1993年亞太數學奧林匹亞試題卷

1993年3月8日

中華民國數學奧林匹亞委員會提供

注意事項：

⑴時間分配：4小時　⑵配分：每題7分，總計35分　⑶不可使用計算器

問題1：

設四邊形$ABCD$的四邊等長且$\angle ABC$為$60°$，直線ℓ通過點D且與四邊形$ABCD$不相交（除了D點之外）；並設直線ℓ與直線AB、BC分別交於E、F，且線段$\overline{CE}$與$\overline{AF}$交於M。試證：$\overline{CA}^2=\overline{CM}\times\overline{CE}$。

問題2：

試求下列函數$f(x)$，當實數x在$0\leq x\leq 100$變動時，所能得到的相異整數值的個數：

$$f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$$

問題3：

設　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

與　$g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$

都是實係數的非零多項式，且有一個實數r使得$g(x)=(x+r)f(x)$；並設a為$\{|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|\}$之元素中最大的數，$c$為$\{|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|\}$之元素中最大的數。試證：$\frac{a}{c}\leq n+1$。

問題4：

試找出所有的正整數n，使得下列方程式有一個整數解：

$$x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0$$

問題5：

設$P_1,P_2,\cdots,P_{1993}=P_0$為$xy$平面上相異的1993個點，且具有下列性質：

(1)　對每個$i=1,2,\cdots,1993$，P_i的坐標x_i,y_i都是整數。

(2)　對每個$i=0,1,\cdots,1992$，線段$\overline{P_iP_{i+1}}$除端點$\overline{P_i,P_{i+1}}$外不含其他具有兩坐標均為整數的點。

證明其中至少有一個i，$0\leq i\leq 1992$，使得線段P_iP_{i+1}上有一點$Q(q_x,q_y)$滿足$2q_x$與$2q_y$都是奇數。