

平方數末三，四，五位數之必要值

吳大猷
中央研究院

摘 要

本文列出平方數末三位、四位、五位數的必要值。

張莉莉女士近證明任何一整數平方數，其末二位數必為下列 22 個數之一：00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96。(註一) 這些只是必要值，但非充足條件。例如由 1 至 10^6 間的一百萬個數中，這 22 個末二位數出現 220,000 次，而其中只有 1,000 個係平方數。確定何者為平方數，仍需用其它檢定法。(註一)

本文試將張文的 22 個末二位數的必要值，伸展至平方數末三位、末四位、末五位數的必要值。筆者不諳數論文獻，只期「笨法」，所得結果(表一，表二，表三)可能是已知的，亦可能有遺漏處，祇思或亦有作一簡報的意義而已。

茲以 $p m n a b$ 表一數的末五位數： ab 乃上列的 22 個數，如 00, 01, 04, ..., 96; p, m, n 各皆由 0 至 9 十個數之一。下表一、表二、表三乃平方數末三位、末四位、末五位數的必要值。但如上段所著重的，符合三表的「必要值」之數，並非必係平方數！

表一 「無限制」即0,1,2,...,9之意

平方數末三位數 (nab)	n 之必要值
$n00$	1, 4, 5, 6, 9
$n25$	0, 2, 6
$n01, n09$ } $n41, n49$ } $n81, n89$ }	0, 2, 4, 6, 8
$n21, n29$ } $n61, n69$ }	1, 3, 5, 7, 9
$n04, n24, n44, n64, n84$ } $n16, n36, n56, n76, n96$ }	無限制

由表一得平方數末三位數有 N_3

$$N_3 = 5 + 3 + 30 + 20 + 100 = 158 \text{ 個}$$

表二 「無限制」乃0,1,2,...,9之意

平方數末四位數 ($mnanb$)	m 之必要值
$m100, m400, m900$	0, 2, 4, 6, 8
$m600$	1, 3, 5, 7, 9
$m500$	2
$m025, m225$	無限制
$m625$	0, 5
$mnan01, mnan09, mnan41$ } $mnan49, mnan81, mnan89$ }	$n = 0, 2, 4, 6, 8$
$mnan21, mnan29$ } $mnan61, mnan69$ }	m 無限制
$mnan04, mnan24, mnan44$ } $mnan64, mnan84,$ $mnan16, mnan36, mnan56$ } $mnan16, mnan96$	$n = 1, 3, 5, 7, 9$ m 無限制 $m = n$ 皆無限制

表三 「無限制」乃0,1,2,...,9之意

平方數末五位數 ($pmnab$)	p 之必要值
$\left. \begin{array}{l} p0100 \quad p4100 \quad p8100 \\ p0900 \quad p4900 \quad p8900 \end{array} \right\}$	0, 2, 4, 6, 8
$p2100 \quad p6100 \quad p2900 \quad p6900$	1, 3, 5, 7, 9
$\left. \begin{array}{l} pm400, m=0, 2, 4, 6, 8 \\ pm600, m=1, 3, 5, 7, 9 \end{array} \right\}$	無 限 制
$p0625$	0, 3, 4, 5, 8, 9
$p5625$	0, 1, 2, 5, 6, 7
$p2500$	0, 2, 6
$pm025, pm225, m$ 無限制	無限制
$\left. \begin{array}{l} pmn01 \quad pmn41 \quad pmn81 \\ pmn09 \quad pmn49 \quad pmn89 \end{array} \right\}$	無 限 制
$n=0, 2, 4, 6, 8; m$ 無限制	
$\left. \begin{array}{l} pmn21 \quad pmn29 \quad pmn61 \quad pmn69 \\ n=1, 3, 5, 7, 9; m \text{ 無限制} \end{array} \right\}$	無 限 制
$\left. \begin{array}{l} pmn04 \quad pmn24 \quad pmn44 \\ pmn64 \quad pmn84 \\ pmn16 \quad pmn36 \quad pmn56 \\ pmn76 \quad pmn96 \end{array} \right\}$	無 限 制
m, n 無限制	

設 N_n 為平方數末 n 位數必要值的個數 ($n=1$, 末一位數必要值為 1, 4, 5, 6, 9, 0。故 $N_1=6$; $n=2$, 末二位數乃張文之 00, 01, 04, ... 等 22 個數; 即 $N_2=22$ 。由本文表一、表二、表三, 即得

$$N_3 = 158, N_4 = 1,543, N_5 = 15,365$$

設 x_n 乃在一大堆 (6 位數以上) 的數中, N_n 出現的百分率。由上述結果, 可得 (%)。

$$x_1 = 60, x_2 = 22, x_3 = 15.80, x_4 = 15.43, x_5 = 15.365$$

由上述, 可作下舉的例子: 介於 100,000 與 1,000,000 之間, 有 900,000 個數。

此 900,000 數末五位數符合表三所列的，乃 $900,000 \times 5 = 138,285$ 個。但其中是平方數的，祇有

$$1,000 - 316 = 684 \text{ 個}$$

[由 1 至 100,000 間之平方數有 316 個；由 1 至 1,000,000 間之平方數有 1,000 個]。
故在 138,285 個數中，其非平方數者為 137,601 個。

82 年 4 月

註一 張莉莉，台北市立師範學院季刊，第 9 期，80 年 11 月。

張莉莉，科學教育月刊，第 159 期，82 年 4 月。

主 編 的 話

本期內容特別充實豐富，令編者振奮。

三月卅日本刊第 159 期交郵，四月四日本刊發行人魏主任明通即奉 吳院長大猷手示並交來短文一篇——平方數末三、四、五位數之必要值——編輯同仁拜讀之下，至感振奮，以吳老高齡及物理學界泰斗之地位，其興趣之廣，不異青年學者，其治學之精更可為學人典範。他老人家的科學家精神與態度，真令人既欽佩又喜愛，為吾人應學習並效法者。

趙金祁博士以其多年研究科學教育理論與體系之心得，甚多原創性高見，本期發表之「三維人文科技通識架構芻議」一文，應視為經典之作。

甘如石教授為太空物理學家，本刊特請其以常識性的介紹近年太空物理之內容與方向，文中簡介之餘，並對我國太空科技有培育人才為要務之建議。

四月二十九日是本中心大喜的日子，不但新建科教大樓正式啟用，同時舉辦國際科學教育研討會邀請海內專家學者參與，已於上期本刊報導。茲為本中心便於推行科學教育措施及各有關單位來此洽公，特將本大樓各層平面圖刊列。

教育部八十一學年度高級中學第二屆數學決賽試題，曾於本刊第 157 期刊出，其中多數為有深度、有技巧、更有啟發性者，不知讀者試予解答否？本期特為刊出參考答案。

其他，如科學教室、國際數理科奧林匹亞、疑難問題解答等均為讀者所歡迎者，均予選要刊出。