡化情形之粗略計算，即可證明葛蘭姆的補償鐘確實有其傲人的成就，吾人確信，透過適當地調整細狀擺及水銀柱之長度，即可使此擺鐘之準確度更為提高。

3. 小結語：

哈里森與葛蘭姆二人為了克服熱脹冷縮對擺鐘週期的影響，所設計的補償鐘，可謂是極具巧思的佳作。尤其葛蘭姆只藉由控制水銀柱長度這個簡單的操作步驟，就克服了氣溫因素，製造出週期不受氣溫影響的精確擺鐘，更是令人稱奇。繼他們之後，也有許多傑出的製鐘匠投入了增進擺鐘精確性的工作，我們實在佩服這些製鐘匠們，因為他們能夠在不使用到任何理論的計算，只憑著經驗就設計出準確而耐用的擺鐘。他們所製作的擺鐘，有的甚至可以準確到月誤差只有1秒或2秒的程度，有的時至今日仍然能夠精確的報時著。我們不難想像這些製鐘匠們在擺鐘製作上所投注的心力之深，以及他們解決困難的那股鍥而不捨精神的堅持，而這也正是值得吾人欽佩與學習啊！



圖(十三) 葛蘭姆式複合細棒狀擺之溫度與每日誤差的關係圖

四、時間的校準

到此我們仍然有一個疑惑，那就是如果當時沒有標準的時間能夠作為比較的話，製鐘匠們是如何知道他們所製造的擺鐘能夠準確到每個月只誤差1秒或2秒的程度呢？我們相信日晷鐵定無法讀到如此精確的程度，因為不論日晷製作得再怎麼精細，太陽照射到日晷，在其鐘面所產生的陰影，絕對無法尖銳到能夠讀到秒的程度。此外，日晷所讀得的時間是「太陽日」（所謂「太陽日」係指太陽連續兩次通過子午線(即天空最高點)的時間間隔），由於地球在繞日公轉的過程中，可能較靠近或遠離太陽，其公轉速度也會變快或變慢，因此，「太陽日」的長度在一年當中會有所變動。除非我們能夠瞭解「太陽日」隨地球公轉位置之不同所產生的差異情形，否則，雖然日晷的陰影指在相同的位置，我們仍然無法確定其所指示的時間。長期以來，天文學家們逐日記錄了一年當中所有「太陽日」的長度，結果發現在一年當中，「太陽日」的變動是有其規律性可循的，他們求得一年中「太陽日」的平均值，稱之為「平均太陽日」。再根據每個「太陽日」與「平均太陽日」的差值，製作出一整年的「時間公式表」(equation-of-time chart)。

這個表就成為製鐘匠們校準時鐘的重要參考資料，在此表中一個「太陽日」和「平均太陽日」的差值，甚至可達到 15 分鐘左右呢！

對製鐘匠而言，針對地球和恆星間之運轉關係所定義出來的「恆星日」，應該是校準擺鐘的較佳標準。所謂「恆星日」係指某遠處恆星連續兩次通過子午線的時間間隔。根據天文學家觀測的結果，一個「恆星日」比一個「平均太陽日」少了 3 分 56 秒。製鐘匠們知道了這個差值，便能夠經由一天到隔天的觀察來校準他們所製造的時鐘。這個校準程序是相當直接的：首先他們可以選定觀察星空中的某一顆亮星，當此亮星消失在某些遙遠的建築物或天然障礙物之後，開始計時，直到次夜此亮星再度消失在相同的障礙物後，停止計時，這中間所經歷的時間就是一個「恆星日」，將之再加上 3 分 56 秒就可得知一個「平均太陽日」的長度了。

早期的製鐘匠們大都知道「太陽日」、「平均太陽日」以及「恆星日」這三種計時方式，而且他們也都能利用這些計時方式去校準時鐘以及刻畫鐘面的時間刻度。當一個精確的時鐘製作完成開始啓動後，製鐘匠們就會注意地觀察參考日晷，查閱「時間公式表」，加上對恆星的觀測，然後適當地調整此時鐘，使之能夠正確的指示出「平均太陽日」。

五、結　　語

由於製鐘技術的發達，加上製鐘匠們的巧思，現今我們仍然可以見到少數設計精巧，而鐘面甚為複雜的擺鐘。例如有一種擺鐘就有著令人頗感困惑的複雜鐘面，它同時有兩支分針，其中一支是用來指示「平均太陽日」，另一支則用來指示「太陽日」，顯然製造此鐘的製鐘匠已經將整個「時間公式表」設計到時鐘內部的齒輪構造當中，這種構造必然是極為複雜與精密的。另外，這種時鐘必須保持終年都持續運轉，因此也需要考慮到驅動裝置的持續穩定性問題，這實在是一項艱鉅的挑戰，然而有許多傑出的製鐘匠作到了這兩項要求，在這些傑出的製鐘匠當中，技術最精湛的當推英國的湯平（Thomas Tompion, 1659-1713），他在一生當中製作了許多精緻的時鐘，他在1706年所製作的一個傑出作品，現在仍然陳列在英國巴斯（Bath）的博物館中，這個時鐘完全呈現了湯平製鐘的精湛技巧，它巧妙地把「時間公式表」設計到機械構造中，也作到了長期穩定驅動的要求，由於此鐘被維護得相當好，時至今日它仍然能夠準確的運轉著，這個鐘正可謂是湯平時代精湛製鐘技術的最佳見證。

17 世紀末到 18 世紀初，製鐘匠們的作品及其所發展出來的計時科學是非常傑出的，

他們能夠在實驗室條件極差的情況下，大大的提高了擺鐘的精確度，其所下的苦功更是令後人欽佩的。然而，就另一個角度來看，他們也是幸運的一群，因為他們所製作的精確擺鐘有著廣大的市場需求，他們能夠藉此謀得較好的生活條件，同時也能贏得其國人的敬重，以英國為例，湯平和葛蘭姆二人逝世時，均獲得殊榮，能夠以國葬儀式安厝於西敏寺之皇家墓園中，其長眠之處與一代科學宗師——牛頓的墓地毗臨而處，相距不出 25 公尺，足見英國人對其敬重的程度。較諸科學史上許多默默耕耘窮苦以終的傑出研究者而言，他們的際遇實屬大幸，不過這也不正顯示出人類對精確掌握時間的渴望，以及當人類發現其能力足以精確掌握時間時的興奮之情吧！

參考資料

1. Carlson, J. E. The Pendulum Clock. The Physics Teacher, January 1991, pp. 8-11.
2. 二十一世紀世界彩色百科全書：擺鐘，百科文化事業公司，p. 3014。
3. 牛頓現代科技大百科：現代技術(1)——測量工具，牛頓出版股份有限公司，p. 21～30。
4. 科學百科全書：鐘錶，自然科學文化事業股份有限公司，pp. 202～203。
5. 國立臺灣師範大學科學教育中心主編：高級中學物理第二冊，pp. 68～71。

主編的話

開學了。本刊這 (163)期特選屬於理論性的「科學教科書與概念改變」一篇。另選屬於輔助教材的兩篇，以及屬於實驗教學的一篇，以供教師參考。

關於第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽，我國成績優異，本刊上 (162)期雖有簡報。本期原擬刊載詳報，惟因篇幅所限，僅能刊出三篇；其他佳作徐正梅老師的感想，以及獲獎同學的心得與感想等，均暫予割愛，深引為歉。