

國際物理奧林匹亞試題與解答(七)

傅祖怡 沈青嵩
國立臺灣師範大學物理系

第 15 屆 (1984 年於瑞典斯土納)

1. (a) 考慮一平行平板，其折射率 n 隨以下表面算起的距離 z 而變 (圖 15.1)。

試證明： $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$

式中字母意義見圖 15.1。

- (b) 假定你站在一平坦的大沙漠中，在一定距離之外，你會看到似乎存在一片水面。當你靠近“水面”時，它也後退，以使到水面的距離總保持固定。試解釋此現象。

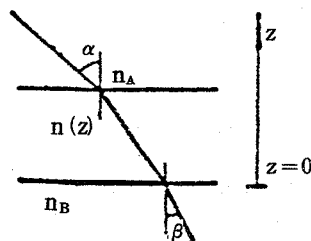


圖 15.1

- (c) 對(b)所描述的現象，試計算地表溫度，假定兩眼離地高度為 1.60 m，至水面的距離為 250 m。空氣在溫度為 15°C 和正常大氣壓時的折射率為 1.000276。假定高度在 1 m 以上的空氣溫度恆為 30°C 。大氣壓為正常氣壓 (0.1013 MPa)。以 n 表示折射率，並假定 $n-1$ 與空氣密度成正比。試討論結果的精確度。

解：(a) 將平行板分割成與平板表面平行的、厚度相等的 k 個薄層。若 k 足夠大，則可設每一薄層的折射率為常數。以 n_i 表第 i 層中的折射率，並令 $n_A = n_0$ ， $n_B = n_{k+1}$ ，則由圖 15.1 (a) 及司乃耳定律得

$$n_i \sin \alpha_i = n_{i+1} \sin \alpha_{i+1}$$

$$\Rightarrow \frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i+1}}$$

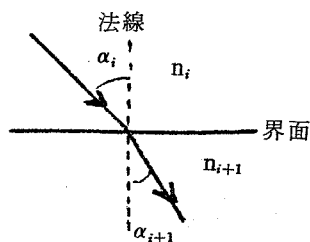


圖 15.1 (a)

$$\begin{aligned} \text{因而 } \frac{n_B}{n_A} &= \frac{n_{k+1}}{n_0} = \frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n_{k-1}} \cdots \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n_0} \\ &= \frac{\sin \alpha_k}{\sin \alpha_{k+1}} \cdot \frac{\sin \alpha_{k-1}}{\sin \alpha_k} \cdots \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} \quad (\text{此處 } \sin \alpha_0 = \sin \alpha, \sin \alpha_{k+1} = \sin \beta) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

故 $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$ 得證。

- (b) 由於太陽輻射及沙地易吸熱的結果，靠近地面的空氣要比眼睛高度處的空氣暖和。熱空氣密度小，相對冷空氣為光疏介質。即靠近地面的空氣折射率較小。從某一距離以足夠小的角度（相對於水平面）向下看時，將發生全反射，此時 $\beta = 90^\circ$ ， $n_B = n_A \sin \alpha$ 。我們會看到像“水”一樣的藍色天空（以為不遠處有水，其實是地平面上藍天的像）。若改變觀察位置，只要溫度不變，“水”也會跟著移動。“水”的距離只和視角有關，而唯有在能發生全反射的角度才能看到此現象，故到水面的距離（對應臨界角視角）總保持固定。
- (c) 依題意作圖 15.1 (b)，設 $t^\circ\text{C}$ 時折射率及空氣密度分別為 n_t, ρ_t ，

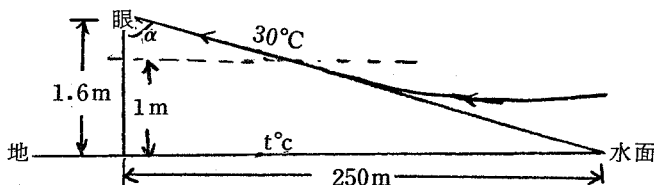


圖 15.1 (b)

$$\text{則 } \begin{cases} n_t - 1 = K\rho_t \\ n_{30} - 1 = K\rho_{30} \\ 1.000276 - 1 = K\rho_{15} \end{cases} \quad \text{①} \quad K \text{ 為比例常數}$$

設 t 表地面溫度。由全反射 $\sin \alpha = \frac{n_B}{n_A} = \frac{n_t}{n_{30}}$

由圖 15.1 (b) $\tan \alpha = \frac{250 \text{ m}}{1.6 \text{ m}} \Rightarrow \alpha = 89.6^\circ$

$$\Rightarrow n_t = \sin(89.6^\circ) n_{30} = 0.9999795 n_{30} \quad \text{②}$$

由理想氣體方程式 $PV = nRT \Rightarrow \rho T = \frac{P}{R} = \text{常數}$

$$\Rightarrow \rho_t (t + 273) = \rho_{30} \times 303 = \rho_{15} \times 288 \quad \text{③}$$

解①、②、③得 $K = 0.000276 / \rho_{15}$

$$\frac{n_t}{n_{30}} = 0.9999795 = \frac{K\rho_t + 1}{K\rho_{30} + 1}$$

$$= \frac{0.000276 \frac{\rho_t}{\rho_{15}} + 1}{0.000276 \frac{\rho_{30}}{\rho_{15}} + 1} = \frac{0.000276 \cdot \frac{288}{(t+273)} + 1}{0.000276 \cdot \frac{288}{303} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{0.079488}{t+273} + 1 = 1.0002418 \Rightarrow t \simeq 55.7^\circ\text{C} \dots\dots\dots \text{Ans}$$

《討論此結果的精確度》：以計算器八位有效數字作運算其精確度應足夠好（誤差小於 0.1°C ），但實際量測上，數據上的 250 m 、 30°C 等均無法正確測定，如此可能使 n 在第五位小數受影響，可能會有攝氏幾度的誤差。

2. 在某些湖泊中能經常觀察到稱之為“湖震”（水的振動）的奇異現象。它通常發生在長且較窄的淺湖中。水的整個質量就像端咖啡待客時杯中的咖啡那樣運動，這不能錯當成湖面所看到的正常水波。

取一個矩形容器製作湖震模型。用 L 表容器長度， h 表水的高度。假定水面最初與水平面夾一很小的角。水開始繞容器一半長度處的水平軸振動，而水面始終保持為平面。

試對水的運動建立一個模型，並求出振動週期 T 的表示式。初始條件在圖 15.2 中給定，設 $d \ll h$ 。

表 15-1

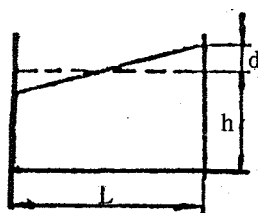


圖 15.2

$L = 479\text{ mm}$		$L = 193\text{ mm}$	
h (mm)	T (s)	h (mm)	T (s)
30	1.78	31	0.52
50	1.40	38	0.48
69	1.18	58	0.43
88	1.08	67	0.35
107	1.00	124	0.28
124	0.91		
142	0.82		

表 15-1 中列出了兩個不同長度的容器中不同水深的振動週期。用適當的方法核查，使實驗數據較好地符合你所求出的公式，並發表你對所用模型的看法。

圖 15.3 表示對瑞典維埃特思湖北端（在巴斯特達楞）和南端（在客柯平）進行測量的結果。這個湖泊長 123 km ，平均深度 50 m 。此情形下的週期是多少？

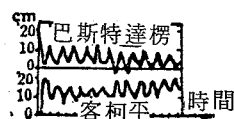


圖 15.3

解：分別用 Δx 和 Δy 表水質心在水平方向和垂直方向上

的位移。在平衡位置由 $\triangle PCA$ 所圍的水運動到振動的終位置 — 由 $\triangle PBD$ 所圍的空間 (見圖 15.4), 水的重心位置 ($\times$ 記號處)

在水平方向移動 $\frac{2}{3}L$, 垂直方向移動 $\frac{2}{3}d$ (由相似 $\triangle$ 法則及重心在中線上位置為距頂點 $\frac{2}{3}$ 中線長得),

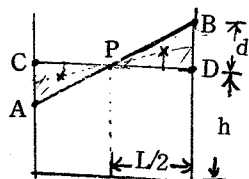


圖 15.4

CPD 為水平面, 產生移動的水質量與總質量之比為

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \cdot d \right)}{L \cdot h} = \frac{d}{4h}$$

故水全部質量的重心相對平衡位置的移動為

$$\Delta x = \frac{d}{4h} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{dL}{6h} \quad (\text{水平方向}) \dots\dots\dots ①$$

$$\Delta y = \frac{d}{4h} \cdot \frac{2d}{3} = \frac{d^2}{6h} \quad (\text{垂直方向}) \dots\dots\dots ②$$

對時間求導函數得質心速度為

$$v_x = \frac{L}{6h} \dot{d}, \quad v_y = \frac{2d}{6h} \dot{d}$$

由 $L \gg h \gg d$ 得 $v_x \gg v_y$ 。即水的運動基本上是水平運動。我們建立一個模型, 此模型忽略鉛垂運動及水相對質心的運動。

(a) 假設水的水平運動是一種簡諧運動, 且參與此運動的水質量 m' 一起運動。

用 v 表水平運動的最大速度, 用 ω 表振動角頻率,

$$\text{則 } v = \Delta x \cdot \omega \quad (\because \text{S.H.M.}) \dots\dots\dots ③$$

(b) 再設水全部質量作水平運動, 由力學能守恆

$$\text{則 } \frac{1}{2} m v^2 = m g \Delta y \quad (\because h \ll L \text{ 此假設合理}) \dots\dots\dots ④$$

式中 m 為水的總質量。

由 ①、②、③、④

$$\text{得 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \Delta x}{v} = \frac{2\pi \Delta x}{\sqrt{2g\Delta y}}$$

$$= \frac{2\pi \frac{dL}{6h}}{\sqrt{2g \frac{d^2}{6h}}} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}} \dots\dots\dots ⑤$$

利用⑤式得到數值結果列於表 15-2

表 15-2

L=479mm		L=143mm	
h(mm)	T(s)	h(mm)	T(s)
30	1.60	31	0.47
40	1.24	38	0.42
69	1.05	58	0.34
88	0.94	67	0.31
107	0.85	124	0.24
124	0.79		
142	0.74		

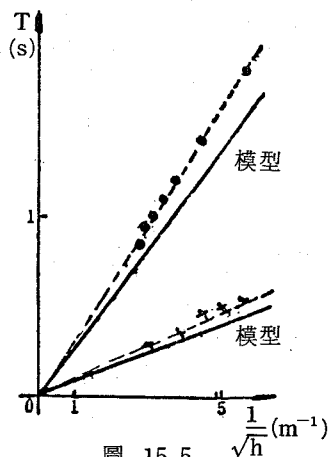


圖 15.5

作 $T - \frac{1}{\sqrt{h}}$ 圖，所有點均在一條斜率為 $\frac{\pi L}{\sqrt{3g}}$ 的直線上，如圖 15.5，和實驗點比較不難發現相當符合，但有 15 % 的系統誤差，故相應修正公式為

$$T = 1.15 \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}} \dots\dots\dots \text{Ans}$$

對維埃特思湖

$$T = 1.15 \cdot \frac{3.14 \cdot 123 \times 10^3}{\sqrt{3 \times 9.8 \times 50}} = 11584 (\text{sec}) \simeq 3.2 (\text{hour})$$

3. 圖 15.6 所示的電子濾波器由 4 個元件組成。輸入阻抗可忽略不計，負載阻抗假定為無限大。現要使濾波器的 U 輸出 / U 輸入與頻率的依賴關係如圖 15.7 所示，圖中 U_i 是輸入電壓， U_o 是輸出電壓；對頻率 f_0 、 U 輸出和 U 輸入間的相位差為零。

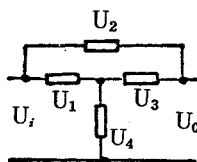


圖 15.6

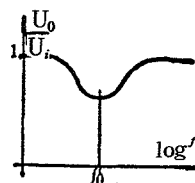


圖 15.7

為組裝此濾波器，可在下列元件中選

取元件：

10 K Ω	電阻器	2 個
10 nF	電容	2 個
160 mH	電感	2 個

(電感是純線圈不含鐵芯，電阻可忽略不計。)

將上述元件中的四個組合起來，設計一滿足圖 15.7 所示條件的濾波器。確定 f_0 及在此頻率下的 $U_{\text{輸出}}/U_{\text{輸入}}$ 比值。盡可能找出更多的組合方式。

解：令 $A(\omega) = U_0/U_i$

則由圖 15.7 知

$$\begin{cases} A(0) = 1 & (\text{直流}) \\ A(\omega \rightarrow \infty) = 1 & (\text{高頻}) \\ 0 \leq A(\omega) \leq 1 & (\text{其它}) \end{cases}$$

且令各元件之電位降如圖 15.6 所標，則

$$\begin{cases} U_i = U_1 + U_4 = U_2 + U_3 + U_4 \\ U_0 = U_3 + U_4 \end{cases}$$

故 $U_i = U_0$ 即 $A = 1$ 發生於 $U_2 = U_4 = 0$ 或 $U_1 = U_3 = 0$ 或 $U_1 = U_3 \rightarrow \infty$ 或 $U_4 \rightarrow \infty$

由 $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$ 得當直流時 $|Z_C| \rightarrow \infty$ ，高頻時 $|Z_C| \rightarrow 0$

$|Z_L| = \omega L$ 得當直流時 $|Z_L| \rightarrow 0$ ，高頻時 $|Z_L| \rightarrow \infty$

故滿足圖 15.7 條件的濾波器可設計為如圖 15.8 之線路。

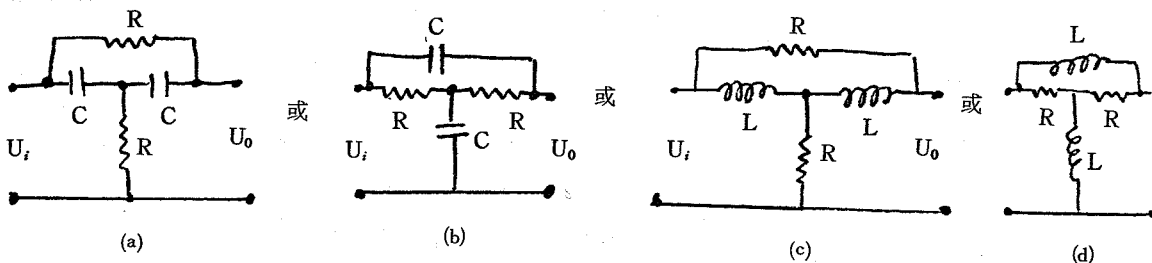


圖 15.8

現以圖 15.8 之(a)為例計算 f_0 及 U_0/U_i 之比值

$$U = IZ$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_L = i\omega L$$

設流經各元件電流如圖 15.9

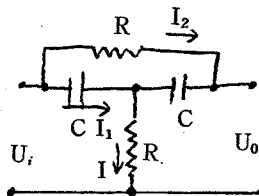


圖 15.9

$$U_i = I_1 Z_c + IR$$

$$U_o = I_2 Z_c + IR$$

$$I = I_1 - I_2, \quad I_2 = \frac{U_o - U_i}{R} = (I_2 - I_1) \frac{Z_c}{R}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\frac{Z_c}{R} I_1}{\frac{Z_c}{R} - 1} = \frac{I_1}{\frac{i\omega C}{1} \left(\frac{1}{i\omega C} - R \right)} = \frac{I_1}{1 - iR\omega C}$$

$$\therefore I_1 = (1 - iR\omega C) I_2 \Rightarrow I = -iR\omega C I_2$$

$$\begin{aligned} \therefore A(\omega) &= \left| \frac{U_o}{U_i} \right| = \left| \frac{\frac{I_2}{i\omega C} - iR^2\omega C I_2}{\frac{(1 - iR\omega C)}{i\omega C} I_2 - iR^2\omega C I_2} \right| \\ &= \left| \frac{1 + R^2\omega^2 C^2}{1 - iR\omega C + R^2\omega^2 C^2} \right| = \frac{1 + R^2\omega^2 C^2}{\sqrt{(1 + R^2\omega^2 C^2)^2 + R^2\omega^2 C^2}} \end{aligned}$$

求 $A(\omega)$ 之極小值

令其一階導函數為零

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + R^2\omega^2 C^2) \frac{2(1 + R^2\omega^2 C^2) \cdot 2R^2 C^2 \omega + 2R^2 C^2 \omega}{2\sqrt{(1 + R^2\omega^2 C^2)^2 + R^2\omega^2 C^2}} - \sqrt{(1 + R^2\omega^2 C^2)^2 + R^2\omega^2 C^2} \cdot 2R^2 C^2 \omega}{(1 + R^2\omega^2 C^2)^2 + R^2\omega^2 C^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{得 } (1 + R^2\omega^2 C^2)^2 2R^2 C^2 \omega + (1 + R^2\omega^2 C^2) R^2 C^2 \omega - [(1 + R^2\omega^2 C^2)^2 + R^2\omega^2 C^2] 2R^2 C^2 \omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$R^2 C^2 \omega + R^4 C^4 \omega^3 - 2R^4 C^4 \omega^3 = R^2 C^2 \omega (1 - R^2 C^2 \omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{當 } \omega = \frac{1}{RC} \text{ 時 } A(\omega) \text{ 有極小值 } \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{求 } \omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-9}} = 10^4 (\text{s}^{-1})$$

$$\text{得 } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 1.6 (\text{kHz})$$

[實驗題 1]

給定以下器材：

- (1) 一台能產生 0.2 kHz 正弦交流電的交流產生器。
- (2) 一台雙線示波器。
- (3) 方格紙。
- (4) 一只二極體。
- (5) $0.1 \mu\text{F}$ 電容一個。
- (6) 一未知電阻值電阻。
- (7) 接線板一塊。
- (8) 導線若干。

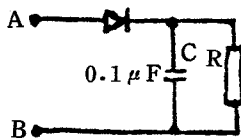


圖 15.10

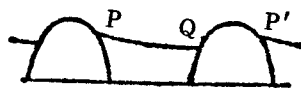


圖 15.11

按圖 15.10 接好電路，與 0.2 kHz 的交流產生器相接，A、B 間的峯對峯電壓為 4.0 V，試由實驗上測定電阻 R 所消耗的平均功率。

作法：按圖接好線路，以示波器觀察電容處電位降，可在示波器螢幕上看到如圖 15.11 的圖形。此圖表明電容充電到 P 點（此點未必是正弦波的峯值！），在 P 點和 Q 點之間電容通過電阻 R 放電，此時無電流通過二極體。

利用放電公式 $U = U_0 e^{-T/RC}$ ，從 P 和 Q 間的圖形可確定 R。

$$\frac{U}{U_0} = e^{-T/RC} \Rightarrow \frac{-T}{RC} = \ln \frac{U}{U_0} \Rightarrow R = T/C \ln \frac{U_0}{U}$$

電壓和時間的值可從示波器的螢光幕上讀出，實驗實際可得 $R = 5.8 \text{ k}\Omega$

故消耗平均功率為 $P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U^2}{R} dt$

$U(t)$ 可從圖上確定。數值積分給出 $P = 0.16 \text{ mW}$

R 的誤差約為 5 ~ 10 %。

[實驗題 2]

給定如下器材：

- (1) 與 220 V 交流相接的氖燈。
- (2) 波長未知的激光器。
- (3) 繞射光柵。
- (4) 透明階梯光柵（1 mm 分成 100 階）（註：多狹縫）
- (5) 米尺。

（下轉第 66 頁）

議廳可提供本校理學院各系教授，本中心討論課程教材教法，也是邀請校內外科教界人士來共商科教大事的場所。

另一邊（西邊）為演講廳，座位八十，準備有最基本但最有效的視聽設備，除影片、影帶、透明片之外，尚可立即放映電腦資料，將電腦螢光幕放大在大銀幕上，可讓觀眾在舒適環境下進行聽講和討論，本演講廳俟裝修完借用辦法訂妥後可供國內外、校內外專家學者來中心專題演講，舉辦各種講習、研習會、專題討論會等。

第四層樓為辦公室，係本中心的業務中心，有教育部科學教育指導委員會的辦公室、中心主任、資料出版組及綜合業務組的辦公室，中心會議室也在這一樓。

第一～三層樓為科學教育研究所的部分，分有教授研究室、研究生的教室與研究室，所務辦公室，以及教學實驗室等設備。

感謝教育部長官及本校前任校長梁尚勇的支持，本校同仁的關愛，在此竣工啓用之時，我們都下決心使本科教大樓能發揮最大的功能，以貢獻我國的科學教育。本大樓並不只屬於本中心每一位同仁，也屬於本校理學院關心科學教育的每一位教授和學生們，也應該成為我國科學教育界各專家學者和熱心科學教育的教師的共同園地。希望大家同心愛護並運用，使它能充分發揮其功能。

（上承第57頁）

(6) 帶夾子的曲臂支架。

氖燈光譜在黃—橙—紅區呈現許多光譜線。在短波端的一條黃色譜線特別強。試測定其波長，並估計測量的精確度。

《說明》1. 如果你碰巧知道激光的波長，此知識不許使用。

2. 簡述怎樣作實驗。報告中寫清實驗步驟，不需要作誤差的正規數學計算，但必須作出估計，分配給每個實驗的時間為1小時50分鐘。

作法：將透明階梯光柵放在激光路徑上，在牆上可得繞射圖形（即使是第三級繞射也能清楚辨識）。激光波長可從公式 $\lambda = d \sin \alpha_n / n$ 算得，式中的 d 在此為 $1/100$ mm， α_n 是與光譜級相應的角度。如此，我們可利用此波長已知的激光來測定繞射光柵的光柵常數（誤差約5～10%）。

然後利用此繞射光柵來測定氖燈的波長。

把繞射光柵放在眼前看氖燈。測氖燈一角與它的黃色繞射像間的距離，可得繞射角，利用上述公式就可求得待測波長，誤差約10%。