一九九三年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析

34th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

İSTANBUL, 1993

陳昭地

國立臺灣師範大學數學系所

一、前　言

國際數學奧林匹亞競賽（IMO）試題來源於主辦國以外的各參與國，在邀請繳交試題期限內（本屆規定在4月15日以前）提交0～6道試題；並需付試題設計精神、來源及參考解題方案。再由主辦國組成之試題委員會彙整研究於7月1日前挑出適當分量的預選題，提供由各國領隊組成的評判委員會選題會議中，透過周延審愼討論從中投票挑出6道題，當作二天競試的正式考題。今年主辦國共接到了150多道建議試題，選題委員會從中篩選挑出26道試題，這些預選試題內容包括幾何、代數／分析、數論及離散數學等主題，難度高、中、低不一，大多是歐洲國家所設計，奇怪的是今年法國、俄羅斯、中國大陸等強隊的題目都沒有被選上，我國也提供了2道建議試題，但跟許多國家一樣，都沒有被選爲預選題。今年跟往年一樣，票選產生6道試題花了極長的時間討論，依主題內容，難中易層次安排成每天3道題的二份試題。這二份競試題先確定好英文版本，再依次改編成俄文、法文、德文及西班牙文，經選題會議確認這五種版本後，這五種語文系統以外的各參與國領隊，再依這五種版本形式內容，翻譯成自己國家的語言版本，復經大會互相審查認可後始定案。以下就是這屆我國參賽學生所使用的試題（中華民國參加第34屆國際數學奧林匹亞競賽代表團，民82年）：

第三十四屆國際數學奧林匹亞競試試題

Version：Chinese　ROC第一天　1993年7月18日

1. 設 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$，其中 n 爲大於1的整數。證明 $f(x)$ 不能表示成兩個整數係數多項式的乘積，其中每一多項式的次數至少是1次。

2. 設 D 爲銳角三角形 ABC 內部的一點且滿足：

$$\angle ADB = 90^\circ + \angle ACB \quad 和 \quad \overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$$

(a) 計算$\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$的比值。

(b) 證明三角形ACD的外接圓與三角形BCD的外接圓在C點的切線互相垂直。

3. 在一個無界限的棋盤上，採用如下的規則玩棋：開始時，n^2 個棋子排在相連的 $n\times n$ 個小方格所形成的方塊上，每一棋子一個小方格，在這個遊戲中，每次移動跨越一小格，將一個棋子橫向或直向跨越相鄰且放有棋子的一個小方格，而進入下一個小方格，但這個方格必須是沒有棋子；否則不被允許。而被跨越的棋子將隨即被拿掉。

求出所有的 n 值，依這樣的規則玩棋，到最後會僅剩下一個棋子在棋盤上。

每題7分

考題時間 4.5 小時

Version : Chinese ROC 第二天 1993年7月19日

4. 在平面上的三點P、Q、R，我們定義$m(PQR)$為三角形PQR 三個高之中最短的長度(當P、Q、R共線時規定$m(PQR)=0$)。

設A、B、C為平面上的點，X為這平面上的任意點，

證明 $m(ABC)\leq m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$。

5. 設 $N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$。

試確定是否可找到一個函數$f:N\to N$使得

$$f(1)=2,$$

且對每個$n\in N$，都有

$$f(f(n))=f(n)+n$$

和 $$f(n)<f(n+1)。$$

6. 設n為大於1的整數，將n個燈$L_0,L_1,\cdots,L_{n-1}$ 依序排在圓上，每個燈僅有“開”與“關”兩種狀態，現將執行一系列的步驟$S_0,S_1,\cdots,S_i,\cdots$。

步驟S_j依下列條件影響L_j的狀態(其他的所有燈的狀態保持不變)：

若L_{j-1}是“開”的狀態，步驟S_j會將L_j 的狀態由“開”變為“關”或由“關”變為“開”。

若L_{j-1}是“關”的狀態，步驟S_j會保持L_j的狀態不變。

上述燈的編號乃依mod n同餘看待，即$L_{-1}=L_{n-1}$，$L_0=L_n$，$L_1=L_{n+1}\cdots\cdots$。

設開始時全部的燈都是“開”的，試證：

(a)　可找到正整數$M(n)$使得在執行第$M(n)$個步驟後，所有的燈會再是全“開”的。

(b)　若n是2^k型的數，則在執行第n^2-1個步驟後，所有的燈會再是全“開”的。

(c)　若n是2^k+1型的數，則在執行第n^2-n+1個步驟後，所有的燈會再是全“開”的。

每題7分

考試時間4.5小時

本文的目的在於分析統計本屆競賽成績資料，針對這6道試題給出參考解答並加以評析；包括試題委員會所提供之給分方式及提出我國六位參賽學生答題特色得失，以提供給輔導數學資優生之參考〔陳昭地，民81年a、b〕。

二、第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計評析

根據評判委員會認定公布之第三十四屆73個參與國412位競賽學生成績，參考前幾屆的分析方式〔Zhang and Guo, 1991；陳昭地，民81年a、b〕，列表如下：

表1　第34屆IMO全部參與競試學生之成績統計表

總人數412

題次 / 項目	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	2.03	1.94	1.13	2.31	3.40	1.82	12.64
得分率	0.29	0.28	0.16	0.33	0.49	0.26	0.30
標準差	2.89	2.41	2.17	2.32	2.48	2.23	9.78
變異係數	142%	124%	191%	100%	73%	122%	77%
難度指數	0.40	0.31	0.24	0.36	0.50	0.30	
鑑別指數	0.76	0.53	0.45	0.54	0.70	0.52	

說明：(1)　每題滿分7分，得分率為平均得分除以7取到小數後第2位之近似值。

(2)　難度指數為高分組（101位）與低分組（101位）得分率之平均值，鑑別指數則為其差值，由本表中之鑑別指數可知本屆各題之鑑別指數堪稱理想，尤其第1、5兩題更高，頗具鑑別力。

(3)　由表1可知本屆試題由易而難之次序為5、4、1、6、2、3，即第5題

最簡單而第3題最難；就原先預估難易層次而言，第1天之次序爲1、2、3完全脗合，而第2天之次序4、5、6中，第4、5兩題恰好次序相反。

(4) 除了第5題之變異係數外，其約各題都很大，尤其第1、2、6三道題，顯示參賽代表整體看來水準差異很大。

(5) 今年的平均總分12.64跟過去兩年比較起來都低；是否顯示整體水準有降低的趨勢，這也許是新加入的參賽國平均水準稍低的緣故。

表2　金牌、銀牌、銅牌及未得獎牌分組成績統計表

表2(a)　金牌獎（人數35；成績≥30）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	6.00	5.26	4.86	5.40	6.54	5.40	33.46
得分率	0.86	0.75	0.69	0.77	0.93	0.77	0.80
標準差	2.34	2.38	2.70	2.19	0.98	2.13	3.31
變異係數	39%	45%	56%	40%	15%	39%	10%

表2(b)　銀牌獎（人數66；30＞成績≥20）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	5.20	3.33	2.38	3.83	5.61	3.17	23.52
得分率	0.74	0.48	0.34	0.55	0.80	0.45	0.56
標準差	2.89	2.74	2.76	2.15	1.80	2.29	2.77
變異係數	56%	82%	116%	56%	32%	72%	12%

表2(c)　銅牌獎（人數97；20＞成績≥11）

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	2.23	2.52	0.89	2.72	4.28	2.18	14.80
得分率	0.32	0.36	0.13	0.39	0.61	0.31	0.35
標準差	2.78	2.43	1.76	2.20	2.13	2.08	2.60
變異係數	125%	97%	198%	81%	50%	96%	18%

表2(d) 未得獎牌者(人數214;成績<11)

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總計
平均得分	0.32	0.71	0.25	1.15	1.80	0.66	4.90
得分率	0.05	0.10	0.04	0.16	0.26	0.09	0.12
標準差	0.76	1.15	0.79	1.54	1.61	1.12	2.70
變異係數	241%	161%	315%	133%	90%	169%	55%

說明:(1) 得金、銀、銅牌人數共198位,得獎總人數以不超參賽總人數之½及人數比例以約爲1:2:3爲原則。

(2) 金牌獎的學生水準頗高,程度亦較整齊。

(3) 跟上一屆比較起來,各獎牌的水準有下降趨勢,尤其是銀牌獎級的降得最快。

(4) 整體看來,本屆試題得分比前二屆爲低,這可能與試題平均較難或評分標準較刻薄有關。

(5) 從以上各表,比較上二屆的情況可窺出得三種獎牌的分數水準。

表3 1993年第34屆國際數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及得獎統計表

項目＼題次	1	2	3	4	5	6	總分	獎牌
ROC1	7	7	7	7	7	7	42	金
ROC2	7	7	7	4	1	2	28	銀
ROC3	7	1	0	3	4	5	20	銀
ROC4	7	2	0	0	7	2	18	銅
ROC5	7	5	0	5	7	2	26	銀
ROC6	7	1	3	3	7	7	28	銀
總分	42	23	17	22	33	25	162	1金 4銀 1銅

表 4　1993 年第 34 屆 IMO 前十名國家成績統計表

名次	國家＼題次	1 總分	1 平均	2 總分	2 平均	3 總分	3 平均	4 總分	4 平均	5 總分	5 平均	6 總分	6 平均	總計 總分	總計 平均
1	中國大陸	35	5.83	42	7.00	34	5.67	39	6.50	39	6.50	26	4.33	215	35.83
2	德國	29	4.83	13	2.17	24	4.00	41	6.83	40	6.67	42	7.00	189	31.50
3	保加利亞	24	4.00	29	4.83	23	3.83	32	5.33	42	7.00	28	4.67	178	29.67
4	俄羅斯	28	4.67	23	3.83	25	4.17	30	5.00	38	6.33	33	5.50	177	29.50
5	中華民國	42	7.00	23	3.83	17	2.83	22	3.67	33	5.50	25	4.17	162	27.00
6	伊朗	35	5.83	23	3.83	5	0.83	24	4.00	42	7.00	24	4.00	153	25.50
7	美國	28	4.67	21	3.50	20	3.33	15	2.50	39	6.50	28	4.67	151	25.17
8	匈牙利	29	4.83	24	4.00	16	2.67	23	3.83	37	6.17	14	2.33	143	23.83
9	越南	34	5.67	42	7.00	4	0.67	29	4.83	21	3.50	8	1.33	138	23.00
10	捷克	25	4.17	13	2.17	16	2.67	30	5.00	27	4.50	21	3.50	132	22.00
平均（60人）		5.15		4.22		3.07		4.75		5.97		4.15		27.30	
總平均（412人）		2.03		1.94		1.13		2.31		3.40		1.82		12.64	

從表1、表3及表4，並參考評判委員會所公布的各國參賽學生成績表，可看出我國六位參賽學生得分之特色：

1. 第1道題每位都得滿分，以總分42分遠超過第2名的中國大陸。
2. 編號ROC1的吳宏五同學六道題都得滿分，與大陸另一選手共占鰲頭。
3. 第一天前3道題有2位得滿分，總分共82分，居第一天的第二名，僅次於大陸；第二天後3道題得80分，居第六名；合併起來，以總分162分擠入第一等級的強隊。
4. 六道題的得分水準遠離高於國際平均水準；惟從前十名平均水準看來，第4題偏低，其餘2、3、5三道題相差不大。

另從表4，跟1992年第33屆結果比較（陳昭地，民81年b），可知我國、保加利亞、伊朗、捷克從上屆10名外擠入前十名，尤其是我國跟保加利亞更擠入前五名，進步最神速，然而保加利亞爲國際數學奧林匹亞競賽的創始國，過去競賽名次經常在十名以內，因此我們學生的表現最引人注目稱奇，甚至有些國家誤以爲我們的學生代表是跟大陸隊串聯在一起。

當然值得一提的是有些國家被擠出去了！退步很大，例如英國、日本、法國上屆都是前十名內，而這屆分別得到第14名、第20名及第17名；日本從首次參加的第20名進步到第12名，再進步到去年的第8名，今年又退回到第一次參賽的名次了！值得我們警惕。

三、試題詳題及評析

問題1　（愛爾蘭）

〔解一〕　（試題委員會公布的解法）

矛盾證法：設 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x)$，$h(x)$都是次數最少1次的整係數多項式

由 $f(0)=3 \Rightarrow |g(0)|$ 或 $|h(0)|=1$

可令 $|g(0)|=1$ 且可設

$$g(x)=x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_0$$

$\because\ f(\pm 1)\neq 0$，$\therefore\ p>1$。

設 $g(x)=0$ 的複數根爲 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$，即設

$$g(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_p)$$

注意 $|g(0)|=|\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_p|=1$

將 $x=\alpha_i$ 代入 $f(x)=0$ 的方程式中，得

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i+5)=-3$$

以 $i=1,2,\cdots,p$ 逐一代入上式相乘並取絕對值之，得

$$|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\cdots(\alpha_p+5)|=3^p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

但由 $|g(-5)|=|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\cdots(\alpha_p+5)|$，

$3=f(-5)=g(-5)h(-5)$ 以及 $g(x)$，$h(x)$都是整係數之事實，得知

$$|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\cdots(\alpha_p+5)|=1\text{ 或 }3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

比較(*)及(**)知 $p=0$ 或 1，此與 $p>1$ 矛盾，故得證 $f(x)$不能寫成兩個次數都是至少1次的整係數多項式之積。

〔解二〕(單中杰同學的解法)：

若 $f(x)$有有理根 t，則 $t\in\{1,3,-1,-3\}$

但 $f(1)=9$，$f(-1)\in\{-1,7\}$，$f(3)>0$，

$$f(-3)=(-3)^{n-1}\cdot 2+3=3(1-(-3)^{n-2}\cdot 2)\text{ 為奇數}$$

$\therefore$ $f(x)$無有理根

若存在 $g(x)$，$h(x)\in Z[x]$，使 $\deg g(x)>0$，$\deg h(x)>0$，

且 $f(x)=g(x)h(x)$，則由 $g(x)$、$h(x)$無有理根知

$$\deg g(x)>1,\ \deg h(x)>1,\quad\therefore\quad \deg f(x)=n\geqslant 4$$

令 $\deg g(x)=p$，$\deg h(x)=q$，$p+q=n$，$2\leq p$，$q\leq n-2$

$$g(x)=\sum_{i=0}^{p}a_ix^i\ ,\ h(x)=\sum_{i=0}^{q}b_ix^i$$

則 $a_0b_0=3$，$\therefore$ $(a_0,b_0)\in\{(1,3),(3,1),(-1,-3),(-3,-1)\}$

由對稱性令 $(a_0,b_0)\in\{(1,3),(-1,-3)\}$

現證明 $3\mid b_i\quad \forall i\in\{0,1,2,\cdots,q\}$

$i=0$ 時 $3\mid b_0\in\{3,-3\}$

若 $i=0,1,2,\cdots,r$ 時成立，$r\in\{0,1,2,\cdots,q-1\}$，

即 $3\mid b_0,b_1,\cdots,b_r$

則 $\sum_{t=0}^{r+1}a_tb_{r+1-t}=[\,f(x)\text{的 }r+1\text{ 次係數}\,]=0$

$\therefore \quad 3 \mid 0=\sum_{t=0}^{r+1} a_t b_{r+1-t}=a_0 b_{r+1}+\sum_{t=1}^{r+1} a_t b_{r+1-t}$

但 $a_0=\pm 1$，$3 \mid \sum_{t=1}^{r+1} a_t b_{r+1-t}$，$\therefore \quad 3 \mid b_{r+1}$

由數學歸納法知　$3 \mid b_0, b_1, b_2, \cdots, b_q$

但 $a_p=b_q=1$，$3 \nmid 1$，矛盾，

$\therefore$　這樣的 $g(x)$，$h(x)$不存在。

評析：

1. 本題爲愛爾蘭設計提供，爲一數論代數綜合題，選題委員會預估爲中偏易題，其結果共有79位（19%）得滿分，卻有207位（50%）得0分，全體平均值2.03分，得分率0.29，鑑別率0.76最高；我國6位學生都得滿分最爲出色，遠高於其他各隊，這是我國能擠入前五名的最主要關鍵題。
2. 解題評分重點：
   (1) 能得出 $p>1$（次數>1）　得1分
   (2) $g(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_p)$，$\alpha_i \in C$，$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p|=1$　得1分
   (3) 證得 $|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\cdots(\alpha_p+5)|=3^p$　得4分
   (4) 再由 $|g(-5)|=1$ 或 3 得 $p \leq 1$　得1分
3. 討論：
   (1) 本題我國6位學生的解法都跟單中杰類似，都能以矛盾假設出發，掌握基本條件，充分利用質數的特性，善用數學歸納法推得與已知事實互相矛盾的結果。
   (2) 我國學生都未使用大會提供的解法，其他各隊亦鮮少使用，顯示原設計者數學家之解題，經常與中學生之解題思考方式有相當的差距。
   (3) 基本上此題的設計來源應與艾森斯坦質式判別定理有關：

       設 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ 爲整係數多項式

       若有一質數 q 使得：(a) $q \nmid c_n$　(b) $q \mid c_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$　(c) $q^2 \nmid c_0$

       則 $f(x)$爲佈於整數系（或有理數系）上的質式。
   (4) 我國其他5位學生之解題方式，都跟證明艾氏判別定理相仿；5位解題的差異僅在於表達方式之繁簡而已；基本上處理問題1之解答時，切忌直接套用艾氏定理或僅提出它是艾氏定理之特例，否則無法得到滿意的分數。

問題 2　（英國）

〔解〕 (a) 作 DE 使得 $DE \perp DB$ 且 $DE = DB$，則得 $\angle ADE = \angle ACB$ 且

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACB \Rightarrow \angle CAB = \angle DAE \text{ 且}$$

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$$

又 $\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB$

$= \angle DAE - \angle DAB$

$= \angle BAE$

故得 $\triangle CAD \sim \triangle BAE$

於是 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{CD}{\sqrt{2}\,BD}$

（$\triangle DBE$ 為等腰直角）

$$\Rightarrow \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}=\sqrt{2}$$

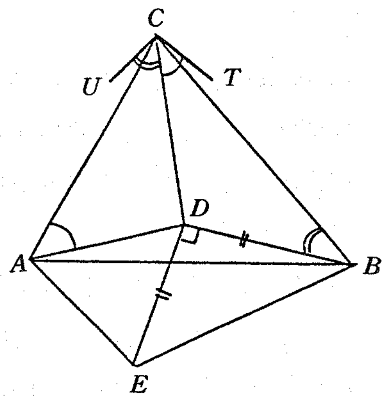


圖 2.1

(b) 設 CT，CU 分別為 $\triangle ACD$，$\triangle BCD$，兩外接圓的切線，

則得 $\angle DCT = \angle DAC$ 且 $\angle DCU = \angle DBC$（弦切角相等）

又 $\angle ADE + \angle DAB + \angle DBA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$90^\circ + \angle ACB = \angle ADB = \angle DAC + \angle DBC + \angle ACB$

故得 $\angle DAC + \angle DBC = 90^\circ$

即得 $\angle DCT + \angle DCU = 90^\circ$

$\therefore$ $\angle UCT = 90^\circ \Rightarrow CU \perp CT$

評析：

1. 本題為英國設計提供，為一平面幾何題，預估為中難度題；其結果具有 41 位（10%）得滿分，但多達 181 位（44%）得 0 分，平均得分 1.94 分，得分率 0.28；中國大陸和越南最出色，6 位學生都得滿分，英國全隊僅得 5 分，自己國家設計的題目，竟然成為最具殺傷力的問題，使得英國隊從上一屆的第 5 名掉落到第 14名。
2. 解題評分重點：

(1) 能作出 DE 使 $DE = BD$ 及 $\angle EDB = 90^\circ$　　得 2 分

(2) 證出 $\triangle ACD \sim \triangle ADE$　　得 1 分

(3) 證出$\triangle DAC \sim \triangle EAB$ 得1分

(4) 使用$AC \cdot BD = AD \cdot BC$及$BE = \sqrt{2}\,BD$得比值$\sqrt{2}$ 得1分

(5) 能證得兩圓過C點所作切線的夾角爲$\angle CAD$與$\angle CBD$之和（即弦切角的性質） 得1分

(6) 證明$\angle CAD + \angle CBD = 90°$ 得1分

3. 討論：

(1) 本題試題委員公布的參考解法完全跟袁新盛的上述解法相同；另外吳宏五的(a)部分解法用反演變換補助線求得正確答案$\sqrt{2}$，協調委員很欣賞他的解法，原先有意推荐到協調委員會去爭取特殊解題獎，後來發現共有3位學生使用同樣的技術解題而作罷。

(2) 這道題我國6位學生只有2位得滿分，曾建城得5分，其他三位各僅得1分或2分，單中杰在這道題表現得很失常，很不容易地從他的計算草紙中找出一條畫了DE的補助線，得到1分而已，可能是無法獲得金牌的主要原因。

(3) 這道題僅須利用到基本的幾何知識，作補助線也不很難想，我國學生的答題得分情況與我原先的預估差距很大，可能他們把一大半的時間耗在第3道最難題有關；日本在這道題表現失常，全隊僅得4分，對日本頗具殺傷力的關鍵題，而南韓這題表現甚佳，全隊得到了31分，比我隊的23分好得多！

問題3　（芬蘭）

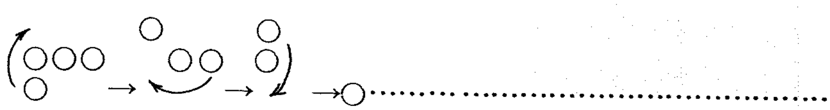
〔解〕 $n = 1$，2顯然符合；$n = 3$時嘗試下下看，始終不得其解，$n = 4$？或$n = 5$？嘗試之，也許可得到！也許還不太確定！

如此猜測：若$3 \nmid n$，則可找出一種玩法最後解下一顆子而

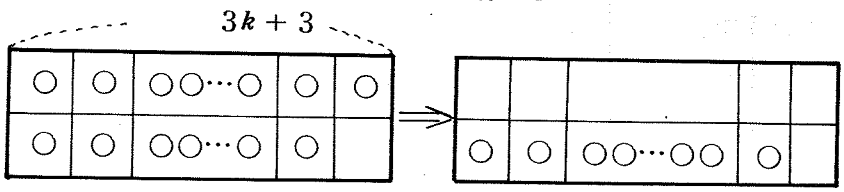
當$3 \mid n$，則否。

以下證明：$n \in N$，$3 \nmid n$，則可！（袁新盛的證法）

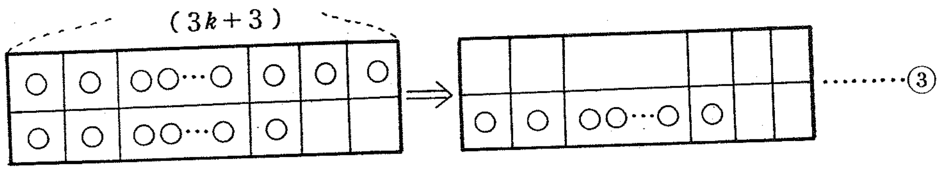
(1) 4個排成L形的棋子可移動到僅剩1顆子：

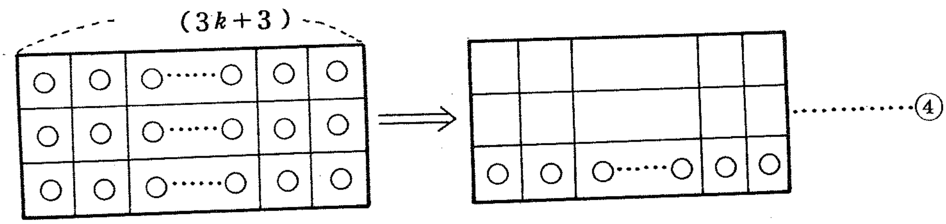

①

因此排成如下二或三排形之棋子可移動變形：



②





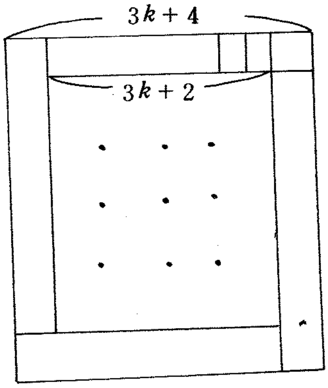
(2) 用數學歸納法證明：

$n=1$，及 $n=2$ 時顯出（$n=2$ 可實際玩玩看，3步可得）

設 $n \nmid 3$ 且 $n<3(k+1)$ 時，假設成立

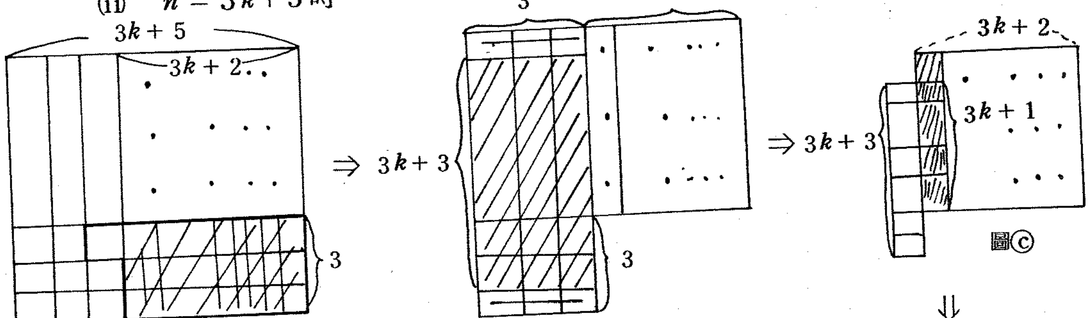
則當 $n \nmid 3$ 且 $n<3(k+2)$ 時

(i) $n=3k+4$ 時



邊上長（$3k+3$）寬 1 的長方形，利用上面討論的移動方式，可以移掉，最後變成 $3k+2$ 的情形，由歸納假設知 $3k+2$ 成立，故 $3k+4$ 亦成立。

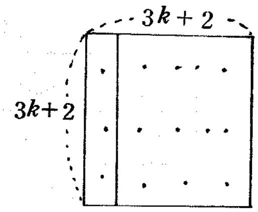
(ii) $n=3k+5$ 時



圖ⓐ 圖ⓑ 圖ⓒ

⇓

圖ⓐ斜線部分可移掉得ⓑ，再移上、下水平的3個並就（$3k+3$）×3部分利用上面④移掉得ⓒ，再利用上面③的方式可得ⓓ爲$3k+2$的情形，亦由歸納假設$3k+2$成立，故$3k+5$亦成立。



圖ⓓ

綜合(i)，(ii)得證$n \in N$，$3 \nmid n$可找到符合條件的玩法，使得最後棋盤上只剩下1個棋子。

最後證明當$n \in N$且$3 \mid n$時，永遠無法得到，最後只剩下1個棋子：（單中杰的證法）

考慮直角坐座系上的格子點，若（x，y）上有棋子則令$a_{xy}=1$，否則$a_{xy}=0$。（易見每格最多一個棋子）

令
$$p=\sum_{i,j}\left[a_{(3i)(3j)}+a_{(3i+1)(3j+2)}+a_{(3i+2)(3j+1)}\right],$$
$$q=\sum_{i,j}\left[a_{(3i+1)(3j)}+a_{(3i+2)(3j+2)}+a_{(3i)(3j+1)}\right],$$
$$r=\sum_{i,j}\left[a_{(3i+2)(3j)}+a_{(3i+1)(3j+1)}+a_{(3i)(3j+2)}\right],$$

則每走一步，p、q、r中必有二數減少1，另一數增加1。　（$n \geqslant 3$）

若$3 \mid n$，則一開始$p=q=r=\dfrac{n^2}{3}$，

$$2 \mid p+q=q+r=r+p=\frac{2n^2}{3},$$

而每走一步，$p+q$、$q+r$、$r+p$的奇偶性不變，故一直偶。如果最後僅剩下一子，則此時的$p+q$，$q+r$，$r+p$　必有2個1，1個0不全偶，因此不可能會僅剩下一子。

即$3 \mid n$時不可能。

評析：

1. 本題爲芬蘭設計提供，爲一離散數學的問題，預估爲高難度，其結果不出所料有293位（71％）得0分，只有22位（5％）得滿分；平均值僅1.13分，得分率0.16，難度指數0.24，不夠鑑別指數0.45尚稱合適；中國大陸跟俄羅斯在本題名列第一、第二，但也都被扣掉不少分數。

2. 解題評分重點：

(1) 證得 $3k \times 3k$ 的情形 得3分

（只證得 3×3 　給2分）

(2) 得 $n \neq 3k$ 完整證明 得4分

(3) $n = 3k + 1$ 或 $n = 3k + 2$ 之任一種證明 得3分

(4) 對 $n \geqslant 4$ 時，將 $n \times n$ 的情況簡化到 $(n-3) \times (n-3)$ 情形 得3分

(5) 1×1，2×2，4×4，5×5 之特殊解，而缺乏分析時不給分。

(6) 坐標化後考慮對角線 $x + y = k \pmod 3$ 或等價形式 得1分

3. 討論：

(1) 本題不僅第一天最難的一題，也是這屆六道題中難度最高；對我國6位學生而言，也是如此，只有2位得滿分，1位得3分，其他3位都僅找出特例，但依評分重點(5)沒能拿到分數。

(2) 吳宏五的一部分解法類似於袁新盛：

① $n = 2$，4，5 分別排出

② 處理下列形狀之變形

○○　　○
○○ ⇒ ○
○○　　○

或

○○
○○ ⇒ ○○○
○○

最後對於 $n > 5$ 時，用數學歸納法證明：若 n 成立，則 $(n+3)$ 亦成立。

其優點在於歸納過程較易處理，但須寫出 $n = 4$，5 實際移動方式，最後得到1個子的玩法。

③ 對於 $n = 3k$，單中杰的解法很直觀，直角坐標化後，經由奇偶分析，注意到依規則每移一子之後奇偶變化情形，配合反證法得到結論，這個解法基本上就是公布的參考解法，比較起來更簡潔些。

④ 離散數學的主題，過去我們的學生很生疏，經過長期的加強培訓，終於得到尚稱滿意的成績，雖然僅得17分，此題排名已列入第6名了！眞不容易。

問題4 （馬其頓）

〔解〕 當 A、B、C 三點共線時，所欲證之結論爲顯然；故僅須考慮 A、B、C 三點

構成一個三角形。平面上任一點X，的七個區域內（如圖4-1）；R_0；R_1,R_2,R_3；R_4,R_5,R_6；不妨設$\overline{AB}\geqslant\overline{AC}$，$\overline{AB}\geqslant\overline{BC}$。

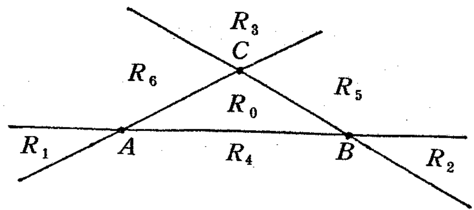


圖 4-1

(1) 設X爲R_0內的任一點，如圖4-2所示。

延長$\overline{CX}$交$\overline{AB}$於X'，則由

$\overline{CX}\leq\overline{CX'}\leq\max\{\overline{AC},\overline{BC}\}$

同理 $\overline{AX}\leq\max\{\overline{AC},\overline{AB}\}$

$\overline{BX}\leq\max\{\overline{AB},\overline{BC}\}$

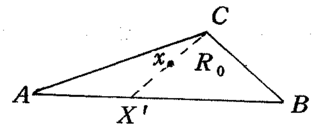


圖 4-2

故得

$$\max\{\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA},\overline{AX},\overline{BX},\overline{CX}\}$$
$$=\max\{\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}\}$$
$$=\overline{AB}$$

另由面積關係：

$$a(ABC)=a(ABX)+a(AXC)+a(XBC)$$

得 $\frac{1}{2}\mathrm{m}(ABC)\times\overline{AB}$

$$=\frac{1}{2}\Big(\mathrm{m}(ABX)\times\max\{\overline{AX},\overline{BX},\overline{AB}\}$$
$$+\mathrm{m}(AXC)\times\max\{\overline{AX},\overline{CX},\overline{AC}\}$$
$$+\mathrm{m}(XBC)\times\max\{\overline{BC},\overline{BX},\overline{CX}\}\Big)$$
$$\leq\frac{1}{2}\Big(\mathrm{m}(ABX)\times\overline{AB}+\mathrm{m}(AXC)\times\overline{AB}+\mathrm{m}(XBC)\times\overline{AB}\Big)$$

$\therefore\ \mathrm{m}(ABC)\leq\mathrm{m}(ABX)+\mathrm{m}(AXC)+\mathrm{m}(XBC)$

(2) 探討其他區域內情形，先考慮下列的集合：

$M=\{X\mid \mathrm{m}(A_1A_2X_1)\leqslant r\}$ 其中 $r>0$ 且 $r<\overline{A_1A_2}$

易知M爲如下圖兩折線$q_1t_1p_1$，$q_2t_2p_2$所圍成的斜線區域的圖形，如圖4-3所示：

其中直線t_1,t_2都跟$\overline{A_1A_2}$平行，直線t_1,t_2到$\overline{A_1A_2}$的距離都是r，以

A_i 爲圓心，r 爲半徑的圓爲 K_i（$i=1,2$），p_1, p_2 分別爲過 A_1 作圓 K_2 的兩條切線；q_1, q_2 則分別爲過 A_2 所作圓 K_1 的兩條切線，以 A_i 爲圓心，$\overline{A_1A_2}$ 爲半徑之圓爲 C_i（$i=1,2$），

則 q_i, t_i, C_2 交於一點 M_i；p_1, t_1, C_2 交於一點 N_i

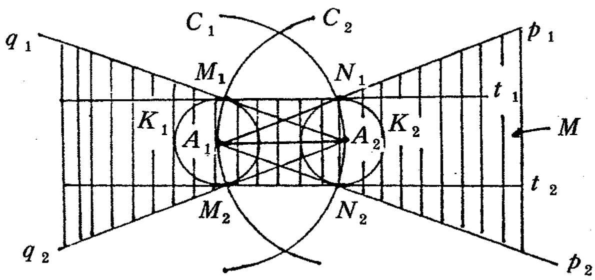


圖 4-3

而當 $r \geq \overline{A_1A_2}$ 時，集合 $M=\{X \mid \mathrm{m}(A_1A_2X) \leq r\}$

則爲平面上的所有點，（此時 $\mathrm{m}(A_1A_2X) \leq \overline{A_1A_2} \leq r$ 永遠成立）。

(3) 當 $X \in R_3$ 時，則 $\mathrm{m}(ABC) \leq r$ 且 $\mathrm{m}(ABC) \leq s$ 如圖 4-4 所示，

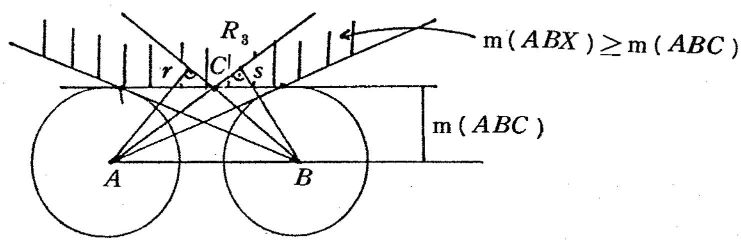


圖 4-4

綜合上述(2)結果，則知 $\mathrm{m}(ABX) \geq \mathrm{m}(ABC)$

於是，$\mathrm{m}(ABC) \leq \mathrm{m}(ABX) \leq \mathrm{m}(ABX)+\mathrm{m}(AXC)+\mathrm{m}(XBC)$

(4) 當 $X \in R_1 \cup R_2$，以 A，C 取代 A_1, A_2，取 $r=\mathrm{m}(ABC)$ 爲 C 點到 $\overline{AB}$ 上的高，如圖 4-5（此圖設 $X \in R_1$），由上述(2)得 $\mathrm{m}(ABX) \geq \mathrm{m}(ABC)$ 故知結論成立。

(5) 當 $X \in R_4$ 時，令 $\overline{CX}$ 交直線 AB 於 Y，則由(3)和(4)之結果：

應用到三點 A, C, X，得 $\mathrm{m}(AYC) \leq \mathrm{m}(AXC)$，

應用到三點 B, C, X，得 $\mathrm{m}(YBC) \leq \mathrm{m}(XBC)$，

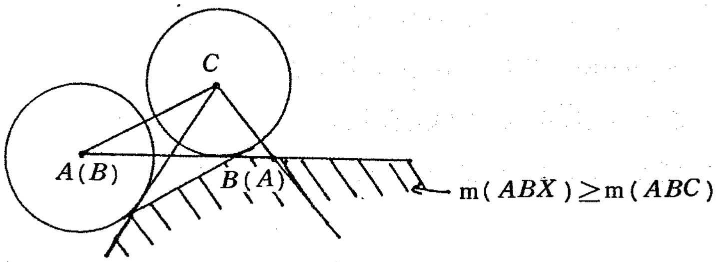


圖 4-5

又 A，B，Y 共線，得 $m(ABY)=0$

因為 $Y\in R_0$，由內部(1)情形及以上之事實得

$$m(ABC)\le m(ABY)+m(AYC)+m(YBC)$$
$$\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$$

同理 $X\in R_5$ 或 $X\in R_6$ 亦得結論正確。

綜合以上(1)～(5)得證。

評析：

1. 本題為蘇聯解體出來的馬其頓所設計，選題委員會推荐為簡易平面幾何題，其結果只有 27 位（7％）得滿分，而有 143 位（35％）得 0 分，平均值 2.31，得分率 0.33，德國最出色得 41 分，中國大陸次之。
2. 解題評分重點：
   - (1) 完成 $X\in R_0$（內部）之不等式　得 3 分
   - (2) 證得 $X\in R_1,R_2,R_3$ 之不等式　得 2 分
   - (3) 證得 $X\in R_2,R_4,R_6$ 之不等式　得 2 分
3. 討論：
   - (1) 本題原先推荐成最簡易的幾何題，以其涉及不等式且其知識範圍僅限於基本幾何，參考解題方式很新穎，一大半的領隊在選題會議時，很直覺得投下贊成票，成為最先被挑選到的一道題。
   - (2) 我個人到認為本題雖然題型解法很新穎，但書寫表達品質是一大障礙，分類討論技術頗高且細嫩，就我對現代的數學資優生的研究了解，我國學生要拿高分確實不易，並不認為它是一個簡易題，甚至會造成我國參賽上的不利，因此我並沒有投下贊成票，不過眼看贊成票已超過 8 成，就放棄投票了！
   - (3) 本題的第(1)步驟是很容易拿到 3 分，但黃景沂沒有充分掌控答題時間（花一大半

的時間在第5題）及誤會題意，非常可惜！第(2)步驟是能拿到其餘4分的工具，它是數學專家的寫法，學生恐都未依此方式呈現，因而不容易討論完整。

(4) 本題我國六位同學共得22分，名列第11，只有吳宏五勉強拿到滿分，其餘都以分類不全或表達不周、思考錯誤而遭到扣分，當然絕大多數的參賽國也都有類似的情形。

(5) 本題前十名國家的平均值高達4.75分，我國與美國跟前四名國家比較起來有一段的落差；據了解這前四名的學生，數學書寫表達的訓練頗嚴格，尤其下一屆在香港舉行，中文表達訓練勢必非更加強不可了！（在非中文主辦的國家，可依賴領隊、副領隊之協助，跟協調人員解釋中文表達不頂清楚之處而爭取合理分數)。

問題5 （德國）

〔解一〕 （試委員會公布的解法）

設 $\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，因 $2^2-\alpha-1=0$，故 $g(x)=\alpha x$ 對所有的 $n\in N$，

恒得 $g(g(n))-g(n)-n=0$

定義 $f(n)=\left[g(n)+\frac{1}{2}\right]$ 其中〔・〕爲高斯函數

證明：$f(n)$合所求：

(1) $f(1)=\left[g(1)+\frac{1}{2}\right]=\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=2$ （$\because 2<\alpha+\frac{1}{2}<3$）

(2) $\because\ \alpha>1$，$\therefore\ g(n+1)>g(n)+1$

$$\Rightarrow f(n+1)=\left[g(n+1)+\frac{1}{2}\right]\geq\left[g(n)+1+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\left[g(n)+\frac{1}{2}\right]+1$$

$$=f(n)+1>f(n)$$

(3) 由定義知 $|f(n)-g(n)|<\frac{1}{2}$，且 $f(f(n))-f(n)-n$ 爲整數，

$$|f(f(n))-f(n)-n|$$
$$=|g(g(n))-g(n)-n-g(g(n))+f(f(n))-f(n)+g(n)|$$
$$=|g(g(n))-f(f(n))+f(n)-g(n)|$$

$= | g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n) |$

$= | (\alpha - 1)(g(n) - f(n)) + (g(f(n)) - f(f(n))) |$

$\leq (\alpha - 1) | g(n) - f(n) | + | g(f(n)) - f(f(n)) |$

$\leq \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} < 1$

$\Rightarrow | f(f(n)) - f(n) - n | = 0$

$\Rightarrow f(f(n)) - f(n) - n = 0$

〔解二〕 （吳宏五的解法）

我們可以實際構造出這樣的函數：

令 $f(1) = 2$

若已定義 $f(1), f(2), \cdots, f(k)$ $\quad k \in N$

則依下列方式定義 $f(k+1)$：

(i) 若 $k+1 \in \{ f(1), f(2), \cdots, f(k) \}$

可令 $k+1 = f(l)$ $\quad 1 \leq l \leq k$

則定義 $f(k+1) = k+1+l \ (= f(l) + l)$

(ii) 若 $k+1 \notin \{ f(1), f(2), \cdots, f(k) \}$

則定義 $f(k+1) = f(k) + 1$

如此遞迴定義，即得 $f: N \to N$

再證 f 合於題意：

ⓐ 當 $n = 1$ 時，$\{ f(1) \}$ 顯然合於題意

ⓑ 設 $n = k$ 時，$\{ f(1), f(2), f(3), \cdots, f(k) \}$ 合於題意

證明：$\{ f(1), f(2), \cdots, f(k), f(k+1) \}$ 亦合於題意

若 $k+1 \notin \{ f(1), f(2), \cdots, f(k) \}$，則

$f(k+1) = f(k) + 1 > f(k) > \cdots > f(1)$

且 $f(k+1) = f(k) + 1$ 並不違反 $f(f(n)) = f(n) + n$

故合於題意

若 $k+1 \in \{ f(1), f(2), \cdots, f(k) \}$，

$k+1 = f(l)$ $\quad 1 \leq l \leq k$

則 $f(k+1) = l + k + 1$

$f(k+1) = f(f(l)) = f(l) + l$

且若　$f(k+1) \leq f(k)$

設 m 爲合乎下列性質的最大數：

$m < k+1$ 且 $m \in \{f(1), f(2), \cdots, f(m-1)\}$

不妨令　$m = f(n)$

則有　$f(m) = n + m$

$f(m+1) = f(m) + 1 = n + m + 1$

$f(k) = n + k$

$f(k+1) = k + 1 + l$

則由　$k+1+l \leq n+k \Rightarrow l \leq n-1 \Rightarrow l < n$

但　$f(l) = k+1 > m = f(n)$

因 $l, n \leq k$，此與 $\{f(1), f(2), \cdots, f(k)\}$ 合於題意互相矛盾

故 $f(k+1) \leq f(k)$ 不能成立，即知 $f(k+1) > f(k)$

$\therefore$　此時 $\{f(1), f(2), \cdots, f(k), f(k+1)\}$ 亦合於題意

評析：

1. 本題爲德國設計提供，爲熱門的函數方程問題，預估爲偏難題，其結果確有 74 位（ 18% ）得滿分，而僅有 40位（ 10% ）得 0 分，爲選 6 道題最少 0 分的 1 題，平均值 3.40 分，得分率 0.49 ，鑑別指數很高而難度指數 0.50 最容易，看起來不易，但這些數學資優生竟然有這麼優異的表現，殊屬難得！這道題保加利亞得冠，德國次之，成績都很高，我國得 33 分排名第 8 ，還算不差。

2. 解題評分重點：

(1) 依〔解一〕之給分原則：

① 猜出 α 滿足 $\alpha^2 = \alpha + 1$　　得 1 分

② 猜出 $f(n) = [\alpha n + b]$　b 爲任意數　　得 1 分

③ 證出 f 爲嚴格遞增　　得 1 分

④ 證出 $f(f(n)) = f(n) + n$　　得 4 分

(2) 用構造法之給分原則：

① 擬歸納解法

(a) 定義 $f(1) = 2$ 及 $f(n) = n + \max\{i < n : f(i) \leq n\}$　　得 4 分

(b) 再證 f 爲嚴格遞增且 $f(f(n)) = f(n) + n$　　得 3 分

② 歸納構造法

(a) 觀察出 $f^{(n)}(1)=f\cdot f\cdot\cdots\cdot f(1)=F_n$ 爲費氏數　得 1 分

(b) 當 $k\neq F_n$ 時能歸納定義出 $f(k)$ 並能順利進行者　得 3 分

(c) 證明 f 爲嚴格遞增且 $f(f(n))=f(n)+n$　得 3 分

3. 討論：

(1) 函數方程、數學歸納技術及費氏數列等主題都曾列入我國培訓課程，對於這道題的出現，基本上是對我們的學生有利無害。

(2) 我國 6 位學生代表中，單中杰的解法跟吳宏五類似，黃景沂和曾建城類似都跟費氏數列有關之建構法，黃景沂寫得最詳清楚完美無暇，單中杰的過於簡潔，但這四位終於都得滿分；另外黃有章的解法類似大會公布的方式，找出 $f(n)=\left[\alpha n+\frac{1}{2}\right]$，但很可惜證明 $f(f(n))=f(n)+n$ 的過程出現嚴重的錯誤，僅得 3 分，至於袁新盛的解法也是建構函數，很遺憾的是行不通的造法，終於被扣許多分數，錯失金牌機會。

(3) 這道題協調時間比預定時間多出 5 倍之多，從晚上 9 點 30 分一直協調到凌晨 1 點，還留下袁新盛的爭議分數直到第二天早上才算完成。

問題 6　（荷蘭）

〔解〕　（單中杰的解法）

以 0 代表關，以 1 代表開。

令 T_j 爲進行 S_{j-n} 後，L_j 的狀態（燈號亦採同餘看待）

又令 $T_j=L_j$ 一開始的狀態 $\forall_j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$

即　$T_j=1$，$\forall_j\in Z$，$0\leq j<n$

則　$T_j\equiv T_{j-1}+T_{j-n}\pmod 2$ $\forall_j\in N$，$j\geq n$

定義 $A=\{0,1\}$，$B=A^n=\underbrace{\{\underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{n},\cdots,\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{n}\}}_{2^n\text{ 個}}$

(a) 定義函數 $f:B\to B$，$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$

$$=(x_2,x_3,x_4,\cdots,x_n,g(x_1+x_n))$$

其中 $g(n)=\begin{cases}0 & \text{若 } 2\mid n\\ 1 & \text{若 } 2\nmid n\end{cases}$

則易見 $f(T_j,T_{j+1},\cdots,T_{j+n-1})=(T_{j+1},T_{j+2},\cdots,T_{j+n})$

又易知 f 爲一對一映成之函數，故 f 有反函數。現考慮所有

$(T_j, T_{j+1}, \cdots, T_{j+n-1})\ \forall_j \in N \cup \{0\}$，

必存在 $j, k \in N$，$0 \leq j < k$ 使

$(T_j, T_{j+1}, \cdots, T_{j+n-1}) = (T_k, T_{k+1}, \cdots, T_{k+n-1})$，

等式兩邊各進行 j 次 f^{-1}，得

$$(\underbrace{1, 1, 1, \cdots, 1}_{n}) = (T_{k-j}, T_{k-j+1}, \cdots, T_{k-j+n-1})$$

換句話說，進行完 S_{k-j-1} 後，全部的燈均爲開。

(b) 令 $R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 0 \\ T_{in+j-1} & \text{otherwise} \end{cases}$

其中 $i, j \in Z$，$i \geq 0$，$0 \leq j < n$

現證明當 $0 \leq i \leq n-1$ 時，$R_{ij} \equiv C_j^{n-1-i} \pmod 2$

（此處當 $a < b$ 時，定 $C_b^a = 0$）

當 $i = 0$ 時，$R_{00} = 1$

$$R_{01} = R_{02} = \cdots = R_{0(n-1)} = T_0 = T_1 = \cdots = T_{n-2} = 1$$

又知 $2 \nmid C_j^{2^k-1} = C_j^{n-1} = C_j^{n-1-i}$

$\therefore$ $i = 0$ 時成立。

若 $i = t$ 時 $R_{tj} \equiv C_j^{n-1-t}$ $\quad \forall_j \in Z$，$0 \leq j < n$，

則：若 $t = 0$，則 $R_{(t+1)0} = R_{10} = T_{n-1} = 1 = C_0^{n-1-(t+1)}$

否則 $R_{(t+1)0} = T_{(t+1)n-1} = T_{(t+1)n-2} + T_{tn-1} = R_{t0} + R_{t(n-1)}$

$$\equiv C_0^{n-1-t} + C_{n-1}^{n-1-t} = 1 + 0 = 1$$

$\therefore$ 無論如何，$R_{(t+1)0} = 1 \equiv C_0^{n-1-(t-1)}$

用數歸法證明 $R_{(t+1)j} \equiv C_j^{n-1-t-1}$ $\quad \forall_j \in Z$，$0 \leq j < n$：

$j = 0$ 時，由上述知成立。

若 $j = p$ 時有 $R_{(t+1)p} \equiv C_p^{n-1-t-1} \pmod 2$，

則 $R_{(t+1)(p+1)} \equiv R_{(t+1)p} + R_{t(p+1)} \equiv C_p^{n-1-t-1} + C_{p+1}^{n-t-1} \equiv C_{p+1}^{n-t-1} - C_p^{n-t-2}$

$$= C_{p+1}^{n-t-2} \pmod 2$$

$\therefore$ $j = p + 1$ 時亦成立，

$\therefore$ $\forall_j \in Z$，$0 \leq j < n$ 皆成立，

$\therefore$ $i = t + 1$ 時亦成立，

∴ $\forall 0 \leq i \leq n-1$ 皆有

$R_{ij} \equiv C_j^{n-1-i}$

∴ $R_{(n-1)0}=1$, $R_{(n-1)j}=0 \quad \forall_j \in N$, $j<n$

∴ $R_{n0}=R_{n1}=R_{n2}=\cdots=R_{n(n-1)}=1$

∴ $T_j=1 \quad \forall_j \in Z$, $n^2-1 \leq j \leq n^2+n-2$

∴ 在 S_{n^2-2} 後(即第 n^2-1 個步驟),所有燈皆“開”。

(c) 定義 $Q_{ij}=T_{in+j} \in \{0,1\}$

其中 $n=2^k+1$, $i,j \in Z$, $i \geq 0$, $0 \leq j<n$

易知 $Q_{(i+1)(j+1)}=Q_{(i+1)j}+Q_{i(j+1)}$

現用數歸法證明:當 $i \leq n-2$ 時,

$$Q_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i>0\text{ , } j=0 \\ 1 & \text{if} \quad i=j=0 \\ C_{j-1}^{n-1-i} & \qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

當 $i=0$ 時,易知 Q_{0j} 恒為 1 ,

又當 $j>0$ 時,$C_{j-1}^{n-2}=C_{j-1}^{2^k-1}$ 恒為奇,

∴ $i=0$ 時成立。

若 $i=t$ 時成立,即 $Q_{tj}=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad t>0\text{ , } j=0 \\ 1 & \text{if} \quad t=j=0 \\ C_{j-1}^{n-2-t} & \qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \end{cases}$

則 $Q_{(t+1)0} \equiv Q_{t0}+Q_{t(n-2)}$

若 $t=0$,則上式右邊 $=1+1=2$

否則上式右邊 $=0+0=0$

∴ $Q_{(t+1)0}=0$

仿(b)同樣可用數歸法證明

$Q_{(t+1)(j+1)} \equiv C_j^{n-2-t-1} \quad \forall_j \in Z$, $0 \leq j \leq n-2$

∴ $Q_{(n-2)1}=1$, $Q_{(n-2)2}=Q_{(n-2)3}=\cdots=Q_{(n-2)(n-1)}=Q_{(n-1)0}=0$,

∴ $Q_{(n-1)1}=Q_{(n-1)2}=\cdots=Q_{(n-1)(n-1)}=Q_{n0}=1$,

∴ $T_{n^2-n+1}=T_{n^2-n+2}=\cdots=T_{n^2-1}=T_{n^2}=1$,

∴ 在 S_{n^2-n} (即第 n^2-n+1 個步驟後)燈全開。

評析：

1. 本題爲荷蘭設計提供，被選題委員會極力推荐的五星級高難度離散數學數論綜合題目，其原公布的解法很有數學味，抽象欠直觀性，許多國家的領隊都不很贊成這道，動用幾次表決及爲增加本屆試題的難度，才在極勉強的情況，最後通過這道冗長難以書寫的題目；其結果只有29位（7％）得滿分，高達185位（45％）得0分，平均值1.82分，得分率0.26，爲第二天3道題中的最難題，二天6道題則排名第2，不夠其鑑別指數還算理想。德國在這道題拿滿分，跟第二名的俄羅斯就有一段差距，這是德國能得到第二天的榜首主因。
2. 解題評分重點：

(1) 只證明(a)（解題基本知識爲鴿籠原理） 得2分

(2) 只得證(b)或只得證(c) 得3分

(3) 同時證得(b)與(c) 得5分

(4) 特例之 n 值未引出一般解的概念不給分

3. 討論：

(1) 我國6位學生代表有2位得滿分，其餘分別得到2～5之部分成績，都會用鴿籠原理解題得證(a)部分；總分25分，本題的排名第7，跟第3道題一樣可貴；更值得一提的是6位代表多盡力而爲，想法分歧而頗具創造力，凡能作出來的都是透過直觀想像思考，再設法用符號文字表達；例如吳宏五和單中杰的作法就很不一樣，都花了很長時間（可能2個小時以上）思考獲得靈感後再寫出來，都得到了滿分，這種創造力突顯於奧林匹亞競賽是最實際的案例。

(2) 問題描述冗長，跟第3道題都爲離散數學的主題，翻譯試題費盡了代表國教授心力，協調成績更是比原預定時間30分鐘超出了5倍，總共花了3小時利用中午犧牲午休時間才完成，終能獲得滿意的成績，也是值得了！

四、結　論

從以上的評析，我們可以綜合出如下的結論：

1. 本屆試題重點落在平面幾何、離散數學、代數／分析及數論，常有綜合題出現。

2. 本屆試題部分題目敍述冗長，解題視策略之不同，也經常須要書寫表達清楚，思考須嚴謹細嫩，才能得高分。

3. 各題解題策略僅涉及高中生的基礎數學知識，重點應能發揮思考創造力及解題

能力，不難獲取獎牌。

4. 我國參賽代表在這一屆的競賽有傑出的表現，數學歸納法、代數或分析是拿手戲，離散數學及平面幾何今屆雖然有明顯進步，但從成績分布及現行中學數學課程內容來看，恐迫在平面幾何甚或立體幾何是更應加強的主題，才能進一步突破，獲取更多的金牌。

參考資料

1. 陳昭地（民81年a），一九九一年第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刋（81年2月），6～22。
2. 陳昭地（81年b），一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊（81年9月），33～54。
3. 趙金祁等（民81年），中華民國參加一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽報告，科學教育月刊，152期（81年9月），24～32。
4. 中華民國參加第34屆國際數學奧林匹亞競賽代表團（民82年），中華民國參加一九九三年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽成果簡報，科學教育月刊，162期（82年9月），30～36。
5. 吳清基等（民82年），中華民國參加一九九三年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽報告，刊於本刊。
6. Zhang Junda and Guo Chunyan (1991), The Analysis and Evaluation of the 31st IMO, *Mathematics Competitions*, 4(1)70～83.
7. IMO 93 Contest Results (93 IMO Jury Committee)。
8. 34th IMO Problems and Solutions Shortlisted for the Jury (1993, Istanbul).