

國際物理奧林匹亞試題與解答(八)

傅祖怡 沈青嵩
國立臺灣師範大學物理系

第 16 屆 (1985 年於南斯拉夫波爾托羅日)

1. 一位年輕的業餘無線電愛好者與住在兩鎮上的兩女孩保持無線電聯繫。他安裝了這樣的天線陣列：使住在 A 鎮的女孩收到最大信號時，住在 B 鎮的女孩收不到信號，反之亦然。天線陣列是由兩根豎直棒狀天線組成，兩天線在水平面內各方向均勻地傳送同樣強度的信號。

- (a) 求出使兩天線間距離為最小的天線陣列參數，即兩天線棒間的距離，它的方向和兩天線的電信號間的相位差。
- (b) 若男孩的無線電台發射頻率為 27 MHz 的電磁波，天線陣列架設在波爾托羅日。他利用地圖求得了正北方與 A 方向（科佩爾）間，以及與 B 方向（伊斯特拉的布熱小鎮）間的夾角分別為 72° 和 157° ，試求上述問題的數值解。

解：(a) 設天線 1、2 提供的電信號分別為 $E_1 = E_0 \cos \omega t$ 、 $E_2 = E_0 \cos(\omega t + \delta)$ 則在 θ_A 方向有極大信號，而在 θ_B 有極小信號的條件為：

$$\begin{cases} \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta_A - \delta = 2\pi N & \text{(在 A 鎮方向兩信號同相 — 相位差為 } \pi \text{ 的偶數倍)} \\ \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta_B - \delta = 2\pi N' + \pi & \text{(在 B 鎮方向兩信號反相 — 相位差為 } \pi \text{ 的奇數倍)} \end{cases}$$

式中 N, N' 是任意整數

$$\text{上兩式相減得：} a \sin \theta_A - a \sin \theta_B = \lambda \left(N - N' - \frac{1}{2} \right)$$

令 $\varphi = \theta_A - \theta_B$ 及正弦函數和差化積定理

$$\text{得 } 2a \cos \left(\theta_A - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2} = \lambda \left(N - N' - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{\lambda - (N - N' - \frac{1}{2})}{2 \cos(\theta_A - \frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{\varphi}{2})}$$

$$\text{要求 } a \text{ 要最小} \Rightarrow \begin{cases} \text{分母最大} \Rightarrow \theta_A = \frac{\varphi}{2} \\ \text{分子最小} \Rightarrow N - N' = 1 \end{cases}$$

$$\text{故所求兩天線距離: } a = \frac{\lambda}{4 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$\text{兩天線方向: } \theta_A = \frac{\varphi}{2}, \quad \theta_B = \theta_A - \varphi = -\frac{\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{電信號的相位差: } \delta &= \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta_A - 2\pi N = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda \sin \frac{\varphi}{2}}{4 \sin \frac{\varphi}{2}} - 2\pi N \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\pi N \end{aligned}$$

(b) 發射頻率 $f = 27 \text{ MHz}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 11.1 \text{ (m)}$$

且依題意A和B方向間的夾角為

$$\varphi = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ$$

故上述問題的數值解

$$\text{兩天線間最短距離 } a = \frac{\lambda}{4 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{11.1}{4 \sin 42.5^\circ} = 4.1 \text{ (m)} \cdots \text{Ans}$$

而天線架設的方向如圖 16-1 所示

$$\text{即兩天線位置連線的中垂線方向和正北方夾 } 72^\circ + \frac{\varphi}{2} = 114.5^\circ \cdots \text{Ans}$$

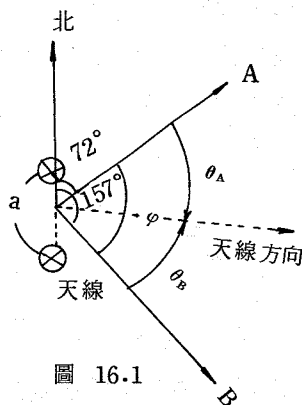


圖 16.1

2. 邊長為 a 、 b 和 c ($a \gg b \gg c$) 的直角平行六面體長棒是由半導體 InSb 製成，棒中電流 I 平行於 a 邊通過。棒放置在平行於 c 邊的外磁場 B 中，電流 I 產生的磁場可忽略不計。載流子為電子。在只有電場存在時，半導體中電子的平均速度為 $\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}$ ，式中 μ 稱為遷移率。如果同時存在磁場，電場就不再與電流平行。此現象稱為霍爾效應。

- (a) 決定棒中產生上述電流的電場的大小和方向。
 (b) 計算在 b 邊方向棒的兩個表面上相對兩點間的電位差。
 (c) 如果電流和磁場是交變的，試求出情形(b)中電勢差的直流成分的解析表示式。
 已知 $I = I_0 \sin \omega t$ ， $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$ 。
 (d) 利用(c)的結果，設計一個電路，使它能測量與交流電源相接的電子設備所消耗的功率，並解釋之。

數據：InSb 中的電子遷移率是 $7.8 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ ，InSb 中的電子濃度

為 $2.5 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ， $I = 1.0 \text{ A}$ ， $B = 0.10 \text{ T}$ ， $b = 1.0 \text{ cm}$ ， $c = 1.0 \text{ mm}$ ， $e_0 = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

解：(a) 依題意作圖 16-2(a)

首先由電流 I 求出電子速度：

$$I = JA = ne_0 v bc$$

$$\Rightarrow v = \frac{I}{ne_0 bc} = \frac{1}{2.5 \times 10^{22} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-2} \times 10^{-3}} = 25 \text{ (m/s)}$$

但方向與電流相反 ($\because$ 電子為負載子)

依圖 16.2(a) $\mathbf{v} = 25 \hat{y} \text{ (m/s)}$

$$\text{由此得電場 } E_y = \frac{v}{\mu} = \frac{25}{7.8} = 3.2 \text{ (V/m)}$$

在外加磁場下欲使電流沿 y 方向不偏轉向需一電場 E_x 克服磁場作用於電子的磁力故：

$$eE_x = evB$$

$$\Rightarrow E_x = (25 \hat{y}) \times (0.1 \text{ T } \hat{z}) = 2.5 \text{ (V/m)} \hat{x}$$

$$\therefore E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{2.5^2 + 3.2^2} \approx 4.06 \text{ (V/m)}$$

$$\text{方向為與 } x \text{ 軸夾 } \theta \text{ 角 } \theta = \tan^{-1} \frac{E_y}{E_x} = 52^\circ$$

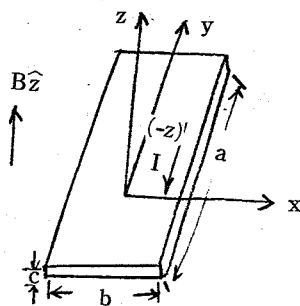


圖 16.2(a)

$$(b) \quad V = E_x \cdot b = 2.5 \times (1 \times 10^{-2}) = 25 \text{ (mV)}$$

$$(c) \quad \text{若 } I = I_0 \sin \omega t$$

$$B = B_0 \sin (\omega t + \delta)$$

$$\text{則 } V = E_x \cdot b = B \cdot \frac{I}{ne_0 bc} \cdot b = \frac{I_0 B_0}{ne_0 c} \sin \omega t \sin (\omega t + \delta)$$

$$= \frac{I_0 B_0}{2ne_0 c} [\cos \delta - \cos (\omega t + \frac{\delta}{2})] \quad (\text{利用積化和差})$$

直流部分即式中不隨時而變的部分，故

$$V(\text{直流}) = \frac{I_0 B_0}{2ne_0 c} \cos \delta$$

(d) 由(c)若能測得此 I_n Sb 板的直流電位差

$$\text{即可推出 } I_0 = \frac{2ne_0 c V}{B_0 \cos \delta}$$

配合該設備的阻抗 R 即可求得所消耗功率為 $I^2 R$

故設計如右圖 16.2 (b) 的可能實驗裝置。

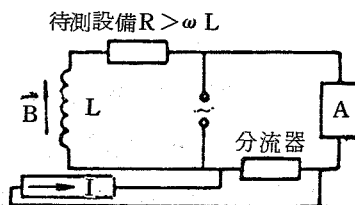


圖 16.2 (b)

3. 在一項空間規劃中，討論了向太陽系外發射空間探測器的兩種方案。第一種方案是以足夠大的速度發射探測器，使其直接逃逸出太陽系。第二種方案是使探測器靠近外層行星，然後借助於行星改變其運動方向，並達到逃逸太陽系所需的速度。設探測器在太陽或行星的萬有引力場中運動時，究竟在何力場中運動視探測器所在位置何場較強而定。

- 按第一方案發射時，試決定探測器必須具有的相對地球運動的最小速度和方向。
- 假定探測器已按(a)中確定方向，以另一速度大小發射。決定探測器與火星軌道相交時的速度，即決定相對於火星軌道的平行分量和垂直分量。設發生相交時火星並不在交點附近。
- 設探測器進入火星的引力場，求探測器從太陽系逃逸的最小速度。

提示：從結果(a)可知探測器在脫離火星引力後逃逸出太陽系所需的最佳速度大小和方向。（毋需考慮在穿越火星軌道時火星的精確位置。）求出此一最佳速度與探測器進入火星引力場前的速度分量間的關係，即與(b)中決定的速度分量間的關係。探測器的能量守恆情況如何？

- 估算第二方案比第一方案所節省能量的最大百分率。

註：設所有行星在同一平面內沿相同方向繞太陽在圓軌道上旋轉。忽略空氣阻力、地球自轉以及從地球引力場逸出所消耗的能量。

數據：地球繞太陽旋轉的速度為 30 Km/s，地球與火星離太陽的距離比為 2/3。

解：(a) 探測器逃出太陽系的必要條件為它在太陽系中的動能和位能和大於或等於零。設探測器質量 m ，探測器相對於太陽的速度 v_a ，太陽質量 M ，地球距離太陽 R_E ，則：

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GMm}{R_E} \geq 0$$

又由地繞日之圓周運動等式 $\frac{GMm_e}{R_E^2} = m_e \frac{v_E^2}{R_E}$

$$\Rightarrow \text{地球速度表式 } v_E = \sqrt{\frac{GM}{R_E}}$$

代入上式條件中消去 G 、 M ，得

$$v_a^2 \geq \frac{2GM}{R_E} = 2v_E^2$$

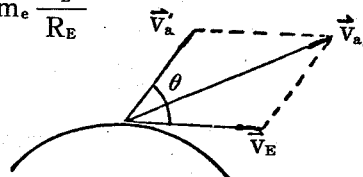


圖 16.3 (a)

令 v_a' 為相對於地球的發射速度， θ 為 v_E 與 v_a 的夾角，如圖 16.3 (a)。

$$\begin{cases} v_a^2 = v_a'^2 + v_E^2 + 2v_a'v_E \cos \theta \\ v_a^2 = 2v_E^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_a'^2 + 2v_a'v_E \cos \theta - v_E^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_a' = v_E (-\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + 1}) \quad [\text{負不合}]$$

$\theta = 0$ 時得最小發射速度

$$v_a' = v_E (\sqrt{2} - 1) = 30 \times (0.41) = 12.3 \text{ (km/s)} \dots \dots \text{Ans (a)}$$

方向同地球繞日方向

- (b) 令探測器發射速度相對於地球和太陽分別為 v_b' 、 v_b ，按(a)決定方向發射得 $v_b = v_b' + v_E$ ，見圖 16.3 (b)中設定符號，由探測器的角動量守恆定律：

$$m v_b R_E = m v R_M$$

及能量守恆定律：

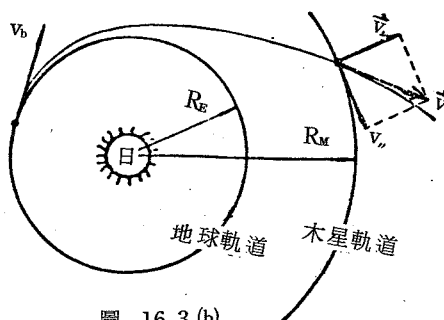


圖 16.3 (b)

$$\frac{1}{2} m v_b^2 - G \frac{mM}{R_E} = \frac{1}{2} m (v_{\eta'}^2 + v_{\perp}^2) - G \frac{mM}{R_M}$$

$$\Rightarrow v_{\eta'} = \frac{R_E}{R_M} v_b = \gamma (v_b' + v_E) = \frac{2}{3} (v_b' + v_E)$$

$$v_{\perp}^2 = v_b^2 - v_{\eta'}^2 + 2GM \left(\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R_E} \right) = (1 - \gamma^2) v_b^2 + 2v_E^2 (\gamma - 1)$$

$$\Rightarrow v_{\perp} = \sqrt{(v_b' + v_E)^2 (1 - \gamma^2) - 2v_E^2 (1 - \gamma)} = \sqrt{\frac{5}{9} (v_b' + v_E)^2 - \frac{2}{3} v_E^2}$$

- (c) 由(a)在火星坐標系中，探測器逃逸出太陽的最小速度： $v_M'' = v_M (\sqrt{2} - 1)$ ，方向平行於火星軌道（ v_M 是火星繞太陽的速度）。所以火星的作用是改變探測器的速度，使探測器以此一速度離開火星的引力場。

在火星系統中探測器的能量是守恆的。然而，在太陽坐標系中却不守恆。因為在太陽坐標系中，探測器與火星相遇可認為是兩者間的彈性碰撞，此時探測器有部分能量傳遞給火星。但在火星坐標系中，火星不運動，探測器進入火易引力場前的速度應等於離開火星引力場的速度。進入引力場前的速度分

$$\text{量 } v_{\perp}'' = v_{\perp}, \quad v_{\eta}'' = v_{\eta} - v_M$$

$$\text{所以 } v'' = \sqrt{v_{\perp}''^2 + v_{\eta}''^2} = \sqrt{v_{\perp}^2 + (v_{\eta} - v_M)^2} = v_M'' = v_M (\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{由(b) } v_{\perp} = \sqrt{(1 - \gamma^2) (v_b' + v_E)^2 - 2(1 - \gamma) v_E^2}, \quad v_{\eta} = \gamma (v_b' + v_E)$$

$$\text{又 } v_M = \sqrt{GM/R_M} = \sqrt{\frac{R_E}{R_M}} \sqrt{\frac{GM}{R_E}} = \sqrt{\gamma} v_E = \sqrt{\frac{2}{3}} v_E$$

$$\Rightarrow (1 - \gamma^2) (v_b' + v_E)^2 - 2(1 - \gamma) v_E^2 + [\gamma (v_b' + v_E) - \sqrt{\gamma} v_E]^2 \\ = [\sqrt{\gamma} (\sqrt{2} - 1) v_E]^2$$

$$\Rightarrow (v_b' + v_E)^2 - 2\gamma \sqrt{\gamma} v_E (v_b' + v_E) - [(3 - 2\sqrt{2} - 3)\gamma + 2] v_E^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_b' + v_E = \gamma \sqrt{\gamma} v_E \pm \sqrt{\gamma^3 + 2 - 2\sqrt{2}\gamma} v_E \quad (\text{取正號})$$

$$\Rightarrow v_b' = v_E (\gamma \sqrt{\gamma} - 1 + \sqrt{\gamma^3 + 2 - 2\sqrt{2}\gamma}) \quad (\because \gamma = \frac{2}{3})$$

$$= v_E \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{8}{27} + 2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}} \right)$$

$$= 5.5 \text{ (km/s)} \dots\dots\dots \text{Ans (c)}$$

- (d) 節省能量的比率為：

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{v_a'^2 - v_b'^2}{v_a'^2} = \frac{12.3^2 - 5.5^2}{12.3^2} = 0.80 = 80\%$$

式中 E_1 , E_2 分別為按第一方案和第二方案發射的能量。

[實驗題 1]

由交流電機驅動銅盤作加速或減速轉動。根據所測得的每轉半週時間畫出銅盤轉過的角度、角速度和角加速度與時間的函數關係圖。決定作為角速度函數的馬達的轉矩和功率。

儀器：(1) 帶開關和銅盤的交流電機。

(2) 電感感應器。

(3) 多頻道停表（計算器）。

說明：電感感應器用來檢測安裝在銅盤上的鐵栓，當鐵栓與感應器接近到小於 0.5 mm 時，感應器就向停表發出一個信號。

停表的工作已在計數器上編好程序，使它能在感應器檢測到鐵栓接近時，把時間記錄下來並存入存儲器。只需給停表一個簡單的數字指示，即按動下列數字之一即可操縱停表：

5 — 測量。並不立即開始，需待指定測量數後方開始。

3 — 測量 30 次。

6 — 測量 60 次。

} 此二指令可使測量開始。

完成一次測量時，計算器把結果以圖線形式顯示出來。縱軸表示檢測鐵栓之間的時間間隔，橫軸表間隔數。

7 — 以數字形式顯示結果。

第一列是某個鐵栓經檢測器的次數。第二列是從測量開始所費時間，第三列是檢測兩鐵栓間的時間間隔。

在測 60 次的情形下：

8 — 顯示圖表的第 1 頁。

2 — 顯示圖表的第 2 頁。

4 — 以圖形顯示結果。

在規定的測量數之前按任何一鍵，可使銅盤多轉半圈從而使測量中斷。

電動機工作電壓為交流 25 V。可通過底座上的開關來啟動電動機。有時需要輕推銅盤或輕敲底板以使銅盤啟動。

所有轉動部分的總轉動慣量為 $(14.0 \pm 0.5) \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$

作法：由計算器所顯示的圖表，可畫出角度與時間的關係函數曲線，如圖 16-4 (a)。

角速度用公式 $\omega_i(t_i') = \frac{\pi}{t_{i+1} - t_i}$ 計算。

$t_i' = \frac{t_{i+1} + t_i}{2}$ 是對應間隔的中間時刻。

計算值列於表 1 並作成圖 16-4 (b)。

觀察角速度恆定時轉半圈的時間間隔發現鐵栓不是對稱定位的，故計算角加速度會產生系統誤差。避免此種誤差，利用轉整圈的時間間隔：

$$\alpha_i(t_i'') = \frac{\Delta\omega_i}{\Delta t_i}$$

式中 $\Delta t_i = t_{2i+2} - t_{2i}$

$$\Delta\omega_i = \frac{2\pi}{t_{2i+2} - t_{2i+1}} - \frac{2\pi}{t_{2i+1} - t_{2i-1}}$$

表 1

i	t ms	Δt ms	φ rd	t' ms	ω s^{-1}	α s^{-2}
1	0.0		0.0			
2	543.9	543.9	3.14	272.0	5.78	
3	973.5	429.6	6.28	758.7	7.31	3.38
4	1339.0	365.5	9.42	1156.3	8.60	
5	1660.8	321.8	12.57	1499.9	9.76	5.04
6	1936.3	275.5	15.71	1798.6	11.40	
7	2177.8	241.5	18.85	2057.1	13.01	5.96
8	2396.6	218.8	21.99	2287.2	14.36	
9	2599.6	203.0	25.13	2498.1	15.48	9.40
10	2779.5	179.9	28.27	2689.6	17.46	
11	2939.3	159.8	31.42	2839.4	19.66	18.22
12	3078.0	138.7	34.56	3008.6	22.65	
13	3201.8	123.8	37.70	3139.9	25.38	25.46
14	3311.4	109.6	40.84	3256.6	28.66	
15	3412.1	100.7	43.98	3361.8	31.20	26.89
16	3504.2	92.1	47.12	3458.2	34.11	
17	3591.3	87.1	50.27	3547.8	36.07	21.72
18	3673.4	82.1	53.41	3632.4	38.27	
19	3753.5	80.1	56.55	3713.5	39.22	4.76
20	3832.1	78.6	59.69	3792.8	39.97	
21	3912.6	80.5	62.83	3872.4	39.03	-1.69
22	3992.7	80.1	65.97	3952.7	39.22	
23	4072.8	80.1	69.12	4032.8	39.22	0.77
24	4152.0	79.2	72.26	4112.4	39.67	
25	4232.5	80.5	75.40	4192.3	39.03	-0.15
26	4312.2	79.7	78.54	4272.4	39.42	

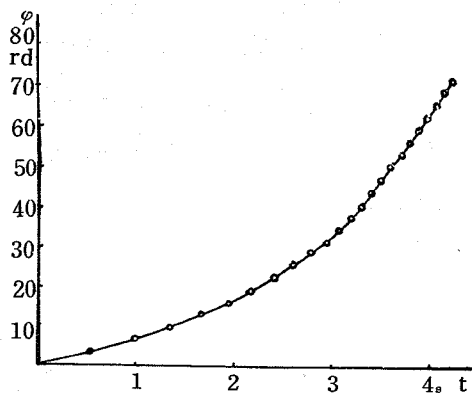


圖 16.4 (a) 角度 φ - 時間 t

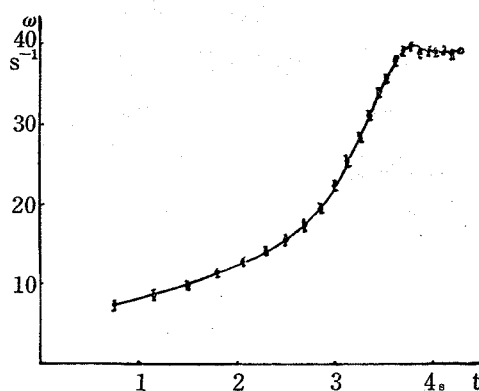


圖 16.4 (b) 角速度 ω - 時間 t

$$t_i'' = t_{2i+1}$$

計算值列於表1 並作成圖16-4 (c)。

驅動圓盤所必須的轉矩 M 和功率 P 可用如下關係算出：

$$M(t) = I\alpha(t)$$

$$P(t) = M(t)\omega(t)$$

式中轉動慣量 $I = (14.0 \pm 0.5) \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 是給定的。

相應的角速度可由圖16-4 (b)中用內插法決定。

作圖16-4 (d)、(e)實線部分為淨轉矩及淨功率。

為求總轉矩及總功率，必須確定由摩擦造成的轉矩及功率損耗，然後加於淨值上。

在關掉電動機後，通過測量圓盤減速期間的角速度（如圖16-4 (f)）可確定摩擦力的轉矩，其近似為常數

$$M' = (3.1 \pm 0.3) \times 10^{-3} \text{ Nm}$$

由此可作出總轉矩及總功率圖如

16-4 (d)、(e)之虛線部分。

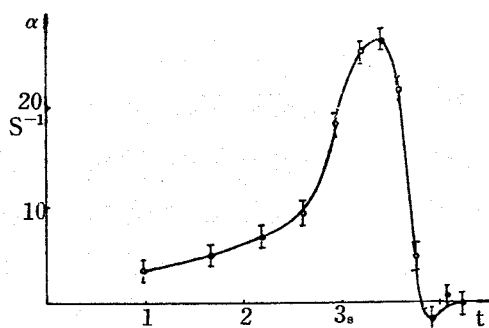


圖 16.4 (c) 角加速度 α —時間 t

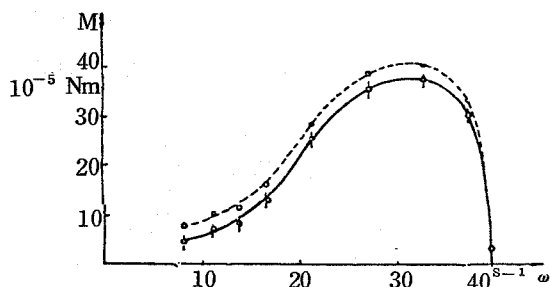


圖 16.4 (d) 淨轉矩（實線）和總轉矩（虛線）—角速度 ω

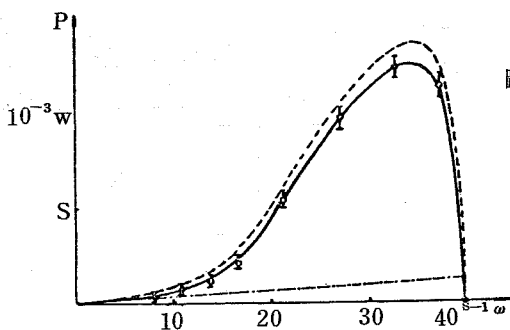


圖 16.4 (e) 淨功率（實線）、功率損耗（划線）和總功率（虛線）— ω

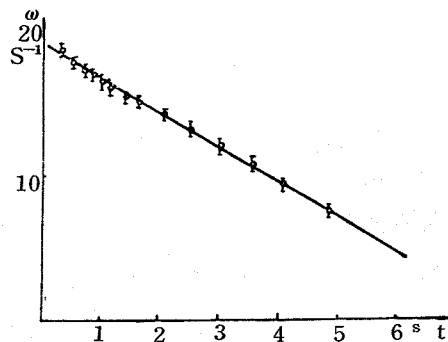


圖 16.4 (f) 減速期間角速度 ω —時間 t

[實驗題 2]

許多同樣的永久磁體隱藏在塗成黑色的泡沫塊中，找出這些永久磁體的中心位置並確定其取向。圖 16-5 (a) 畫出了這種磁體的圖形。坐標 x 、 y 和 z 應從角上的紅點（黑點）量起，如圖 16-5 (b) 所示。

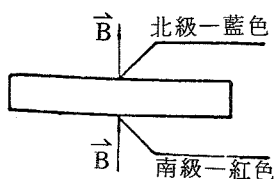


圖 16.5 (a)

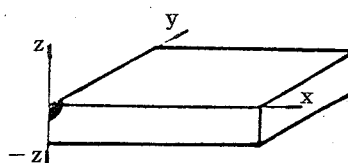


圖 16.5 (b)

用上面標定的測量系統決定 (x, y) 平面內 ($z = 0$ 處) 的磁感應強度 B 的 z 分量。求出從所提供的磁體能得到的最大磁感應強度 B 。

儀器：(1) 所給的永久磁體與藏在泡沫塊中的永久磁體相同。

(2) 電感線圈，1400 匝， $R = 230\Omega$ 。

(3) 產生磁場的線圈，8800 匝， $R = 990\Omega$ ，二只。

(4) 藏有磁體的塗黑泡沫塊。

(5) 伏特計（量程可取 1V、3V、10V）。

(6) 電子電路（建議用 24V 的電壓）。

(7) 安培計。

(8) $3.3\text{ k}\Omega$ 的變阻器。

(9) 帶限流器的 0 ~ 25 V 可調穩壓電源。

(10) 四根連接導線。

(11) 有固定孔的支撐底板。

(12) 萬能膠帶（用來固定線圈）。

(13) 牙籤。

(14) 尺。

(15) 線。

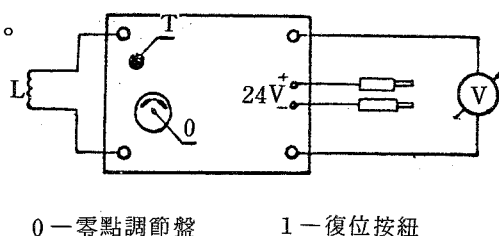


圖 16.5 (c)

說明：對磁體的研究只能用無損傷法。最後報告應包括結果、公式、曲線圖及原理圖，關於任一種可能採用的方法，必須在原理圖而不是用註釋來說明。

感應電壓測量系統的正确用法如圖 16-5 (c) 所示。

此裝置能與磁場發生響應。電壓峰值與通過線圈的磁通量的變化成正比。

用左下方的按紐來開啓(1)或關閉(0)可調穩壓電源。順時針轉動旋紐(U)可使輸出電壓增大。建議的電源電壓是 24 V，所以把相應的調節開關搬到 12 V ~ 24 V。把搬動開關 (V, A) 搬到 V 或 A 的位置，用此儀器就能測量相應的輸出電壓 U 或輸出電流 I。

然而，為得到輸出電壓，右上方的開關應放在 “Vklop” 位置。旋紐(I)用來限制電流使其低於限定值。順時針旋轉時，電源最多可提供 1.5 A 的電流。

註：真空中的磁導率 $\mu_0 = 1.2 \times 10^{-6} \text{ V/A}$ 。

作法：兩塊邊長為 50 mm、20 mm、8 mm 的長方形永久磁體，藏在大小為 50 cm × 31 cm × 4 cm 的黑色聚苯乙烯泡沫塊內。磁體的邊與泡沫塊的邊平行。磁體(A)的方置使其磁場 $\vec{B}$ 指向 z 方向 [見圖 16-5 (a)]，而另一磁體(B)的磁場 $\vec{B}$ 指向 x 或 y 方向 [見圖 16-5 (d)]。

泡沫塊中磁體的位置和取向應根據作用在另一塊外加磁體上的力來決定。這樣做的最好方法是把外加磁體懸掛在線上，並在待考察表面的上方移動。假定泡沫塊中藏有三個磁體，當外加磁體處於水平位置，即其 $\vec{B}$ 與 z 軸平行時，就會發現有三個強作用力的區域。

三個區域中在位置 P 產生吸力而在位置 R 產生斥力，故設為圖 16-5 (e) 的情況。且發現此兩區域是緊挨在一起的。但是，檢驗泡沫塊另一邊的情況時，發現在 P' 區域仍然是吸力，而在 R' 區域仍然是斥力。這顯然與圖 16-5 (e) 中的設想是矛盾的。由此你想到了圖 16-5 (d) 檢驗其力分布的情況，發現是一致的。

為決定所藏磁體的 z 位置，必須測量泡沫塊表面上 $\vec{B}$ 的 z 分量，並與外磁體的 B_z

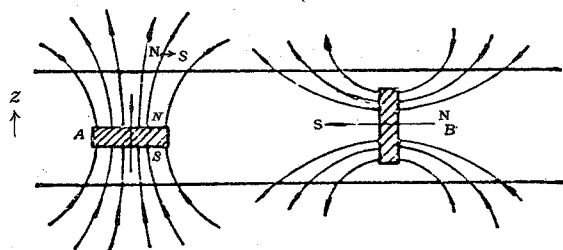


圖 16.5 (d)

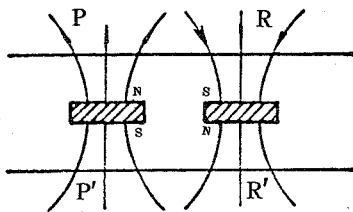


圖 16.5 (e)

在磁體 B 位置出現的兩個“鬼”磁體即檢驗泡沫塊上方時的假設，但檢驗下方後，發現不正確。

測量值相比較，外磁體的 B_z 是從其中心量起的距離函數 [圖 16-5 (f)]。為實現這點，可將測量系統的感應線圈從測量磁場的那個點移動到磁場實際上為零的距離處，並測定峰值電壓。（這是根據感應電壓等於磁通量變化的原理來測量）為了對測量系統作絕對校準，必須測定系統對已知磁場的響應。最確定的磁場在兩線圈間間隙中產生。設計此校準線路如圖 16-5 (g)。

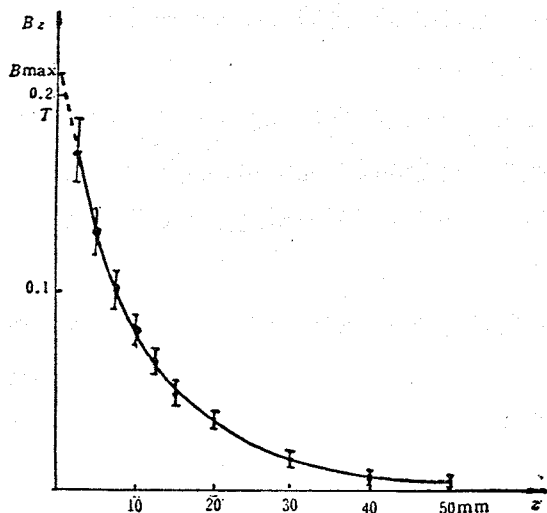


圖 16.5 (f) 磁感應強度與離磁體中心的距離間的函數關係

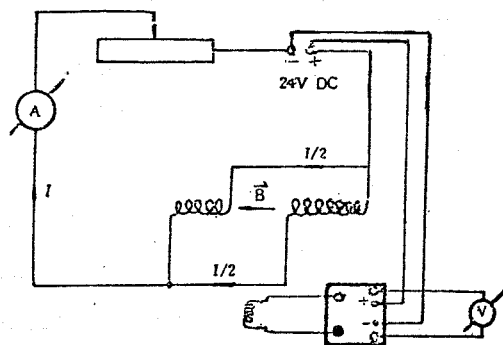


圖 16.5 (g) 測量系統的校準

兩個線圈之間間隙中的磁感應強度利用下式計算：

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\ell + d}$$

式中 N 是一個線圈的匝數， ℓ 是長度， d 是間隙的寬度， I 是通過安培計的電流。當感應線圈從間隙移開時，測量峰值電壓 U 。畫出磁感應強度 B 與峰值電壓間的函數關係，就能確定測量系統的靈敏度：

$$\frac{B}{U} = 0.020 \text{ T/V}$$

（間隙中磁場的更精確計算表明，真實的磁場值均為上述計算值的 60%，這種更精確的計算已超出本實驗的範圍。）

第 17 屆（1986 年於英國倫敦）

1. 波長為 λ ，頻率為 f 的單色平面光波垂直入射到兩個相同的狹縫 L 和 M 上，兩縫的

間距為 d ，如圖 17-1 所示。從每個縫發出的光波經時間 t 在距離 x 處（沿 θ 方向）由下式給出：

$$y = a \cos \left[2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

式中振幅 a 對兩個波均相同（設 $x \gg d$ ）。

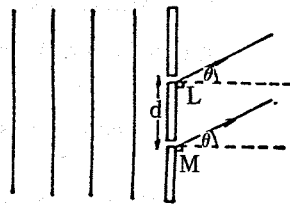


圖 17.1

- (a) 試說明，沿 θ 角方向（相對於縫的法線）觀察到的兩個波的合成振幅 A ，可由兩個向量相加獲得，每個向量的大小為 a ，相關的方向由光波的相位決定。根據向量圖從幾何上證明

$$A = 2a \cos \beta, \text{ 式中 } \beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

- (b) 將雙狹縫換為具有 N 個等間隔狹縫的光柵，相鄰兩縫的間距為 d 。利用振幅相加的向量法，說明大小均為 a 的振幅向量構成正多邊形的一部分，其頂點在圓

$$\text{周上，圓半徑 } R \text{ 由下式給出： } R = \frac{a}{2 \sin \beta}$$

試導出合成振幅等於 $a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$ ，並得出以光柵邊縫光為基準的合成相位差。

- (c) 在同一張圖上畫出 $\sin N\beta$ 及 $(1/\sin \beta)$ 作為 β 函數的草圖。

在另一張圖上畫出合成波強度隨 β 而變的函數關係。

- (d) 試確定主極大的強度。

- (e) 試證明主極大的數目不可能超過 $\left[\frac{2d}{\lambda} + 1 \right]$

- (f) 試證明兩個波長 λ 和 $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda$) 所產生的主極大的角間隔由下式給出：

$$\Delta\theta = \frac{n \Delta\lambda}{d \cos \theta}, \text{ 式中 } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ 對於鈉的 D 線, } \lambda = 589.0$$

nm, $\lambda + \Delta\lambda = 589.6$ nm, 計算 $n = 2$ 和 $d = 1.2 \times 10^{-6}$ m 時的此一角間隔。

$$(\text{提示: } \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2})$$

解：(a) 向量圖如圖 17-1 (a)。

設來自第一狹縫的光相位為零，則來自第二狹縫的相位為 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ 。

將兩相位差為 φ 的波相加：

$$\begin{aligned} & a \cos(\alpha + \varphi) + a \cos \alpha \\ &= 2a \cos \frac{\varphi}{2} \cos(\alpha + \frac{\varphi}{2}) \\ &= (2a \cos \beta) \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

式中 $\alpha = 2\pi(ft - x/\lambda)$ ，

此為振幅 $A = 2a \cos \beta$ ，

相位為 β 的波。

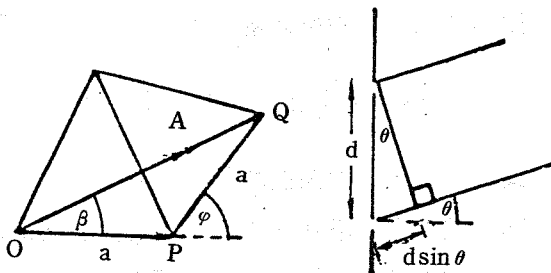


圖 17.1 (a)

由向量圖，在等腰三角形 OPQ 中，有 $\beta = \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$ 。

由此可說明兩列波之和可透過大小為 a ，角方向為 0 和 φ 的兩向量相加而得。

- (b) 在繞射光柵中，每個狹縫產生振幅為 a ，相對於前一狹縫的相位為 2β 的波。向量圖是由一“規則”多邊形構成，每邊邊長為常數 a ，相鄰兩邊間夾固定角度。

令 O 為通過此多邊形頂點的外接圓的中心，徑向線（如 OS ）的長度為 R ，並平分多邊形的內角，如圖 17-1 (b) 所示。

例如在等腰三角形 TOS 中，

$$\angle OST = \angle OTS = \frac{1}{2}(180^\circ - \phi)$$

$$\therefore \angle TOS = \phi$$

$$\text{又 } 2\beta = \phi$$

$$\therefore a = 2R \sin \frac{\phi}{2} = 2R \sin \beta$$

$$\therefore R = \frac{a}{2 \sin \beta} \dots\dots\dots ①$$

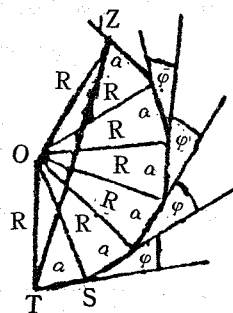


圖 17.1 (b)

在多邊形中包括 N 個三角形，

$$\angle TOZ = N(\angle TOS) = N\phi = 2N\beta$$

$\therefore$ 在等腰三角形 TOZ 中，合成波的振幅 TZ 為 $2R \sin N\beta$

$$\text{由①得合成波振幅爲 } 2 \cdot \frac{a}{2 \sin \beta} \sin N\beta = \frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

而合成相位爲

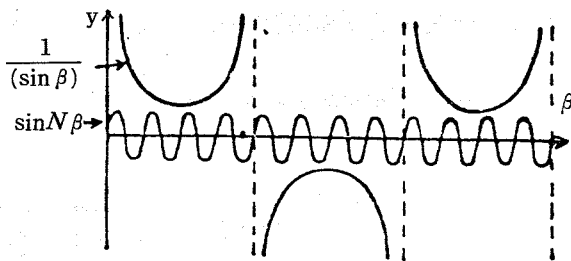
$$\begin{aligned}\angle ZTS &= \angle OTS - \angle OTZ = (90^\circ - \frac{\phi}{2}) - \frac{1}{2}(180^\circ - N\phi) \\ &= \frac{1}{2}(N-1)\phi = (N-1)\beta\end{aligned}$$

(c) 如圖 17-1 (c),

上爲 $y = \sin N\beta$

及 $y = \frac{1}{(\sin \beta)}$ 的圖

下爲合成波強度 $I(\beta)$ 的圖。



$$I = \frac{a^2 \sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}$$

由(b)合成振幅

$$A = \frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

故強度

$$I = A^2 = \frac{a^2 \sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}$$

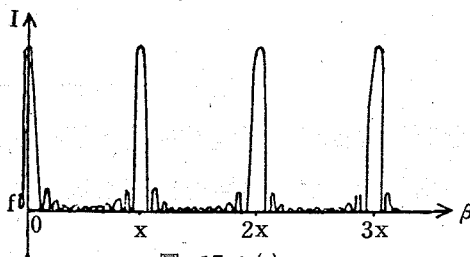


圖 17.1 (c)

(d) 由(c)之圖中可見, 對主

極大 $\beta = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

令 $\beta' \approx 0$, $\beta \approx n\pi + \beta'$

$$\text{則 } I_{\max} = \frac{a^2 \sin^2 N(n\pi + \beta')}{\sin^2(n\pi + \beta')} = \frac{a^2 \sin^2 N\beta'}{\sin^2 \beta'} \approx \frac{a^2 (N\beta')^2}{(\beta')^2} = a^2 N^2$$

(e) 因 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$ 限制在以下範圍:

$$-\frac{\pi d}{\lambda} \leq \beta \leq \frac{\pi d}{\lambda}$$

主極大由 $\beta = n\pi$ 確定, 式中 n 爲正負整數或零。所以

$$-\frac{\pi d}{\lambda} \leq n\pi \leq \frac{\pi d}{\lambda}, \quad -\frac{d}{\lambda} \leq n \leq \frac{d}{\lambda}$$

所以, n 的可能值的數目不能超過 $(\frac{2d}{\lambda} + 1)$ 。

(f) 對於主極大， $\beta = n\pi$ ，即 $\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta = n\pi$ ， $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

對此式兩邊取微分，得 $d \cos \theta \Delta \theta = n \Delta \lambda$

故得 $\Delta \theta = \frac{n \Delta \lambda}{d \cos \theta}$ 式中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

代入 $\lambda = 589.0 \text{ nm}$ ， $\lambda + \Delta \lambda = 589.6 \text{ nm}$ ， $n = 2$ 及 $d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}$

又因 $\sin \theta = \frac{n\lambda}{d} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{d}\right)^2}$

$$\begin{aligned} \text{故 } \Delta \theta &= \frac{n \Delta \lambda}{d \cos \theta} = \frac{n \Delta \lambda}{d \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{d}\right)^2}} \\ &= \frac{n \times 6 \times 10^{-10}}{1.2 \times 10^{-6} \sqrt{1 - \left(\frac{2 \times 589 \times 10^{-9}}{1.2 \times 10^{-6}}\right)^2}} \\ &= 5.2 \times 10^{-3} (\text{rad}) = 0.30^\circ \end{aligned}$$

2. 本世紀初曾提出一種地球模型，認為它是一個半徑為 R 的球體，向內至半徑為 R_c 是一均勻的，無方向性的固態地殼，半徑 R_c 以內的中心區為液態，如圖 17.2 (a) 所示。地殼內地震縱波 P 和橫波 S 的速度 v_P 和 v_S 分別為常數，在地心區內縱波具有定速 $v_{CP} < v_P$ ，而橫波不能傳播。

在地球表面 E 處的一次地震所產生的地震波在地球內傳播，且被地表任一點 X 處設置有地震儀的觀察者觀察到。 E 與 X 間的角間隔 2θ 由下式給出： $2\theta = \angle EOX$ ，其中 O 為地心。

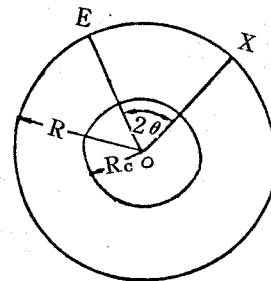


圖 17.2 (a)

- (a) 試證明，沿直線穿過地殼的地震波到達 X 的時間（地震後的傳播時間）為

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad \left[\theta \leq \cos^{-1} \left(\frac{R_c}{R} \right) \text{ 的情形} \right]$$

對 P 波 $v = v_P$ ，對 S 波 $v = v_S$ 。

- (b) 對 $\theta > \cos^{-1} (R_c/R)$ 的 X 點，地震 P 波在地殼和地心界面上經二次折射後到達觀察者。試畫出這種地震 P 波的路徑，並對 P 波求出 θ 與 i 間的關係式，這裏 i 是地震 P 波在地殼與地心界面的入射角。

- (c) 利用下列數據和(b)中所得結果，畫出 $\theta-i$ 圖：

$$R = 6370 \text{ km}, \quad R_c = 3470 \text{ km}$$

$$v_P = 10.85 \text{ km/s}, \quad v_i = 6.31 \text{ km/s}, \quad v_{CP} = 9.02 \text{ km/s}。$$

試評論，對位於地球表面不同地點的觀察者，這種形式的圖形的物理結論。

畫出 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ 範圍內 P 波和 S 波的傳播時間隨 θ 而變的函數關係圖。

- (d) 在一次地震後，某觀察者量得 S 波比 P 波晚到的時間為 2 分 11 秒，試利用(c) 中給出的數據導出地震點與觀察者間的角間隔。
- (e) 在上述測量中，觀察者注意到在 P 波和 S 波到達後，地震儀上還記錄到另兩個時間間隔為 6 分 37 秒的地震波。試解釋這一結果，並驗證這與上題所得的角間隔確實是一致的。

解：(a) 由圖 17.2 (b)

$$\overline{EX} = 2R \sin \theta$$

$$\therefore t = \frac{2R \sin \theta}{v}$$

其中對 P 波 $v = v_P$ ，對 S 波 $v = v_S$

此式只有當 X 的角間隔小於或等於 X' 的

角間隔時才成立，X' 在液態心區的切線上。由圖可見 X' 的角間隔為

$$2\phi = 2 \cos^{-1} \left(\frac{R_c}{R} \right), \text{ 因此，唯有 } \theta \leq \cos^{-1} \left(\frac{R_c}{R} \right) \text{ 時才有 } t = \frac{2R \sin \theta}{v},$$

對 P 波，式中 $v = v_P$ ，對 S 波， $v = v_S$ 。

- (b) 作圖如圖 17.2 (c)

$$\theta = \angle AOC + \angle EOA$$

$$= (90^\circ - \gamma) + (i - \alpha) \dots \textcircled{1}$$

由司乃耳定律（折射定律）：

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{v_P}{v_{CP}} \dots \textcircled{2}$$

應用正弦定律於三角形 EAO 得

$$\frac{R_c}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin i} \dots \textcircled{3}$$

將②、③代入①得

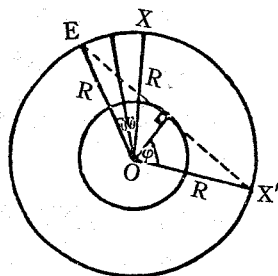


圖 17.2 (b)

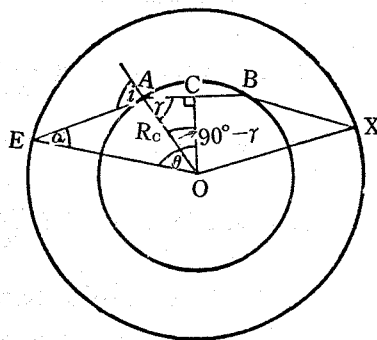


圖 17.2 (c)

$$\theta = 90^\circ - \sin^{-1} \left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i \right) + i - \sin^{-1} \left(\frac{R_c}{R} \sin i \right) \dots \dots \textcircled{4} \dots \text{Ans}$$

(c) 由已知數據得 $R_c/R = 0.5447$, $v_{CP}/v_P = 0.8313$

將 $i = 0$ 和 90° 及上述結果代入④

得 $i = 0$ $\theta = 90^\circ$

$i = 90^\circ$ 時 $\theta = 90.8^\circ$

再代入其它值，可得圖 17.2 (d) 曲線。

發現在 $i = 55^\circ$ 處有一極小值，

$$\theta_{\min} = 75.8^\circ$$

物理結論：因 θ 有極小值 75.8° ，處

於 $2\theta < 151.6^\circ$ 位置的觀察者將觀察不到地震，這是因為地震波不會偏折小於 151.6° 的角度。然而，對 $2\theta \leq 114^\circ$ ，非折射的直射地震波可到達觀察者。

地震波的傳播時間對 θ 的函數關係如

圖 17.2 (e) 所示。

(d) 利用公式 $t = \frac{2R \sin \theta}{v}$

時間延遲 Δt 為

$$\Delta t = 2R \sin \theta \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_P} \right) \dots \textcircled{5}$$

代入所給數據，得

$$131 = 2 \times 6370 \times \left(\frac{1}{6.31} - \frac{1}{10.85} \right) \sin \theta$$

所以 E 與 X 的角間隔為 $2\theta = 17.84^\circ$

$$\text{此結果小於 } 2 \cos^{-1} \left(\frac{R_c}{R} \right) = 2 \cos^{-1} \left(3470/6370 \right) = 114^\circ$$

因而無穿過地心折射的地震波到達。

(e) 所觀察到結果最可能是由於地震波在地殼—地心界面上反射而引起的。採用圖 17.2 (f) 中所標的符號，時間延遲 $\Delta t'$ ，為

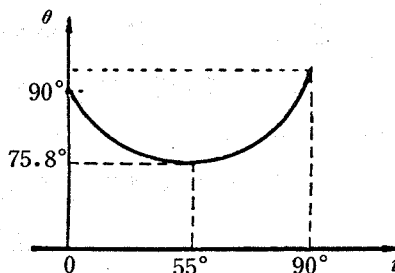


圖 17.2 (d)

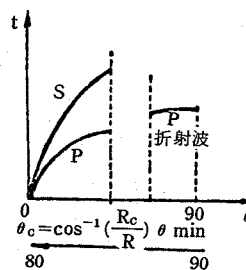


圖 17.2 (e)

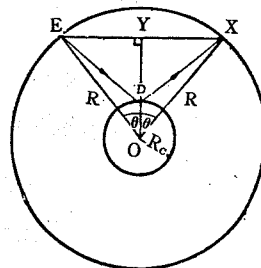


圖 17.2 (f)

$$\Delta t' = (ED + DX) \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p} \right)$$

$$= 2ED \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p} \right)$$

$$(\because \overline{ED} = \overline{DX})$$

在三角形 EYD 中，

$$(ED)^2 = (R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta - R_c)^2$$

$$= R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta$$

$$\text{所以 } \Delta t' = 2 \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta} \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p} \right)$$

利用⑤式，得

$$\Delta t' = \frac{\Delta t \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}}{R \sin \theta}$$

$$= \frac{131 \sqrt{(6370)^2 + (3470)^2 - 2(6370)(3470) \cos 8.92^\circ}}{6370 \sin 8.92^\circ}$$

$$= \frac{(131)(2990.7)}{987.7} = 396.7 \text{ s} = 6 \text{ min } 37 \text{ s}$$

因此，由於地震波 P 和 S 在地殼—地心界面上反射而造成的時間間隔與角間隔 17.84° 符合一致。

3. 三個質量各為 m 的質點由未伸長無質量的彈簧連接在一起達到平衡，每個彈簧具有胡克定律的常數 k 。這些質點被限制在圓周上運動，如圖 17-3(a) 所示。

- (a) 若每個質點偏離平衡位置的小位移分別為 u_1 ， u_2 和 u_3 ，試寫出每個質點的運動方程。

- (b) 試驗證此系統有如下簡諧式解：

$$u_n = a_n \cos \omega t$$

其加速度為 $-\omega^2 u_n$ ，其中 a_n ($n=1, 2$ 和 3) 是恆振幅、角頻率 ω 有三個可能值： $\omega_0 \sqrt{3}$ ， $\omega_0 \sqrt{3}$ 和 0 ，其中 $\omega_0^2 = k/m$ 。

- (c) 把這個由彈簧和質點交替連接的系統擴充到 N 個質點，每個質點 m 用彈簧與相鄰質點連接。起初彈簧未伸長，處於平衡狀態。當質點偏離平衡時，用第 n 個

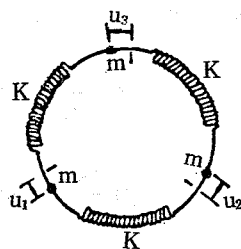


圖 17.3(a)

質點和相鄰質點的位移寫出第 n 個質點的運動方程 ($n=1, 2, \dots, N$)。

試驗證振盪解為 $u_n(t) = a_s \sin\left(\frac{2nS\pi}{N} + \phi\right) \cos \omega_s t$ 。

式中 $S=1, 2, \dots, N$; $n=1, 2, \dots, N$; ϕ 為任意相位, 角頻率由下式給出:

$\omega_s = 2\omega_0 \sin\left(\frac{S\pi}{N}\right)$, a_s ($S=1, 2, \dots, N$) 是與 n 無關的定振幅。

對一條包含無窮多個質量的鏈條, 試說明其頻率的可能範圍。

(d) 對大 N 值, 在下列兩種情形下決定比值 u_n/u_{n+1} :

(i) 低頻解。

(ii) $\omega = \omega_{\max}$, $\omega_{\max}$ 是最高頻率解。

對 (i) 和 (ii) 兩種情形, 試畫出在時刻 t 表明質點位移與該質點在鏈上序數之間關係的草圖。

(e) 若一個質點被質量為 $m' \ll m$ 的質點代替, 試估計角頻率的分布將會發生怎樣的主要變化。

在上述結果的基礎上, 試定性描述由質量 m 和 m' 交替連成的雙原子鏈會有何種形式的頻譜。

提示: $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A$$

解: (a) 運動方程為:

$$m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1)$$

$$m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = k(u_3 - u_2) + k(u_1 - u_2)$$

$$m \frac{d^2 u_3}{dt^2} = k(u_1 - u_3) + k(u_2 - u_3)$$

(b) 將 $u_n(t) = a_n \cos \omega t$ 和 $\omega_0^2 = k/m$ 代入以上方程, 得

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)a_1 - \omega_0^2 a_2 - \omega_0^2 a_3 = 0 \dots\dots\dots ①$$

$$-\omega_0^2 a_1 + (2\omega_0^2 - \omega^2)a_2 - \omega_0^2 a_3 = 0 \dots\dots\dots ②$$

$$-\omega_0^2 a_1 - \omega_0^2 a_2 + (2\omega_0^2 - \omega^2) a_3 = 0 \dots\dots ③$$

從①和②式解出 a_1 和 a_2 ，代入③式得等價方程

$$(3\omega_0^2 - \omega^2)^2 \omega^2 = 0$$

解得 $\omega^2 = 3\omega_0^2$, $3\omega_0^2$ 和 0 即 $\omega = \sqrt{3}\omega_0$, $\sqrt{3}\omega_0$ 和 0

(c) 第 n 個質點的運動方程為

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - u_n) + k(u_{n-1} - u_n), \quad n=1, 2, \dots, N$$

$$\text{或 } \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2 (u_{n+1} - u_n) + \omega_0^2 (u_{n-1} - u_n)$$

將 $u_n(t) = a_s \sin(2ns\pi/N + \phi) \cos \omega_s t$ 代入，得

$$\begin{aligned} -\omega_s^2 \sin\left(\frac{2ns\pi}{N}\right) &= \omega_0^2 \left[\sin\frac{2(n+1)s\pi}{N} - 2\sin\frac{2ns\pi}{N} + \sin\frac{2(n-1)s\pi}{N} \right] \\ &= 2\omega_0^2 \left[\frac{1}{2} \left(\sin\frac{2(n+1)s\pi}{N} + \sin\frac{2(n-1)s\pi}{N} \right) - \sin\frac{2ns\pi}{N} \right] \\ &= 2\omega_0^2 \left[\sin\frac{2ns\pi}{N} \cos\frac{2s\pi}{N} - \sin\frac{2ns\pi}{N} \right] \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \omega_s^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos\frac{2s\pi}{N} \right]$$

$$\text{因 } 2\sin^2\theta = 1 - \cos\theta$$

$$\text{故 } \omega_s = 2\omega_0 \sin\frac{s\pi}{N}, \quad s=1, 2, \dots, N$$

當 $N \rightarrow \infty$ 時， ω_s 可取從 0 到 $2\omega_0 = 2\sqrt{k/m}$ 間的值；

相應的 s 的範圍為 1 到 $N/2$ 。

(d) 對第 s 種模式，

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{\sin\frac{2ns\pi}{N}}{\sin\left[\frac{2(n+1)s\pi}{N}\right]} \\ &= \frac{\sin\frac{2ns\pi}{N}}{\sin\frac{2ns\pi}{N} \cos\frac{2s\pi}{N} + \cos\frac{2ns\pi}{N} \sin\frac{2s\pi}{N}} \end{aligned}$$

(i) 對小 ω , $(s/N) \sim 0 \Rightarrow \cos(2s\pi/N) \sim 1$, $\sin(2s\pi/N) \sim 0$

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} \approx 1$$

(ii) $s = \frac{N}{2}$ 對應於最高模式, $\omega_{\max} = 2\omega_0$

情形 (i)

$$\text{因 } \frac{\sin n\pi}{\sin(n+1)\pi} = -1$$

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} = -1$$

情形 (ii)

質點位移與所在序數間 N 為奇數

關係草圖如圖 17.3(b)

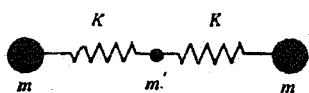


圖 17.3 (c)

N 為偶數

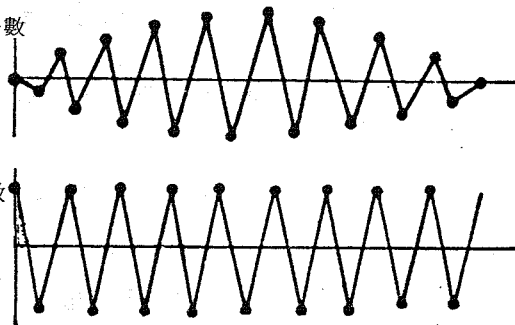


圖 17.3 (b)

(e) 如圖 17.3 (c) 所示, 若 $m' \ll m$, 則可把與 m' 相關的頻率看成是由 m' 在兩個與它相鄰的質量要大得多的質點間的振動引起的, 質量較大的質點可看作是靜止的。在此一近似下, m' 的簡正模式頻率由下式給出:

$$m' X = -2kX$$

$$\omega'^2 = \frac{2k}{m'}$$

$$\therefore \omega' = \frac{2k}{\sqrt{m'}}$$

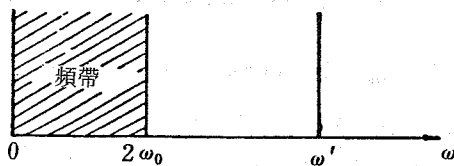


圖 17.3 (d)

因 m' 很小, ω' 將比 $\omega_{\max}$ 大得多
其頻譜如圖 17-3 (d)。

對雙原子系統, 較輕的質量 m' 將在 ω' 的區域增加頻率的數目, 從而得到如圖 17.3 (e) 的頻譜。

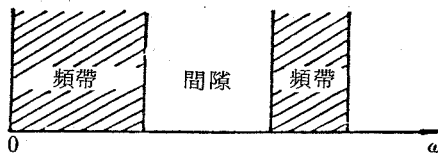


圖 17.3 (e)