

一九九三年第五屆亞太數學奧林匹亞競賽 試題解答評析

陳昭地
國立臺灣師範大學數學系所

一、引言

一九九三年第五屆亞太數學奧林匹亞競賽 (APMO)，業已於今年三月分別在十三個參與國家舉辦完成競賽，其成績也已於四月中旬公布 (陳昭地，民 82 年 b)。本屆的五道試題分別由墨西哥 (第 1 題)、香港 (第 2、4 題)、泰國 (第 3 題) 及澳洲 (第 5 題) 所設計；我國今年是第三次參加，在累積過去二次參加亞太及第一次國際數學奧林匹亞競賽 (IMO) 的經驗，有來自全國各公立十七所高級中學的四十七位學生參加在中華民國舉辦的 1993 年亞太數學奧林匹亞競賽，其中產生答卷成績最優異的前十名代表我國角逐第五屆亞太數學奧林匹亞競賽，這十位代表的成績都超過金牌獎級的水準，突破紀錄；全部參與的 47 位學生亦有 27 位 (57%) 達銅牌獎級之水準，跟全體參與國 126 位代表的成績不相上下，中華民國 的數學資優教育水準之高，再次受到矚目與肯定。本文將這五道試題提出解答並加以評析，以提供輔導數學資優生參與數學競賽之參考。

二、試題解答與評析

問題 1：設四邊形 $ABCD$ 的四邊等長且 $\angle ABC$ 為 60° ，直線 ℓ 通過點 D 且與四邊形 $ABCD$ 不相交 (除了 D 點之外)；並設直線 ℓ 與直線 AB 、 BC 分別交於 E 、 F ，且線段 $\overline{CE}$ 與 $\overline{AF}$ 交於 M 。試證： $\overline{CA}^2 = \overline{CM} \times \overline{CE}$ 。(墨西哥)

[證]：(1) $\because ABCD$ 的四邊等長

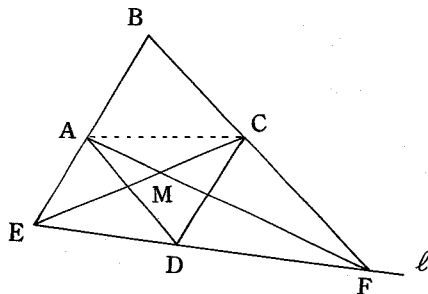
$\therefore ABCD$ 為菱形

(2) $\because ABCD$ 為菱形

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$\therefore \overline{BE} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{BF} \parallel \overline{AD}$

(3) $\because \overline{BE} \parallel \overline{CD} \therefore \angle AED = \angle CDF$



$$\because \overline{BF} \parallel \overline{AD} \therefore \angle ADE = \angle CFD$$

(4) 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle CFD$ 中

$$\because \angle AED = \angle CDF, \angle ADE = \angle CFD$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CFD \therefore \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}$$

(5) 在 $\triangle ACD$ 中, $\because \overline{AD} = \overline{CD} \angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$

$\therefore \triangle ACD$ 爲正三角形

(6) 由(4)、(5)得 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$

(7) 在 $\triangle ACE$ 與 $\triangle CFA$ 中,

$$\because \angle EAC = \angle ACF = 120^\circ \text{ 及 } \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle CFA \therefore \angle CEA = \angle FAC$$

(8) 在 $\triangle CAM$ 與 $\triangle CEA$ 中,

$$\because \angle MAC = \angle AEC, \angle ACM = \angle ECA$$

$$\therefore \triangle CAM \sim \triangle CEA$$

(9) $\because \triangle CAM \sim \triangle CEA$

$$\therefore \frac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} \therefore \overline{CA}^2 = \overline{CM} \times \overline{CE} \quad \#$$

評析：

- (1) 本題爲墨西哥所設計，爲一簡易的平面幾何題；十三國全體 126 位學生代表共有 63 位 (50%) 得滿分，23 位 (18%) 得 0 分，平均值 4.37，得分率 0.62，鑑別指數 0.74，堪稱理想。(成績紀錄請參見附錄)
- (2) 我國參加的 47 位學生，有 17 位 (36%) 得滿分，11 位 (23%) 得 0 分，平均值 4.04，得分率 0.58，鑑別指數 0.80，與全體參與國代表相互媲美；至於前十名代表只有 2 位被扣分，平均值高達 6.7 分，得分率爲 0.96，全部十三國中，僅略次於香港，本題得到第二。
- (3) 解題主要概念：
 - 平行線同位角相等。

- 三角形相似性質。
- 由欲證之結論逆推逐步分析，得到證明所需的線索。

(4) 討論：

- ① 本題所涉及的知識範圍僅及於我國現行國中三下相似三角形內容，以平面幾何法解題最為便捷，品質最佳，約有 50 % 的學生使用此法，但仍有半數的學生使用解析幾何法。
- ② 在解析幾何的證法中，應善用直觀可用的特性幫助建立有效適切的坐標系，以簡化計算，減少計算上的失誤而得不到正確結論；例如建中單中杰同學利用 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ 都是正三角形，設 $\overline{AB} = 1$, $\overline{CF} = a$ ，進而由 $\triangle EAD \sim \triangle DCF$ 得 $\overline{AE} = \frac{1}{a}$ ，而令 $B(0,0)$, $C(1,0)$, $F(1+a,0)$,

$A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，有效地簡化計算過程，計算得知 A 、 B 、 C 、 M 共圓，圓心

為 $\triangle ABC$ 的重心，從而得到 $\angle FMC = 60^\circ$, $\angle AMC = \angle EAC = 120^\circ$,

$\triangle ACE \sim \triangle MCA$ ，而得到正確的結論。

問題 2：試求下列函數 $f(x)$ ，當實數 x 在 $0 \leq x \leq 100$ 變動時，所能得到的相異整數

值的個數： $f(x) = [x] + [2x] + [\frac{5x}{3}] + [3x] + [4x]$ (香港)

[解] 首先，對於 $0 \leq x \leq 100$ ， x 可唯一寫成 $x = 3n + z$ 的型式，其中 n 為非負整數， $0 \leq z < 3$ 。因此， $f(x) = f(3n + z) = 35n + f(z)$ 。

其次，將 $[0, 99)$ 分成 33 個小區間 $[n, n+3)$ ， $n = 0, 3, 6, 9, \dots, 96$ ，則 x 限制在每一個小區間時， $f(x)$ 的相異整數值的個數都相同。因此，我們只需考慮 $x \in [0, 3)$ 的情形即可。 f 是非遞減的階梯函數，所以 x 為 f 的一

個跳躍點的充分必要條件是 x 至少為 $[x]$, $[2x]$, $[\frac{5x}{3}]$, $[3x]$, $[4x]$ 之一

的一個跳躍點。因此，在 $[0, 3)$ 中， f 有 22 個如此的跳躍點。即，

$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, 2, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}, \frac{12}{5}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}$ 。

所以，當 $x \in [0, 3)$ ，則 f 有 22 個相異整數值。如此，在 $[0, 99)$ 中， f 有 $22 \times 33 = 726$ 個相異整數值。

最後，考慮 $x \in [99, 100]$ 的情形。 f 在 $[99, 100]$ 中的相異整數值的個數和 f 在 $[0, 1]$ 中的相異整數值的個數是一樣的。而 f 在 $[0, 1]$ 中的跳躍點是 $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$ 共 8 個。因此 f 在 $[0, 1]$ 中有 8 個相異整數。

如此， f 在 $[0, 100]$ 中共有 $726 + 8 = 734$ 個不同的整數。

評析：

- (1) ① 本題為香港所提供，為 1988 年提供給 IMO 的落選題，為一高斯函數概念題，曾被收集到我國 1991 年的亞太數學奧林匹亞研習營講義中，此次捲土重來竟被選題委員看中，對我國而言非常有利，但對國際性的比賽而言，有欠公正，值得檢討。
- ② 全體參與國 126 位代表有 57 位 (45%) 得滿分，35 位 (28%) 得 0 分，平均值 4.24 分，得分率 0.61，鑑別指數為 0.81，雖然是考古題，仍不失為難度適中，頗具鑑別度的試題。
- (2) 我國全部 47 位參與學生有 18 位 (38%) 得滿分，但有 13 位 (28%) 得 0 分，平均值 3.87 分，得分率 0.55，鑑別指數 0.68，亦不失為適切的試題；至於前十名代表則都得滿分，本題排名第一。
- (3) 解題主要概念：
 - 高斯符號的意義。
 - 掌握 $[x], [2x], [\frac{5x}{3}], [3x], [4x]$ 所有可能的跳躍點。
 - $f(x)$ 在 $[n, n+3) (n=0, 3, 6, \dots, 96)$ 所得相異整數值的個數都相同。
 - $f(x)$ 在 $[99, 100]$ 所得相異整數值個數跟在 $[0, 1]$ 上所得之個數相等。
 - 正確計算 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上得 8 個相異整數值，在 $[0, 3)$ 上得 22 個相異整數值。
- (4) 討論：
 - ① 本題曾收編於我國首次亞太數學奧林匹亞研習營講義中，但僅有二位同學早自高一就參加本項活動外，其餘應不受影響。
 - ② 在本年 2 月的亞太數學奧林匹亞研習營曾特別安排有關高斯函數的專題探討，幫助學生建立高斯函數的特性，對解本題應有助益。（陳昭地，民 82 年 a）

問題3：設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 與 $g(x) = c_{n+1} x^{n+1} + c_n x^n + \cdots + c_0$ 都是實係數的非零多項式，且有一個實數 r 使得 $g(x) = (x+r)f(x)$ ；並設 a 為 $\{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_0|\}$ 之元素中最大的數， c 為 $\{|c_{n+1}|, |c_n|, \dots, |c_0|\}$ 之元素中最大的數。

試證： $\frac{a}{c} \leq n+1$ 。

[證]：因 $g(x) = (x+r)f(x)$ ，比較兩邊係數得

$$(*) \quad \begin{cases} c_0 = a_0 r \\ c_1 = a_0 + a_1 r \\ \vdots \\ c_i = a_{i-1} + a_i r \\ \vdots \\ c_n = a_{n-1} + a_n r \\ c_{n+1} = a_n \end{cases}$$

由(*)解得

$$(**) \quad \begin{cases} a_n = c_{n+1} \\ a_{n-1} = c_n - c_{n+1} r \\ \vdots \\ a_{i-1} = c_i - a_i r = c_i - c_{i+1} r + \cdots + (-1)^{n-i+1} c_{n+1} r^{n-i+1} \\ \vdots \\ a_0 = c_1 - c_2 r + \cdots + (-1)^n c_{n+1} \end{cases}$$

(1) 當 $|r| \leq 1$ 時，由(**)得

$$|a_i| \leq (n+1)c \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

因此 $a \leq (n+1)c$ ，得證。

(2) 當 $|r| > 1$ 時，由(*)， $|a_0| \leq |a_0| |r| = |c_0| \leq c$ ，

$$|a_1| \leq |a_1 r| = |c_1 - a_0| \leq |c_1| + |a_0| \leq 2c, \dots,$$

$$|a_i| \leq |a_i r| = |c_i - a_{i-1}| \leq |c_i| + |a_{i-1}| \leq c + i c = (i+1)c$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$|a_{n-1}| \leq |a_{n-1} r| = |c_{n-1} - a_{n-2}| \leq |c_{n-1}| + |a_{n-2}| \leq c + (n-1)c = nc$$

$$|a_n| = |c_{n+1}| \leq c$$

因此 $|a_i| \leq nc < (n+1)c \quad i=1, 2, \dots, n$

故得 $a < (n+1)c$

合併(1)、(2)得證 $\frac{a}{c} \leq n+1$ 。

評析：

- (1) 本題為泰國所設計，為一多項式與不等式概念結合的問題，原先預估難度為中偏難，但以題型較新穎，證法較不尋常，無法在4.5小時競賽時間內突破瓶頸而找出有利線索，十三個參與國的126位學生代表僅有3位得滿分，而有80位(63%)得0分，28位(22%)得1分，得到4分以上總共只有5位，平均值僅0.71分，得分率0.10，鑑別指數為0.01，不僅為本屆五道題之最難題，亦為最近三屆競賽以來難度僅次於第三屆的第五道幾何變換題(陳昭地，民80年)。
- (2) 我國參加競賽的47位學生僅有1位得滿分，也因此而得到我國的金牌獎，而有41位(87%)得0分，平均值0.34，而得分率為0.05，鑑別指數為0.13；而前十名代表的平均值為1.1分，得分率0.16，排名第三。

(3) 解題主要概念：

- 掌握恆等多項式的條件，比較兩多項式同次項的係數。
- 用 $g(x)$ 的係數及 r 來表 $f(x)$ 的係數。(**)
- 利用綜合除法尋找 $g(x)$, $f(x)$ 係數間的關係式(見下之討論③)。
- 就 r 的範圍分成 $|r| \leq 1$ 及 $|r| > 1$ 來探討。
- 簡易歸納(或利用倒根變換(見下之討論④))。

(4) 討論：

- ① 本題的解法由國立清華大學林哲雄教授所提供，為一頗簡潔高品質的解題策略。
- ② 在競賽的時候，大多數的學生花上2小時以上來思考本題的策略，都不得其門而入，甚至大半試圖用數學歸納法求證而導致嚴重錯誤無法得分。
- ③ 第(**)式可由綜合除法直接求得：

$$\begin{array}{r|l}
 c_{n+1} & c_n & \cdots & c_1 & c_0 \\
 & -rc_{n+1} & & & \\
 \hline
 c_{n+1} & (-rc_{n+1} + c_n) & \cdots & &
 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ -r \end{array}$$

得 $a_n = c_{n+1}$, $a_{n-1} = -rc_{n+1} + c_n$, $\cdots$,

$$a_0 = (-r)^n c_{n+1} + (-r)^{n-1} c_n + \cdots + (-r) c_2 + c_1$$

- ④ 在評分方案中能得出(**)式給2分，進一步考慮 $|r| \leq 1$ ，就可證出前一半的結果，至少可得3分；我國的代表未能突破這一關卡而得分，實在令人扼腕，非常可惜。
- ⑤ 在 $|r| > 1$ 的情況，亦可用倒根變換的方式來處理，而回歸到 $|r| \leq 1$ 的情況，

仍爲很高招、很具思考創造性的策略：

$$\text{由 } c_{n+1}x^{n+1} + c_nx^n + \cdots + c_1x + c_0 = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)(x+r)$$

$$\text{得 } \frac{c_{n+1}}{r} + \frac{c_n}{r}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + \frac{c_1}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^n + \frac{c_0}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}$$

$$= [a_n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n] \left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\text{令 } y = \frac{1}{x}$$

$$\text{得 } \frac{c_0}{r}y^{n+1} + \cdots + \frac{c_n}{r}y + \frac{c_{n+1}}{r} = \left(y + \frac{1}{r}\right)(a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n)$$

$$\text{利用 } \left|\frac{1}{r}\right| < 1 \text{ 的情況得 } a \leq \frac{c}{|r|}(n+1) < (n+1)c.$$

問題 4：試找出所有的正整數 n ，使得下列方程式有一個整數解

$$x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0. \quad (\text{香港})$$

[解]：(1) 當 $n=1$ 時，得 $x + (2+x) + (2-x) = 0$ ， $x = -4$ 爲其整數解。

(2) 當 n 爲偶數時，原式有整數解的充要條件爲：

$$(*) \quad \begin{cases} x=0 \\ 2+x=0 \\ 2-x=0 \end{cases}$$

但(*)爲矛盾方程，故知 n 爲偶數時，原方程式無整數解（甚至亦無其他非整數解）。

(3) 當 n 爲大於 1 的奇數時，利用二項式展開左式合併整理得到最高次項係數爲 1，各項係數都是非負整數而常數項爲 2^{n+1} 的多項式 $p(x)$ 。 $p(x) = 0$ 的可能整數解可設爲 -2^t ， t 爲非負整數：

① 若 $t=0$ ，則 $x=-1$ ，原式左式爲 3 個奇數之和，故不可能爲 0。

② 若 $t=1$ ，則 $x=-2$ ，原式左式爲 $(-2)^n + 0 + 4^n$ ，亦不可能爲 0。

③ 若 $t \geq 2$ ，設 $t = p+1$ ， $p \geq 1$ ，則原式的左式爲

$$\begin{aligned} & 2^n [-2^{pn} + (1-2^p)^n + (1+2^p)^n] \\ & = 2^n \left\{ -2^{pn} + 2 \left[1 + \binom{n}{2} 2^{2p} + \binom{n}{4} 2^{4p} + \cdots \right] \right\} \end{aligned}$$

但 $n \geq 3$ ，上式大括弧內之值被 4 除餘 2，不可能爲 0，因此左式不可

能為 0。

故由①、②、③得知 n 為大於或等於 3 的奇數，原方程式無整數解。

綜合(1)、(2)、(3)得出多項式方程式 $x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$ 有整數解的充要條件為 $n = 1$ 。

評析：

- (1) 本題也是 1988 年香港提供給 IMO 的落選題，屬於數論的主題，全部參與國 126 位代表有 29 位 (23%) 得滿分，亦有 24 位 (19%) 得 0 分，平均值 3.67 分，得分率 0.52，鑑別指數 0.58，難度與鑑別指數尚稱理想。
- (2) 我國參加的 47 位學生，有 15 位 (32%) 得滿分，僅有 3 位 (6%) 得 0 分，平均值 4.30 分，得分率 0.61，鑑別指數 0.48，就全體參與此項活動的數學資優生，本題最為簡易，答對率最高，遠比全體十三個國家 126 位平均水準來得高；而代表我國角逐國際獎的前十名代表，本題的平均值為 6.1 分，得分率 0.87，僅次於南韓得第二。

(3) 解題主要概念：

- 奇偶分析。
- 二項式展開。
- 整係數多項式有理根的判別法則。
- 模 4 的應用。

(4) 討論：

我國學生解此道問題在 $n > 1$ 的奇數時，多不使用解答(3)的作法，但亦經過適切的探討分析得到正確的結論，在表達上有時過於簡略，例如：建中單中杰同學的作法就是過於簡略，但不失為很直覺的想法：

若 $2 \mid n$ ，則原式左邊必大於 0，不合。故 $2 \nmid n$ ，原式成為

$$x^n + (x+2)^n = (x-2)^n$$

若 $2 \nmid x$ ，則奇數 + 奇數 = 奇數，不可能。

$\therefore 2 \mid x$ 。令 $x = 2y$ 得 $y^n + (y+1)^n = (y-1)^n$

若 $2 \nmid y$ ，則 奇數 + 偶數 = 偶數，不可能。

$\therefore 2 \mid y$ 。令 $y = 2z$ 得 $(2z)^n + (2z+1)^n = (2z-1)^n$

若 $2 \mid z$ ，則 $(2z)^n + (2z+1)^n \equiv 0 + 1^n = 1 \equiv (-1)^n \pmod{4}$

但 $2 \nmid n$ ， $\therefore 1 \equiv -1 \pmod{4}$ 不可能。

若 $2 \nmid z$ ，則考慮 $n=1$ 及 $n>1$ 兩情況。

若 $2 \nmid z$ ， $n=1$ ，則 $x+(x+2)=(x-2) \Rightarrow x=-4$

若 $2 \nmid z$ ， $n>1$ ，則 $(2z)^n + (2z+1)^n \equiv 0 + (-1)^n$
 $\equiv 1^n = 1 \pmod{4}$

但 $2 \nmid n$ ， $\therefore 1 \equiv -1 \pmod{4}$ 不可能。

綜上所述，原式有整數解的充要條件為 $n=1$ 。

問題5：設 $P_1, P_2, \dots, P_{1993} = P_0$ 為 xy 平面上相異的1993個點，且具有下列性質：

- (1) 對每個 $i=1, 2, \dots, 1993$ ， P_i 的坐標 x_i, y_i 都是整數。
- (2) 對每個 $i=0, 1, \dots, 1992$ ，線段 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 除端點 P_i, P_{i+1} 外不含其他具有兩坐標均為整數的點。

證明其中至少有一個 $i, 0 \leq i \leq 1992$ ，使得線段 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 上有一點 $Q(q_x, q_y)$ 滿足 $2q_x$ 與 $2q_y$ 都是奇數。（澳洲）

[證]：設 $\overline{P_i P_{i+1}} = [u_i, v_i]$ $i=0, 1, 2, \dots, 1992$

由 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 線段上不含端點以外的格子點可知 u_i, v_i 互質。

若 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 上的每一點 $P(x, y)$ ， $2x$ 與 $2y$ 不全為奇數，則

$$u_i + v_i \equiv 1 \pmod{2} \dots\dots\dots (*)$$

即 $u_i + v_i$ 為奇數

故若這1993條線段均不包含滿足證明條件的點 Q ，

$$\text{則 } \sum_{i=0}^{1992} (u_i + v_i) \equiv 1 \pmod{2} \dots\dots\dots (**)$$

$$\text{但 } \sum_{i=0}^{1992} \overrightarrow{P_i P_{i+1}} = \vec{0} \text{，故知 } \sum_{i=0}^{1992} u_i = \sum_{i=0}^{1992} v_i = 0$$

此與 $(**)$ 互相矛盾。

評析：

- (1) 本題為澳洲所設計，應屬分析題；全體代表各有49位（39%）得滿分與0分，鑑別指數很高，達0.97，平均值為3.48分，得分率0.50；為本屆五道試題中的第2難題，應符合原先構想。
- (2) 我國參與競賽47位學生中有18位（38%）得滿分，17位（36%）得0分，鑑別指數亦是最高，平均值達3.72，亦高出全部參與國代表之平均值，顯示我國中學生在解坐標系統的分析題，能力水準頗高，特別在代表我國前十名學生幾

乎都得滿分，平均值 6.7 分，得分率 0.96，排名第一。

(3) 解題主要概念：

- 格點坐標奇偶分析。
- 中點公式。
- 向量和的基本性質。
- 反證法為有效解題利器。

(4) 討論：

- ① 向量分量 u_i, v_i 之互質在證題過程中可以不必用到。
- ② 我國學生在坐標幾何及向量幾何早就建立良好的基礎，這類問題為我國學生的拿手題（陳昭地，民 81 年）。
- ③ 本題為一頗具鑑別度、適當難度的甄選數學資優生的好試題。

三、參考資料

1. 陳昭地（民 80 年），第三屆亞太數學奧林匹亞競賽成績報告，科學教育月刊，第 141 期（民 80 年 6 月），76～79。
2. 陳昭地（民 81 年），一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，第 152 期（民 81 年 9 月），33～53。
3. 陳昭地（民 82 年 a），一九九三年亞太數學奧林匹亞研習營模擬競賽解答評析，科學教育月刊，第 159 期（民 82 年 4 月），2～23。
4. 陳昭地（民 82 年 b），一九九三年第五屆亞太數學奧林匹亞競賽成績報告，科學教育月刊，第 160 期（民 82 年 5 月），43～49。

四、附 錄

1. 1993 APMO 競試各題得分人數、平均值、鑑別指數統計表

得 分 \ 題 次	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
0	23	35	80	24	49
1	8	4	28	6	4
2	16	8	9	7	5
3	7	3	4	27	6
4	0	2	1	14	6
5	6	4	0	11	3
6	3	13	1	8	4
7	63	57	3	29	49
平 均 值	4.37	4.24	0.71	3.67	3.48
鑑 別 指 數	0.74	0.81	0.01	0.58	0.97

2. 1993年亞太數學奧林匹亞競試中華民國學生代表得分及得獎情形統計表

名次	學生姓名	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	總分	獎別	就讀學校
1	翁啓舜	7	7	7	6	4	31	金牌	南一中
2	吳宏五	7	7	2	7	7	30	銀牌	建中
3	袁新盛	7	7	0	7	7	28	銀牌	武陵高中
4	單中杰	7	7	0	7	7	28	銅牌	建中
5	黃景沂	7	7	0	7	7	28	銅牌	建中
6	曾建城	6	7	0	7	7	27	銅牌	武陵高中
7	朱家輝	7	7	2	4	7	27	銅牌	園區高中
8	黃仁弘	7	7	0	5	7	26	榮譽	中一中
9	何忠益	5	7	0	7	7	26	榮譽	南一中
10	林展立	7	7	0	4	7	25	榮譽	私立國光
	平均值	6.7	7	1.1	6.1	6.7	27.6		

3. 中華民國參加 1993 APMO 全體學生各題得分人數、平均值、標準差、得分率及鑑別指數統計表

總人數	問題	0分	1分	2分	3分	4分	5分	6分	7分	平均值	標準差	得分率	鑑別指數
47	Q1	11	2	5	2	2	3	5	17	4.04	2.92	0.58	0.80
	Q2	13	0	9	0	1	2	4	18	3.87	3.03	0.55	0.68
	Q3	41	1	4	0	0	0	0	1	0.34	1.15	0.05	0.13
	Q4	3	3	2	12	7	4	1	15	4.30	2.25	0.61	0.48
	Q5	17	1	3	0	3	0	5	18	3.72	3.20	0.53	0.89