教育部八十一學年度高級中學
第二屆數學競賽決賽試題參考答案

國立臺灣師範大學數學系提供

試題請參閱本刊157期第55～57頁

競賽(一)

問題 1. 首先，因為 $yz-1$ 是 x 的倍數，所以，x 與 y 互質，x 與 z 互質。因為 $zx-1$ 是 y 的倍數，所以，y 與 z 互質。亦即，x, y 與 z 兩兩互質。其次，因為 $yz-1$ 是 x 的倍數，而 zx 與 xy 也都是 x 的倍數，所以，$yz+zx+xy-1$ 是 x 的倍數。同理，$yz+zx+xy-1$ 是 y 的倍數，也是 z 的倍數。因為 x, y 與 z 兩兩互質，所以，$yz+zx+xy-1$ 是 xyz 的倍數。

設 $yz+zx+xy-1=kxyz$，其中 k 為正整數，則得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{xyz}+k>1\text{。}$$

若 $x\geq 3$，則由 $x\leq y\leq z$ 知 $y\geq 3$ 且 $z\geq 3$。如此，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 1$，此與上式矛盾。由此可知 $x=2$ 且

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2yz}+\left(k-\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}\text{。}$$

若 $y\geq 4$，則 $z\geq 4$。如此，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{1}{2}$，此與上式矛盾。由此可知 $y=2$ 或 $y=3$。但因 x 與 y 互質而 $x=2$，所以，$y=3$。再由 $5z+5=6kz$ 或 $(6k-5)z=5$ 可得 $z=5$，$k=1$。

問題 2.

解(一)：當 θ 滿足 $8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0$ 時，可得 $\cos\theta\neq -1$，

$\therefore \cos\dfrac{\theta}{2}\neq 0$。於是，

$$8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=2\cos 3\theta-2\cos 2\theta+2\cos\theta-1$$

$$=\sec\frac{\theta}{2}\left[\left(\cos\frac{7\theta}{2}+\cos\frac{5\theta}{2}\right)-\left(\cos\frac{5\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right)+\left(\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=\sec\frac{\theta}{2}\cos\frac{7\theta}{2}\text{ 。}$$

所以，原方程式的解可由 $\cos\dfrac{7\theta}{2}=0$ 且 $\cos\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ 求得，共有

$$\theta=\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \text{或} \frac{13\pi}{7}\text{ 。}$$

解(二)：令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，則 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}(z+z^{-1})$。代入原方程式，得

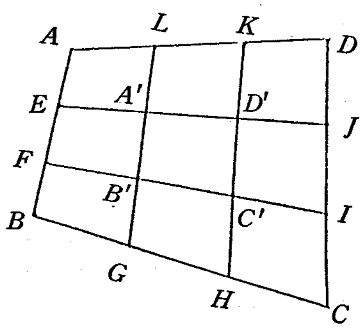
$$z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0 \qquad (*)$$

因爲 $z^7+1=(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)$，所以，方程式(*)的解就是 $z^7+1=0$ 的解，但 $z\neq -1$。由此可知：(*)的解爲

$$z=\cos\frac{2k+1}{7}\pi+i\sin\frac{2k+1}{7}\pi \ , \ k=0,1,2,4,5,6$$

原題的 θ 値共有$\dfrac{\pi}{7}$，$\dfrac{3\pi}{7}$，$\dfrac{5\pi}{7}$，$\dfrac{9\pi}{7}$，$\dfrac{11\pi}{7}+\dfrac{13\pi}{7}$ 等六個解。

問題 3. 在右圖中，因爲$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AL}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{3}$，所以，$\overline{EL}\,/\!/\,\overline{BD}$ 而且 $\overline{EL}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$。加上方向的考慮，我們得 $\overrightarrow{EL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$。同理，$\overrightarrow{GJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}$。由此得 $\overrightarrow{EL}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GJ}$。於是，$\triangle A'EL\sim\triangle A'JG$。 更進一步得



$\dfrac{\overline{A'E}}{\overline{A'J}}=\dfrac{\overline{A'L}}{\overline{A'G}}=\dfrac{\overline{EL}}{\overline{GJ}}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{A'E}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'J}$，$\overrightarrow{A'L}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'G}$。所以，$A'$ 是 $\overline{EJ}$ 上的三等分點，也是 $\overline{GL}$ 上的三等分點。同理，B'，C'，D'也都是它們所屬線段上的三等分點。

因爲 B' 與 D' 分別是 $\overline{A'G}$ 與 $\overline{A'J}$ 的中點，所以，$\overrightarrow{B'D'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$。

同理，$\overrightarrow{A'C'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。更進一步地，$\overrightarrow{A'C'}$、$\overrightarrow{B'D'}$ 的夾角與 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 的夾角相等，記爲 θ。於是，得

$$\square A'B'C'D' \text{ 的面積}=\frac{1}{2}\overline{A'C'}\cdot\overline{B'D'}\cdot\sin\theta=\frac{1}{18}\overline{AC}\cdot\overline{BD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{9}\cdot(\square ABCD\text{ 的面積})$$

競賽(二)

問題 4. 對每一對正數 u, v，恆有

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{4}{u+v}=\frac{(u+v)^2-4uv}{uv(u+v)}=\frac{(u-v)^2}{uv(u+v)}\geq 0$$

而且等號成立的充要條件是 $u=v$。於是，

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}$$

$$=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)$$

$$\geq\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{b+c+d+a}=4$$

等號成立的充要條件是 $a+b=c+d$ 且 $b+c=d+a$

$$\Longleftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d\text{。}$$

問題 5.

解(一)：考慮過 N、P_1 與 P_2 的平面 π_1，因爲 $\overline{P_1P_2}$ 是直徑，所以 $\angle P_1NP_2=90^\circ$。

因為Q_1在射線$\overrightarrow{NP_1}$上而Q_2在射線$\overrightarrow{NP_2}$上，所以，$\angle Q_1NQ_2 = 90°$。因為直線NO與平面π垂直於O，所以，$\overline{NO}$與$\overline{Q_1Q_2}$垂直於O。由$\triangle Q_1NO \sim \triangle NQ_2O$可得$\overline{OQ_1} \times \overline{OQ_2} = \overline{ON}^2 = a^2$。因為向量$\overrightarrow{OQ_1}$與向量$\overrightarrow{OQ_2}$共線但方向相反，所以$\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2} = -a^2$。

解(二)：Σ的方程式為$x^2+y^2+z^2=a^2$。設P是Σ上異於N的任意點，則其坐標是$P(u, v, \pm\sqrt{a^2-u^2-v^2})$之形式。於是，直線$NP$的方程式如下：

$$\begin{cases} x = ut \\ y = vt \\ z = a+(-a\pm\sqrt{a^2-u^2-v^2})t \end{cases} \qquad (t \text{ 為實數})$$

所以，直線NP與xy平面π的交點坐標為$Q\left(\dfrac{-au}{-a\pm\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, \dfrac{-av}{-a\pm\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, 0\right)$。

亦即：函數$f: \Sigma-\{N\}\to\pi$的定義如下：

$$f(u,v,\pm\sqrt{a^2-u^2-v^2}) = \left(\frac{-au}{-a\pm\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, \frac{-av}{-a\pm\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, 0\right)$$

若$\overline{P_1P_2}$為一直徑，則必有二實數u, v使得P_1與P_2的坐標分別表示為$P_1(u, v, \sqrt{a^2-u^2-v^2})$與$P_2(-u, -v, -\sqrt{a^2-u^2-v^2})$。設$f(P_1)=Q_1$，$f(P_2)=Q_2$，則向量$\overrightarrow{OQ_1}$與向量$\overrightarrow{OQ_2}$的內積可計算如下：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2} &= \frac{-au}{-a+\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \cdot \frac{-a(-u)}{-a-\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \\ &\quad + \frac{-av}{-a+\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \cdot \frac{-a(-v)}{-a-\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \\ &= \frac{-a^2(u^2+v^2)}{a^2-(a^2-u^2-v^2)} \\ &= -a^2\end{aligned}$$

問題 6. 由$f(0^2+0^2) = (f(0))^2+(f(0))^2$得$2(f(0))^2 = f(0)$。因為$f(0)$是整數，所以，$f(0)=0$。

由$f(0^2+1^2) = (f(0))^2+(f(1))^2$得$(f(1))^2 = f(1)$。因為$f(1)>0$，

所以，$f(1)=1$。

由 $f(1^2+1^2)=(f(1))^2+(f(1))^2$ 及 $f(1)=1$ 得 $f(2)=2$。

由 $f(0^2+2^2)=(f(0))^2+(f(2))^2$ 及 $f(0)=0$、$f(2)=2$ 得 $f(4)=4$。

由 $f(1^2+2^2)=(f(1))^2+(f(2))^2$ 及 $f(1)=1$、$f(2)=2$ 得 $f(5)=5$。

由 $f(2^2+2^2)=(f(2))^2+(f(2))^2$ 及 $f(2)=2$ 得 $f(8)=8$。

其次，因爲 $3^2+4^2=0^2+5^2$，所以，$f(3^2+4^2)=f(0^2+5^2)$，

$(f(3))^2+(f(4))^2=(f(0))^2+(f(5))^2$。

再由 $f(0)=0$、$f(4)=4$、$f(5)=5$ 及 $f(3)\geq 0$ 得 $f(3)=3$。

由 $f(0^2+3^2)=(f(0))^2+(f(3))^2$ 及 $f(0)=0$、$f(3)=3$ 得 $f(9)=9$。

由 $f(1^2+3^2)=(f(1))^2+(f(3))^2$ 及 $f(1)=1$、$f(3)=3$ 得 $f(10)=10$。

再其次，因爲 $1^2+7^2=5^2+5^2$，所以，$f(1^2+7^2)=f(5^2+5^2)$，

$(f(1))^2+(f(7))^2=(f(5))^2+(f(5))^2$。

再由 $f(1)=1$、$f(5)=5$ 及 $f(7)\geq 0$ 得 $f(7)=7$。

因爲 $6^2+8^2=0^2+10^2$，所以，$f(6^2+8^2)=f(0^2+10^2)$，

$(f(6))^2+(f(8))^2=(f(0))^2+(f(10))^2$。

再由 $f(0)=0$、$f(8)=8$、$f(10)=10$ 及 $f(6)\geq 0$ 得 $f(6)=6$。

於是，對每個整數 n，$0\leq n\leq 10$，恆有 $f(n)=n$。

最後，使用歸納法。設 n 爲大於10的整數而且對每個 $m\in N_0$，$m<n$，恆有 $f(m)=m$。

(i) 若 n 爲奇數，設 $n=2k+1$，k 爲整數，$k\geq 5$，則由 $(2k+1)^2+(k-2)^2=(2k-1)^2+(k+2)^2$ 及歸納假設可得 $(f(2k+1))^2=(2k-1)^2+(k+2)^2-(k-2)^2=(2k+1)^2$。

再由 $f(2k+1)\geq 0$ 得 $f(2k+1)=2k+1$。

(ii) 若 n 爲偶數，則 $n=2k+2$，$k\in N$，$k\geq 5$，則由

$(2k+2)^2+(k-4)^2=(2k-2)^2+(k+4)^2$ 及歸納假設可得

$(f(2k+2))^2=(2k-2)^2+(k+4)^2-(k-4)^2=(2k+2)^2$。

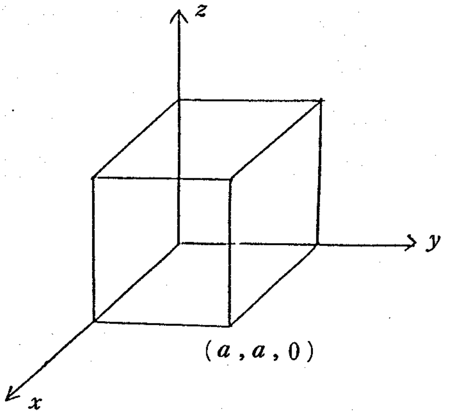
再由 $f(2k+2)\geq 0$ 得 $f(2k+2)=2k+2$。

於是，$f(n)=n$。

依數學歸納法，$f(n)=n$ 對每個 $n\in N_0$ 都成立。

口試(B)

問題 1. 設正立方體的八個頂點為 $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$, $(0,a,a)$, $(a,0,a)$, $(a,a,0)$ 與 (a,a,a)



三角形：

正三角形：例如：以平面 $2x+2y+2z=a$ 截正立方體即可得正三角形。

等腰三角形：$2x+2y+3z=a$

斜三角形：$2x+3y+6z=a$

直角三角形與鈍角三角形都不可能。

若一平面與三軸分別交於 $(u,0,0)$, $(0,v,0)$ 與 $(0,0,w)$，則所成三角形的三邊長分別為 $\sqrt{v^2+w^2}$, $\sqrt{w^2+u^2}$, $\sqrt{u^2+v^2}$，此三數不能做為一直角三角形的三邊長。

四邊形：

正方形：$x=\frac{a}{2}$。

長方形：$x-y=0$。

菱形：$x+4y+z=3a$ 與正立方體各稜相交於 $(0, \frac{3}{4}a, 0)$,

$(a, \frac{a}{2}, 0)$, $(a, \frac{a}{4}, a)$ 與 $(0, \frac{a}{2}, a)$。

注意：$(a, \frac{a}{2}, 0)-(0, \frac{3}{4}a, 0)$ 與 $(0, \frac{a}{2}, a)-(0, \frac{3}{4}a, 0)$ 不垂直。

平行四邊形：$x+12y+3z=7a$ 與正立方體各稜相交於 $(0, \frac{7}{12}a, 0)$,

$(a, \frac{a}{2}, 0)$, $(a, \frac{a}{4}, a)$ 與 $(0, \frac{a}{3}, a)$。

等腰梯形：$x-4y-4z=-a$ 與正立方體各稜相交於 $(0,\frac{a}{4},0)$，

$(0,0,\frac{a}{4})$，$(a,\frac{a}{2},0)$ 與 $(a,0,\frac{a}{2})$。

不等腰梯形：$x-2y-4z=-a$ 與正立方體各稜相交於 $(0,\frac{a}{2},0)$，

$(0,0,\frac{a}{4})$，$(a,a,0)$ 與 $(a,0,\frac{a}{2})$。

五邊形：　$6x+12y+4z=9a$ 與正立方體各稜相交於 $(0,\frac{3}{4}a,0)$，

$(0,\frac{5}{12}a,a)$，$(\frac{5}{6}a,0,a)$，$(a,0,\frac{3}{4}a)$ 與 $(a,\frac{1}{4}a,0)$。

有兩組對邊平行。

六邊形：

正六邊形：$2x+2y+2z=3a$ 與正立方體各稜相交於 $(\frac{a}{2},0,a)$，

$(a,0,\frac{a}{2})$，$(a,\frac{a}{2},0)$，$(\frac{a}{2},a,0)$，$(0,a,\frac{a}{2})$ 與

$(0,\frac{a}{2},a)$。

非正六邊形：$4x+4y+6z=7a$ 與正立方體各稜相交於 $(\frac{a}{4},0,a)$，

$(a,0,\frac{a}{2})$，$(a,\frac{3}{4}a,0)$，$(\frac{3}{4}a,a,0)$，$(0,a,\frac{a}{2})$

與 $(0,\frac{a}{4},a)$。三組對邊都平行。

問題 2.　(1)　點 $(1,1)$ 即爲一例。

(2)　$x^2+y^2=3$ 上沒有有理點。

(3) 設圓 $x^2+y^2=a$ 有一個有理點 (u,v)，其中 u,v 是有理數。可設 $u,v\geq 0$。若 $u=0$，則 $v^2=a$，a 爲有理數。

若 $u\neq 0$，則 $\frac{v}{u}$ 爲有理數，選取二正整數 p,q 使得 $(p,q)=1$ 且 $\frac{v}{u}=\frac{q}{p}$。

因爲 $u^2+v^2=a$，所以，$u^2=\frac{p^2a}{p^2+q^2}$，$v^2=\frac{q^2a}{p^2+q^2}$。由此可知 a 是下述形式：有一個有理數 r 及二互質的正整數 p 與 q，使得 $a=r^2(p^2+q^2)$。

反之，若有一個有理數 r 及二互質的正整數 p 與 q，使得 $a=r^2(p^2+q^2)$，則 (pr,qr) 就是圓 $x^2+y^2=a$ 上的一個有理點。

獨立研究問題

1. 設 α 是 $f(x)=0$ 與 $g(x)=0$ 的一個公根，則由 $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ 可得 $n\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha^n+1=0$ 及 $\alpha^{n+1}-n\alpha+n-1=0$。將前一式乘以 α，得

$$\alpha^{n+1}=\frac{\alpha}{n+1-n\alpha}=n\alpha-n+1\text{。}$$

由 $\alpha=(n+1-n\alpha)(n\alpha-n+1)$ 可得 $n^2\alpha^2-(2n^2-1)\alpha+n^2-1=0$，即

$$(\alpha-1)(n^2\alpha-n^2+1)=0$$

$$\alpha=1 \quad\text{或}\quad \alpha=\frac{n^2-1}{n^2}\text{。}$$

1 顯然是 $f(x)=0$ 及 $g(x)=0$ 的公根。其次，若 $\frac{n^2-1}{n^2}$ 是 $f(x)=0$ 的根，則

$$n(n^2-1)^{n+1}-(n+1)n^2(n^2-1)^n+n^{2n+2}=0\text{。}$$

若 $n>1$，則由上式知 n^2-1 是 n^{2n+2} 的因式。這是不可能的，因爲 n^2-1 與 n 互質。

若 $n=1$，則 $\frac{n^2-1}{n}=0$。但 0 不是 $f(x)=0$ 的根。

因此 $f(x)=0$ 與 $g(x)=0$ 只有一個公根 1。因爲 $g'(1)\neq 0$，所以，1 是 $g(x)=0$ 的單根。於是，$f(x)$ 與 $g(x)$ 的最大公因式是 $x-1$。

2. 首先，$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i}=\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{1+a_i})=n-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}=n-1$。

於是，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}-(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}}=(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+a_j})(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i})-(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_j})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-a_j}{\sqrt{a_i}\,(1+a_j)}$$

$$=\sum_{i>j}(\frac{a_i-a_j}{\sqrt{a_i}\,(1+a_j)}+\frac{a_j-a_i}{\sqrt{a_j}\,(1+a_i)})$$

$$=\sum_{i>j}\frac{(\sqrt{a_i}\sqrt{a_j}-1)(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2(\sqrt{a_i}+\sqrt{a_j})}{\sqrt{a_i}\sqrt{a_j}\,(1+a_i)(1+a_j)}。$$

$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，$i\neq j$，因為

$$1\geq\frac{1}{1+a_i}+\frac{1}{1+a_j}=\frac{2+a_i+a_j}{1+a_i+a_j+a_ia_j}，$$

所以，$a_ia_j\geq 1$。於是，欲證的不等式成立。更進一步地，當 $n>2$ 時，

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}=(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}}\Longleftrightarrow\forall\, i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j,$$

$$(\sqrt{a_i}\sqrt{a_j}-1)(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})=0$$

$\Longleftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$（第二個“$\Longleftrightarrow$”的證明，見(*)）

當 $n=2$ 時，由 $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}=1$ 可得 $a_1a_2=1$，更得

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}。$$

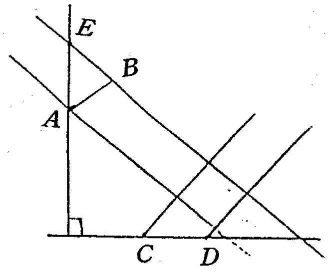
(*) 令 $S=\{i\mid i=2,3,\cdots,n,\ a_i\neq a_1\}$，設 S 有 p 個元素，$n-p=q$。

則 $\forall i\in S$ 可得 $a_1a_i=1$，$a_i=\frac{1}{a_1}$。

因為 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}=1$，所以，$\frac{q}{1+a_1}+\frac{p}{1+\frac{1}{a_1}}=1$，$q+pa_1=1+a_1$。

若 $p\neq 0$，則由 $(q-1)+(p-1)a=0$ 及 $(p-1)a\geq 0$，$q-1\geq 0$ 可得 $q=1$ 且 $p=1$，$n=2$。矛盾。於是，$p=0$，$S=\phi$。

3. 過A作一直線與直線CD垂直，在該垂直線上選出一點E使得$\overline{AE}=\overline{CD}$且$\angle BAE$是銳角，則直線$BE$就是所欲作的四直線之一。證明如下：



因爲直線AB與直線CD不垂直，所以，A，B，E不共線。過A作直線BE的平行線，此平行線是所欲作的另一直線。

此一對平行線間的垂直距離爲

$\overline{AE}\ \sin\angle AEB=\overline{CD}\ \sin\angle AEB$。

另一方面，過C與D分別作直線BE的垂直線，此一對平行線間的垂直距離爲$\overline{CD}\cos(90°-\angle AEB)=\overline{CD}\sin\angle AEB$。

4. 令$k=abc$，則a,b,c爲方程式$x^3-2x^2+x-k=0$的三個實根。

令$f(x)=x^3-2x^2+x-k$，則$f'(x)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$，且

$f''(x)=6x-4$。因爲方程式$f'(x)=0$的解爲1與$\frac{1}{3}$，而$f''(1)=2>0$，

$f''(\frac{1}{3})=-2<0$，所以，$\frac{1}{3}$是f的相對極大點，1是f的相對極小點。因爲

$f(x)=0$有三實根a,b與c，且$(\frac{1}{3},f(\frac{1}{3}))$是$f$的相對極大點，

$(1,f(1))$是f的相對極小點，所以，$f(\frac{1}{3})\geq 0$且$f(1)\leq 0$。由此得

$$\begin{cases}\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-k\geq 0\\ 1-2+1-k\leq 0\end{cases}$$

於是，$0\leq k\leq\frac{4}{27}$。

令$a=1$，$b=1$，$c=0$，則$k=0$。令$a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{3}$，則$k=\frac{4}{27}$。

由此可知：abc的最小值爲0，最大值爲$\frac{4}{27}$。

5.解(一)：首先，選取一個有理數 b ，使得 $a < b < \frac{a}{r}$，則 $br < a < b$ 。

其次，再選取一個有理數 c ，使得 $br < c < a < b$ 。

(1) 對於每個有理數 s，$0 < s < r$ ，令 $x_1(s) = sc$ ， $y_1(s) = b$ ，則

$$0 < x_1(s) = sc < c < a \ , \ y_1(s) = b > a \ ; \ \frac{x_1(s)}{y_1(s)} = s \cdot \frac{c}{b} < s < r \text{ 。}$$

因為滿足 $0 < s < r$ 的有理數 s 有無數多個，所以，有理數 $\frac{x_1(s)}{y_1(s)}$ 也有無數多個。

(2) 對於每個有理數 t ，$\frac{br}{c} < t < 1$ ，令 $x_2(t) = tc$ ， $y_2(t) = b$ ，則

$$0 < x_2(t) = tc < c < a \ , \ y_2(t) = b > a \ ; \ \frac{x_2(t)}{y_2(t)} = \frac{tc}{b} > r \text{ 。}$$

因為滿足 $\frac{br}{c} < t < 1$ 的有理數 t 有無數多個，所以，有理數 $\frac{x_2(t)}{y_2(t)}$ 也有無數多個。

解(二)：對於 $(0, r)$ 中每個有理數 $\frac{n}{m}$，m，n 為正整數。因為 $n < m$，所以 $\frac{a}{m} < \frac{a}{n}$。

任選一個有理數 s ，使 $\frac{a}{m} < s < \frac{a}{n}$。令 $x_1 = ns$ ， $y_1 = ms$ ，

則 $0 < x_1 < a < y_1$ ，且 x_1, y_1 和 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{n}{m}$ 都是有理數。

同法，可得 $\frac{x_2}{y_2}$ 。

6. 設 $x = m + \alpha$ ， $y = n + \beta$ ，其中 $m = [x]$，$n = [y]$。於是，$0 \leq \alpha < 1$ ，$0 \leq \beta < 1$ 。

$$[x] + [2x + 2y] - [2x] - [y] - [x + y]$$
$$= m + 2m + 2n + [2\alpha + 2\beta] - 2m - [2\alpha] - n - m - n - [\alpha + \beta]$$
$$= [2\alpha + 2\beta] - [2\alpha] - [\alpha + \beta]$$

因為 $0 \leq \alpha + \beta < 2$ ，所以，$[\alpha + \beta] = 0$ 或 1 。

若 $[\alpha+\beta]=0$，則因爲 $2\alpha+2\beta\geq 2\alpha$，$[2\alpha+2\beta]\geq[2\alpha]$，所以，

$$[x]+[2x+2y]-[2x]-[y]-[x+y]=[2\alpha+2\beta]-[2\alpha]-[\alpha+\beta]\geq 0$$

若 $[\alpha+\beta]=1$，則 $[2\alpha+2\beta]\geq 2$。因爲 $0\leq 2\alpha<2$，$[2\alpha]\leq 1$，所以，

$$[x]+[2x+2y]-[2x]-[y]-[x+y]=[2\alpha+2\beta]-[2\alpha]-[\alpha+\beta]$$
$$\geq 2-1-1=0。$$

7. 令 $f(x)=x^{2n+1}+(2n-x)(x+1)^{2n}$，則

$$f(x)=x^{2n+1}+(2n+1)(x+1)^{2n}-(x+1)^{2n+1}$$
$$f'(x)=(2n+1)(x^{2n}+2n(x+1)^{2n-1}-(x+1)^{2n})。$$

因爲 $f(-1)=-1<0$ 而 $f(0)=2n>0$，所以，方程式 $f(x)=0$ 必有實根。

只須證明函數 f 爲嚴格遞增，即知 $f(x)=0$ 恰有一實根。

要證明 f 爲嚴格遞增，只須證明 $f'(x)$恆爲正數即可。

(1) $f'(0)=(2n+1)(2n-1)>0$。

(2) 若 $-1\leq x<0$，則 $x^{2n}>0$，$2n(x+1)^{2n-1}-(x+1)^{2n}$

$$=(2n-x-1)(x+1)^{2n-1}\geq 0。$$

所以 $f'(x)>0$。

(3) 若 $x<-1$ 或 $x>0$，則對每個 $r=1,2,\cdots,2n-2$，恆有

$$(x+1)^{2n-r-1}x^r-(x+1)^{2n-r-2}x^{r+1}=(x+1)^{2n-2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^r>0。$$

由此得

$$(x+1)^{2n-1}>(x+1)^{2n-2}x>\cdots>(x+1)x^{2n-2}>x^{2n-1}。$$

於是，

$$(x+1)^{2n}-x^{2n}=(x+1)^{2n-1}+(x+1)^{2n-2}x+\cdots+(x+1)x^{2n-2}+x^{2n-1}$$
$$<2n(x+1)^{2n-1}。$$

或　$x^{2n}+2n(x+1)^{2n-1}-(x+1)^{2n}>0$。

8. 依Ceva定理，$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$，又 $\overline{CE}=\overline{EA}$，得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}}$。

於是　$\overline{DF}\parallel\overline{AC}$。

因爲 $\angle C=45°$，所以 $\triangle ADC$ 是直角等腰三角形，於是，中線 $\overline{DE}$ 與底邊 $\overline{AC}$ 垂直。由此可知，$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}$，$\angle FDE=90°$，$\angle FDC=135°$。又因爲

$\angle DCF = 22.5°$，所以，$\angle CFD = 22.5°$，$\triangle CDF$是等腰三角形，

$\overline{DF} = \overline{CD} = \overline{AD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

對$\triangle DEF$引用畢氏定理，得$\overline{EF} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

因爲$\triangle BDF \sim \triangle BCA$，所以，$\dfrac{\overline{DF}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BD}+\overline{DC}}$。由$\overline{DF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{CA} = 1$

及$\overline{DC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$可解得$\overline{BD} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$，進一步得$\overline{BC} = 1+\sqrt{2}$。 再由畢氏定理得

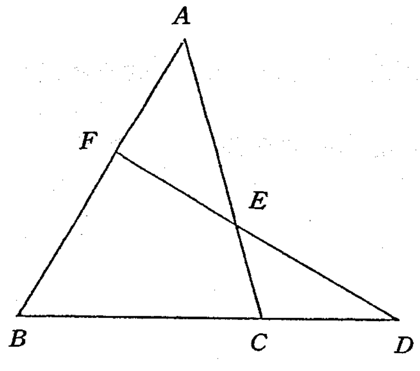
$\overline{AB} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$。最後，因爲 $\tan \angle B = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$。

所以 $\angle B = 22.5°$。

進一步得 $\angle A = 180° - 45° - 22.5° = 112.5°$。

答：$\angle A = \dfrac{5}{8}\pi$，$\angle B = \dfrac{\pi}{8}$，$\overline{AB} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\overline{BC} = 1+\sqrt{2}$。

9. 事實上，$\triangle BDF$的垂心也與其他三垂心共線。此性質的證明由下面二性質立即可得。



(一) 若$\triangle XYZ$的垂心爲H，而直線HX、HY、HZ分別與直線YZ、ZX、XY交於U、V、W，則$\overline{HX} \cdot \overline{HU} = \overline{HY} \cdot \overline{HV} = \overline{HZ} \cdot \overline{HW}$。

(二) 給定兩個不同心的圓，則對兩圓等冪的點構成一直線。

性質一可由Y、Z、V、W四點共圓，Z、X、W、U四點共圓，X、Y、U、V四點共圓立即得出。

性質二中的等冪點構成該二圓的根軸。

在本題中，考慮分別以$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$爲直徑的三個圓，依性質一，$\triangle ABC$、$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$的垂心都對這三個圓等冪。所以，這四個垂心共線。

10. 設$S\subset\{1,2,3,\cdots,2^m n\}$含有$(2^m-1)n+1$個元素。我們將證明：可找一個奇數$k$($1\le k\le n$)，使得$k$乘以2的$m+1$個相異乘冪都屬於$S$。這$m+1$個數即合所求。首先，在$[1,n]$中共含有$[\frac{n+1}{2}]$個奇數。另一方面，在$\{1,2,3,\cdots,2^m n\}$中的那些元素是$2^r a$的形式呢？(其中$a$是奇數且$1\le a\le n$，$r$為非負整數。)$\{1,2,\cdots,n\}$中的每個元素都是此種形式。至於$\{n+1,n+2,\cdots,2^m n\}$中，此種形式的整數恰有$m[\frac{n+1}{2}]$個，其理由如下：設$a$為一奇數且$1\le a\le n$，設$r$為一非負整數且$2^r a\le n<2^{r+1}a$，則$2^{r+1}a,2^{r+2}a,\cdots,2^{m+r}a\in(n,2^m n]$，而$2^r a\le n$，$2^{m+r+1}a>2^m n$。於是，在$\{1,2,3,\cdots,2^m n\}$中屬於$2^r a$之形式的元素共有$n+m[\frac{n+1}{2}]$個，而不屬於此種形式之元素則共有

$2^m n-n-m[\frac{n+1}{2}]$個。

因為S含$(2^m-1)n+1$個元素，所以，S的元素中屬於$2^r a$之形式者至少有

$$\{(2^m-1)n+1\}-\{2^m n-n-m[\frac{n+1}{2}]\}=1+m[\frac{n+1}{2}]\text{個。}$$

因為$\{1,2,\cdots,n\}$中的奇數只有$[\frac{n+1}{2}]$個，所以，依鴿籠原理，$\{1,2,\cdots,n\}$中必有一個奇數k，使得至少有$m+1$個不同的r(r為非負整數)滿足$2^r k\in S$。