

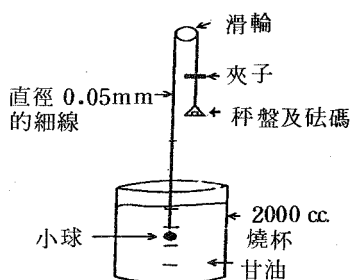
利用光電管裝置及斯托克定律探討細線 在流體中運動所受到的黏滯力

陳汕塘
國立中興大學物理系

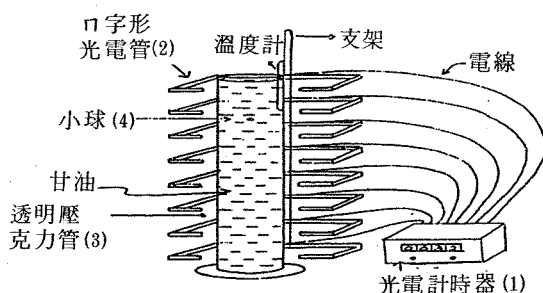
壹、前言

一球形物體在廣大流體中運動且符合雷諾耳數 (Reynolds numbers) $\frac{r \rho_0 v}{\eta} < 1$ 的條件 (其中 r 代表球半徑, v 表球運動速率, ρ_0 表流體密度, η 表流體黏滯係數), 則球所受到的黏滯力 (viscous drag force) $F = 6 \pi r \eta v$ 。此即為著名的斯托克定律 ⁽¹⁾ (Stokes' Law) 。但若球在半徑為 R 且充滿流體的圓柱管中運動時, Brenner 和 Happel ⁽²⁾ (1957) 認為此時球所受到的黏滯力應修正為 $F = 6 \pi r \eta v (1 + 2.1 \frac{r}{R})$ 之形式。更進一步地, 若我們在球頂端連接一條質量很輕且半徑遠小於球半徑的細長線, 並同樣地使其在充滿流體的圓柱管內運動, 則細線本身所受到的黏滯力大小又如何呢? 相對於球所受到的黏滯力 $F = 6 \pi r \eta v (1 + 2.1 \frac{r}{R})$ 而言是否可忽略呢? 關於此問題 M. S. Greenwood 等人 (1986) ⁽³⁾ 曾利用阿武德機裝置 (Atwood machine , 見圖一) 及斯托克定律作實驗性地探討, 並獲致叁點結論: (一)半徑不同的線其所受到的黏滯力相差不大。(二)相對於球而言, 細線所受到的黏滯力非常巨大。(三)細線所受到的黏滯力與細線長度無關。

Lindgren (1988) ⁽⁴⁾ 曾對 M. S. Greenwood 等人所利用的阿武德機實驗裝置的缺點提出下列幾點評論: (一)阿武德機裝置上的滑輪所產生的摩擦力加入其中而影響細線黏滯力的計算。(二)對於球在流體中運動所受到的黏滯力等於 $6 \pi r \eta v$ 的適用範圍未深入探討。(三)未考慮液面表面張力對線產生的影響。爲了探討細線的黏滯力這有趣的問題, 且又要避免阿武德機裝置的缺點, 作者乃利用自己所設計的光電管裝置 (見圖二), 重



圖一 阿武德機實驗裝置



圖二 測量小球、細線阻力的光電管裝置

新對細線黏滯力的問題作實驗性地探討，並再驗證 M. S. Greenwood 等人所獲致的結果是否正確。

貳、實驗過程

光電管實驗裝置如圖二所示。其實驗過程如下：(一)首先將管內徑 6.970 公分、高 110 公分的壓克力圓柱管充滿甘油。(二)將八組光電管以等距固定於支架上，然後再把圓柱管置於光電管及支架的中央（第一組光電管距液面約 35 公分）。(三)讓頂端連接一條 30 公分長細綿線的鋼球（ $2r = 0.635$ 公分， $m = 1.081$ 克）完全浸入甘油中，待靜止時再釋放帶線小球並使其在圓柱管向下運動。(四)記錄光電計時器上所顯示的每一支光電管的時間及甘油的溫度。(五)畫出帶線小球的時間對位置圖，並利用直線斜率求出帶線小球的終端速度。(六)改變細線長度並重覆以上步驟。

參、理論根據

當半徑 r 的小球在半徑 R 且充滿黏滯性液體的圓柱管中運動時，由 Brenner 和 Happel 所推導出的公式和牛頓第二運動定律可知，小球的運動方程式為

$$mg - B - 6\pi r\eta v \left(1 + 2.1 \frac{r}{R}\right) = m\ddot{y} \dots\dots\dots (1)$$

其中 B 表球所受到的浮力。當球達到終端速度時 $\ddot{y} = 0$ ，故可知

$$mg - B - 6\pi r\eta v_t \left(1 + 2.1 \frac{r}{R}\right) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

但若球頂端連接一條長度 L 的細線並使其在充滿液體的圓柱管中運動，同樣地由公式(1)

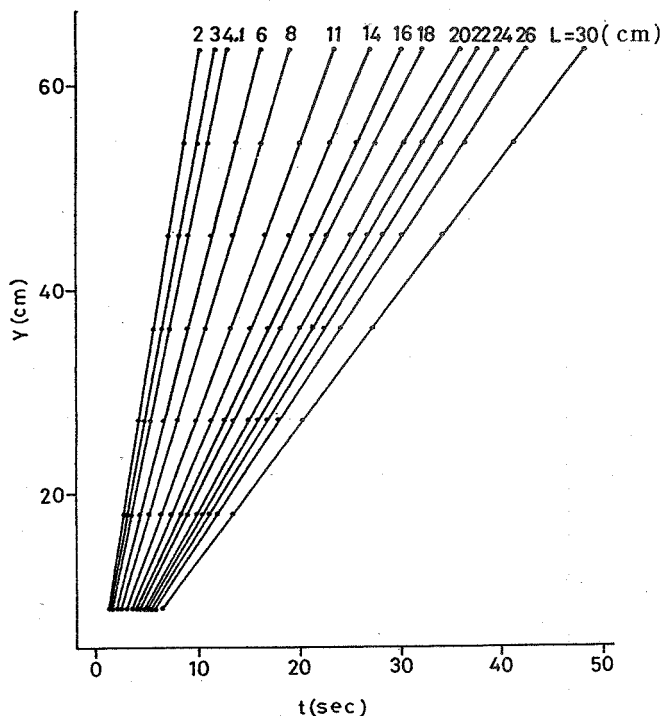
(2)之推導可知，當帶線小球達到終端速度時，細線本身所受到的黏滯力 f_r 與終端速度的關係為

$$f_r = mg - B - 6\pi r\eta v_t \left(1 + 2.1 \frac{r}{R}\right) \dots\dots\dots (3)$$

因此當終端速度 v_t 已知，則細線所受到的黏滯力就可得知。

肆、結果與討論

帶線小球在圓柱管中運動的時間對位置圖如圖三所示。利用最小平方法及直線 Fit⁽⁵⁾ 的結果可知其時間與位置的關係實際上為一直線，且不同線長其直線斜率亦不相同。又因為直線斜率代表終端速度，故由圖中各直線的斜率就可求得不同線長時的終端速度，然後再利用公式(3)求出不同線長的細線其黏滯力的大小。詳細的各項數值可參考表一。



圖三 帶線小球在圓柱管內運動的時間—位置圖
其中線的半徑等於 0.021/2 公分

由表一的第一及第三行可

表一 細線與鋼球 I 一起在甘油中運動時的各項數據表

L (cm)	30.00	26.00	24.00	22.00	20.00	18.00	16.00	14.00	11.00	8.00	6.00	4.10	3.00	2.00
v_t (cm/s)	1.311 ± 0.005	1.489 ± 0.005	1.598 ± 0.004	1.679 ± 0.006	1.767 ± 0.015	1.967 ± 0.010	2.096 ± 0.010	2.341 ± 0.014	2.673 ± 0.015	3.300 ± 0.024	3.885 ± 0.038	4.917 ± 0.030	5.384 ± 0.053	6.198 ± 0.050
f_r (dyne)	751 ± 10	732 ± 10	720 ± 10	712 ± 10	702 ± 11	681 ± 10	667 ± 10	641 ± 11	606 ± 11	540 ± 12	477 ± 13	368 ± 12	318 ± 15	233 ± 14
f_r/F	5.39	4.63	4.24	3.99	3.74	3.26	3.00	2.58	2.13	1.54	1.16	0.70	0.56	0.35

(L : 細線長度 v_t : 終端速度 f_r : 細線所受阻力 η : 甘油黏滯係數 F : 小球所受的阻力)

知，不同的線長其黏滯力亦不相同，此點與 M. S. Greenwood 所獲得的結果明顯不符。再由表一的最後一行可知，若細線與小球一起在充滿黏滯性的流體中運動時，則細線所受到的黏滯力相對於小球所受到的黏滯力而言實在是非常巨大，此結果與 M. S. Greenwood 所得的結果是一致的。

五、結 論

由以上的討論可知，若將細線連接於小球並使其在流體中運動，則細線所受到的黏滯力相對於小球而言非常巨大，此結果應該是可確信的。至於細線的黏滯力是否與線長度有關且關係為何？此問題相當複雜且目前作者尚未找到相關的文獻。但由圖三實驗結果顯示，細線阻力應是與細線長度有關。然而此結果為何與 M. S. Greenwood 等人所獲得的結果不同，作者認為其主要關鍵在於阿武德機實驗裝置無法固定浸入於甘油中的細線長度，而光電管裝置却具有此項優點。總而言之，若想利用含有細線及小球之各種實驗裝置（例如諧運動裝置等）去測量流體的黏滯係數時，則細線的黏滯力是一項不可忽略的重要因素。

參考文獻

1. Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D. University Physics, Seventh, Edition, Copyright 1987 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 329.
2. Happel, J. and Bremmer, H. (1957). Slow viscous flow past a sphere in a cylindrical tube. J. fluid. Mech. 4, 195-213.
3. Greenwood, M. S., Fazio, F., Russotto, M., and Wilkosz, A. (1986). Using the Atwood machine to study Stokes' law. Am. J. Phys. 54 (10), 904-906.
4. Lindgren, E. R. (1988). Comments on "Using the Atwood machine to study stokes' law." Am. J. Phys. 56 (10), 940.
5. Bevington, P. R. (1969). Data reduction and error analysis for the physical science. McGRAW-Hill Book Company, New York.