國際物理奧林匹亞試題與解答(六)

傅祖怡　沈青嵩
國立臺灣師範大學物理系

第13屆(1982年於德意志聯邦共和國馬倫特)

1. 螢光燈由50 Hz的交流電源供電，如圖13.1所示。給定如下數據：

電壓　$U = 228.5\ V$

電流　$I = 0.6\ A$

螢光燈兩端分電壓　$U' = 84\ V$

串聯整流器的歐姆電阻　$Rd = 26.3\ \Omega$

計算中可把螢光燈當作一個歐姆電阻。

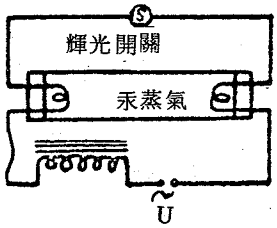


圖　13.1

(a) 計算串聯整流器的電感量。

(b) 計算電壓與電流間的相移。

(c) 計算裝置所傳輸的有效功率 Pw。

(d) 串聯整流器除限制電流外還有另一功能，試說出這功能並解釋之。註：輝光開關S包含一個觸點，開燈後的短時間內該觸點閉合，然後斷開並保持斷開狀態。

(e) 畫出燈管發出的發光通量與時間的關係圖。

(f) 雖然所加交變電壓每隔一定時間總要經過零值，為什麼螢光燈只需啓動一次？

(g) 按製造廠家說明，對這類螢光燈，可將一電容量約為4.7 μF的電容器與整流器串接。這樣做的意圖是什麼？這對螢光燈的工作會有什麼影響？

(h) 用供你使用的分光鏡觀察作演示用的燈管的兩半段。解釋兩種光譜間的差別。

解：(a) 燈光的歐姆電阻為 $\dfrac{84}{0.6} = 140\ (\Omega)$

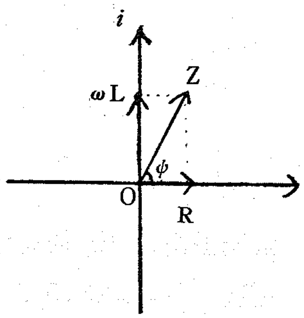
此電路總電阻為 $R = 140 + 26.3 = 166.3\ (\Omega)$

裝置的總阻抗為 $Z = \dfrac{228.5}{0.6} = 380.8\ (\Omega)$，此為電阻阻抗和電感感抗的合效應：$Z = R + |i\omega L|$

故串聯整流器的感抗為 $\omega L=\sqrt{Z^2-R^2}=342.6\,(\Omega)$

所以 $L=\dfrac{342.6}{2\cdot\pi\cdot 50}=1.09\,(H)$ …………… Ans (a)

(b) 電壓與電流間的相移即總阻抗與電阻阻抗的夾角，如圖示相位圖得阻抗角 ϕ。



滿足 $\tan\phi=\dfrac{\omega L}{R}=\dfrac{342.6}{166.3}=2.06$

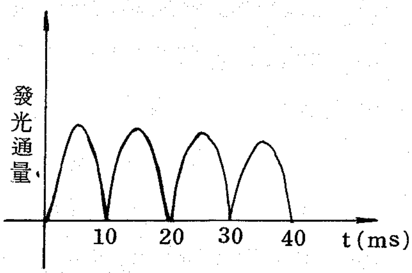
$\phi=64.1°$ ……………… Ans (b)

(c) 電壓和電阻阻抗同相，電流與總阻抗同相和電壓有 ϕ 之相差，故有效功率為

$$P_{\omega}=UI\cos\phi=228.5\times 0.6\times\cos 64.1°$$
$$=59.9\,(W)$$ …………… Ans (c)

(d) 當輝光開關的觸點斷開時，串聯整流器兩端產生很大的感應電動勢，此電動勢足以啓動燈管。而電源供應的電壓U要小於螢光管的啓動電壓。

(e) 電源為 50 Hz 交流，故其週期期為 20 ms，故發光通量隨時間變化圖為：



(f) 因氣體發電後的離子與電子要結合，所需的時間大於每次經過零點的時間。

(g) $4.7\,\mu F$ 電容的容抗為

$\dfrac{1}{\omega c}=(100\pi\times 4.7\times 10^{-6})^{-1}=677.3\,\Omega$ ………與感抗相位相反

故合容感抗為 $677.3-342.6=334.7\,(\Omega)$ ………容性阻抗

裝置的總阻抗為 $Z'=\sqrt{334.7^2+166.3^2}=373.7\,(\Omega)$……與 Z 接近

故螢光燈具有相同的工作特性，同法啓動，唯有阻抗角 ϕ' 與 ϕ 符號相反。在有大量螢光燈的建築物中，這種附加電容器用於補償無功電流，即利用電磁能互相轉換的原理來省電。

(h) 演示螢光燈分塗有螢光粉及未塗螢光粉兩部分。以分光鏡觀察：在未塗螢光粉部分顯示汞的線光譜。而塗有螢光粉部分則顯示連續光譜。當然原來汞的譜線仍存在。而連續光譜的來源是汞光譜的紫外部分被螢光物質吸收後，光

子能量損失，以較低頻率即較長波長重新發射而引起的。

2. 金屬絲衣架可在圖示平面內作小振幅振動（圖13.2）。在位置(a)和(b)的情形，長邊是水平的，另兩邊邊長相等。所有三種情形的振動週期均相同。問質心位於何處？試求出週期。（圖中除尺寸外並未給出關於質量分布的任何信息。）

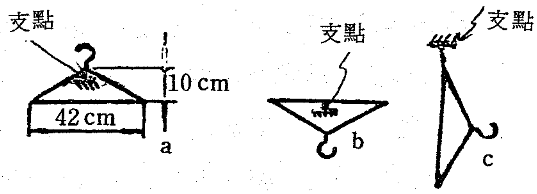


圖　13.2

解：設 S 表支點與質心間距離，I 表相對支點的轉動慣量，θ 爲振動角位移，則其運動方程式爲　$I\ddot{\theta} = -mgS\theta$

對應簡諧振子　$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$，　$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

得振動週期　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgS}}$

若以 I_0 表相對質心的轉動慣量，則由轉動慣量位移定理　$I = I_0 + mS^2$

因此　$mS^2 - \left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 mgS + I_0 = 0$

即得一二次方程式：$S^2 - \left(\dfrac{T^2}{2\pi}\right) gS + \dfrac{I_0}{m} = 0$，S 應有最多二個不同的解。

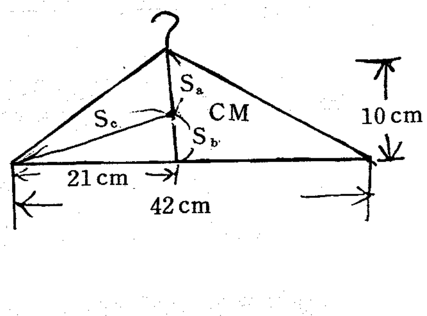
分別以 S_a、S_b、S_c 表在 a、b、c 三種情況下轉軸與質心的距離，其中兩個必相等。如圖示：

$S_c > 21\text{ cm} > S_a + S_b = 10\text{ cm}$

故　$S_a = S_b = 5\text{ cm}$

$S_c = \sqrt{21^2 + 5^2} = 21.5\text{ (cm)}$

是 S 之二解。



由根與係數的關係得

$$S_a + S_c = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$$

故　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{S_a + S_c}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0.265}{9.8}} = 1.03\text{ (s)}$ ……… Ans

3. 有一底部開口的熱氣球，其體積 $V_B = 1.1\,m^3$ 是常數，氣球蒙皮的質量 $m_H = 0.187\,Kg$，其體積可忽略不計。空氣的初始溫度爲 $\theta_1 = 20°C$，正常的外部氣壓爲 $P_0 = 1.013\,bar$，在這些條件下的空氣密度爲 $\rho_1 = 1.2\,kg/m^3$。
(a) 爲使氣球剛好能浮起，氣球內的空氣必須加熱到多高的溫度？
(b) 先把氣球繫牢於地，把內部空氣加熱到穩態溫度 $\theta_3 = 110°C$。當氣球被釋放並開始上升時，其最初的加速度是多少？
(c) 將氣球下部紮緊。在氣球內部的空氣維持穩態溫度 $\theta_3 = 110°C$ 的情形下，氣球在溫度爲 20°C 和地面大氣壓爲 $P_0 = 1.013\,bar$ 的等溫大氣中上升。在這些條件下，求氣球能達到的高度 h。
(d) 在高度 h 處，將氣球從其平衡位置拉離 $\Delta h = 10\,m$，然後釋放。問氣球將作何種運動？

解：(a) 氣球浮起的條件爲浮力≥重力，其中浮力＝氣球體積×排開氣體密度× g。重力＝氣球蒙皮重量＋球內氣體重量，得可浮起之臨界條件：

$$V_B\,\rho_1\,g = m_H\,g + V_B\,\rho_2\,g$$

$$\Rightarrow \quad \rho_2 = 1.2 - \frac{0.187}{1.1} = 1.03\ (kg/m^3)$$

利用氣體狀態方程式 $PV = nRT$，此處 P.V.R 爲常量，$n \propto \rho$

$$\therefore \quad \rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{1.2 \times (20 + 273)}{1.03} = 341\,K = 68°C \cdots Ans$$

(b) 先求所受向上浮力 $F_K = V_B\rho_1 g - m_H g - V_B\rho_3 g = (m_H + V_B\rho_3)a$

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 T_1}{T_3} = \frac{1.2\,(273+20)}{273+110} = 0.92$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{(1.1\times1.2-0.187-1.1\times0.92)9.8}{0.187+1.1\times0.92} \simeq 1\ (m/s^2) \cdots\cdots Ans$$

(c) 氣球上升直到其重量等於浮力爲止，此時

$$\rho_3 V_B + m_H = \rho(h)\,V_B$$

氣球外空氣密度 $\rho(h) = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B} = 0.92 + \frac{0.189}{1.1} = 1.09\ (kg/m^2)$

而大氣密度與高度的關係爲 $\rho(h) = \rho_1 e^{-(\rho_1 g/P_0)h}$

由 $1.09 = 1.2\,e^{-(1.2\times9.8/1.013\times10^5)h} \Rightarrow h = 818\,(m) \cdots\cdots\cdots Ans$

(d) 將氣球拉離平衡位置一小距離，則作用於氣球的力是線性的。結果將使氣球作簡諧振動。若受阻力作用，振動自然會逐漸衰減。

[實驗題1]

給一個對稱雙凸透鏡、一個平面鏡、水、米尺、光學成像物（鉛筆）、支架和直角夾。

(a) 測定透鏡的焦距，其最大誤差爲1％。

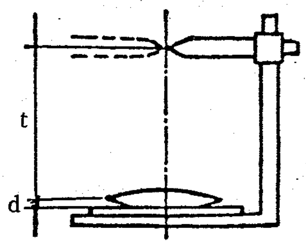
(b) 測定透鏡玻璃的折射率。

水的折射率爲 $n_w = 1.33$，薄透鏡的焦距由下式給定：

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

式中 n 是透鏡材料的折射率，r_1 和 r_2 是透鏡的曲率半徑，對對稱雙凸透鏡，有 $r_1 = -r_2 = r$；對對稱雙凹透鏡，有 $r_1 = -r_2 = -r$。

作法：(a) 將透鏡放置在平面鏡上，並用夾子把鉛筆固定在支架上如圖。透鏡和平面鏡的放置位置使眼睛向下看時看到鉛筆和它的像緊靠在一起。爲能同時看到物和清晰的像，它們須位於相等距離處。此時物距像距相同，因此放大率爲1。移動頭部、物和像的相對位置也不會改變。由於平面鏡的反射，光線兩次通過透鏡。此透鏡系統的焦距爲



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_L} + \frac{1}{f_L}, \quad f = \frac{f_L}{2}$$

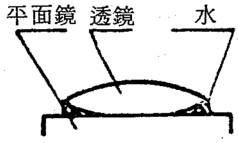
設物距＝像距＝t

則 $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \Rightarrow f_L = t$，故測像（或物）至鏡之距離 t 即得透鏡焦距。

誤差約 1～2 mm。系統誤差由透鏡厚度造成。

(b) 爲求折射率，利用雙凸透鏡的公式：

$$\frac{1}{f_L} = (n-1)\frac{2}{r}$$，其中 f_L 已知，求 r 即可。



透鏡曲率 r 求法，在透鏡與平面鏡間滴水，得一由水構成的平凹透鏡如圖。對此透鏡有

$$\frac{1}{f_w} = -(n_w - 1)\frac{1}{r}$$ ，n_w 爲水折射率

此組合透鏡的焦距可用(a)法求得

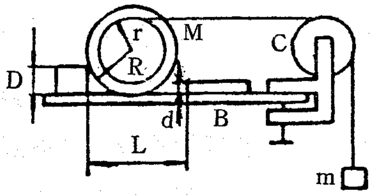
$$f' = t' \quad 而 \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_L} + \frac{1}{f_w}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{t'} - \frac{1}{t} = \frac{(1-n_w)}{r} \Rightarrow r = \frac{(1-n_w)tt'}{t-t'}$$

$$\therefore \quad n = \frac{r}{2t} + 1 = \frac{(1-n_w)t'}{2(t-t')} + 1$$

［實驗題2］

圓柱體的滾動可分解爲繞軸的轉動和質心的水平移動。本實驗裏只有平移加速度和產生這一加速度的力才是直接測定的。所給圓柱體的質量爲M半徑爲R，放置在水平平板上。在離軸距離爲



r_i（$i=1, 2, \cdots, 6$）處、作用力 F_i 作用於圓柱體上（如圖）。放開圓柱體後，它以恆定加速度滾動。

(a) 對不同的距離 r_i（$i=1, 2, \cdots, 6$），從實驗上測定圓柱體軸線的加速度 a_i。

(b) 根據加速度 a_i 和其它已知量計算平板與圓柱體間相互作用的水平力 F_i。

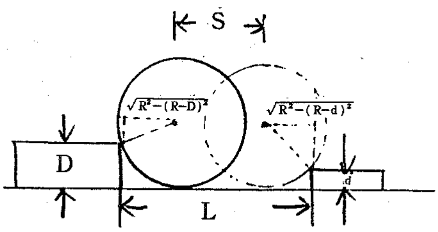
(c) 畫出 F_i 與 r_i 的函數關係曲線，並討論其結果。

(d) 調節平板的水平度，平板不在水平位置將造成什麼影響？

(e) 描述其它一些輔助量的測量方法，以及可能的進一步的調節。指出調節不當對實驗結果產生何種程度的影響。

下列物理量是給定的：

$R = 5.00$ cm	$r_1 = 0.75$ cm
$M = 3.275$ kg	$r_2 = 1.50$ cm
$m = 2 \times 50$ g	$r_3 = 2.25$ cm
$D = 1.50$ cm	$r_4 = 3.00$ cm
$d = 0.1$ m	$r_5 = 3.75$ cm
	$r_6 = 4.50$ cm



（裝置放大圖）

滑輪C的質量和摩擦力可忽略不計。距離用所給的卷尺測量，時間用電子停表測量。

方法：(a)　加速度的求法利用　$S=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a=\frac{2S}{t^2}$，t 由電子停表測之。

S 爲圓柱體允許的位移量，由裝置放大圖得

$$S=L-\sqrt{R^2-(R-D)^2}-\sqrt{R^2-(R-d)^2}$$

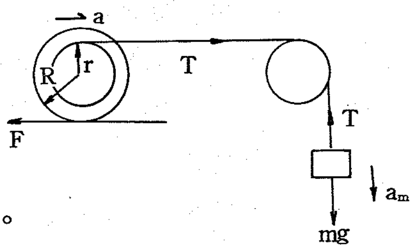
L 爲兩阻礙物間距離，可以卷尺量之，D、d 爲阻礙物高度，已給定。改變不同掛線處 r_i，分別測其 t_i，可分別得 a_i。

(b)　分析力圖得運動方程爲：（設轉動慣量 $I=\frac{1}{2}MR^2$、角加速度 β ）

$$\begin{cases} mg-T=ma_m \\ T-F=Ma \\ I\beta=Tr+FR \\ \beta R=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T=m(g-a_m) \\ T=F+Ma \\ \frac{1}{2}MR^2\beta=Tr+FR \\ \beta R=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad MaR=2(F+Ma)r+2FR$$

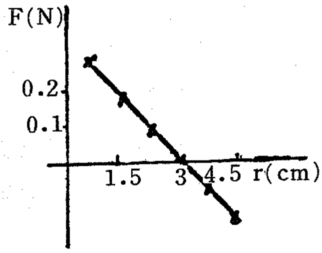
$$\Rightarrow \quad F=\frac{M(R-2r)}{2(r+R)}a$$



代入 a_i，r_i 及給定值 M，R 可逐次得 F_i。

(c)　將測量及計算所得數據列於下，其中以 F_i 和 r_i 作圖得一直線。

r(cm)		t(s)		(t)(s)	a_i(m/s²)	F(N)
0.75	1.81	1.82	1.82	1.816	0.211	0.266
1.50	1.71	1.72	1.73	1.720	0.235	0.181
2.25	1.63	1.63	1.64	1.633	0.261	0.090
3.00	1.56	1.56	1.57	1.563	0.284	0.004
3.75	1.51	1.51	1.52	1.513	0.304	−0.066
4.5	1.46	1.46	1.45	1.452	0.328	−0.154



討論：(1)　F 爲 r 的線性函數。

(2)　摩擦力 F 會改變符號。如果 r 較小，則 F 爲正（和位移方向相反），它是產生角加速度的力。若 r 值接近 R，F 將變爲負（和位移同向），此時力 F 有助於線加速度。

(d)　若平板不在水平位置，即有角度差 α。則必有一力 $Mg\sin\alpha$ 附加到拉力 mg 上。

(e) 實驗中除給定物理量外，尚須測量者爲長度L及時間 t ，調節時使L儘量大，可有較充裕的測量反應時間，L本身測量的相對誤差亦可減小。若測量不準，L將造成一次方的誤差影響， t 較嚴重，將造成二次方的誤差影響。

第14屆（1983年於羅馬尼亞布加勒斯特）

1. 一質點沿正半軸OX運動。圖14.1畫出代作用於質點的力。在原點有一完全反射的牆。同時，摩擦力 $F_f = 1.00$ N 也作用在質點上。質點以 $E_0 = 10.0$ J 的動能從 $x = x_0$ 點出發。

(a) 求質點在最終靜止前所經過的路程長度。

(b) 畫出質點在力場F中的勢能U(x)圖。

(c) 描繪出作爲x函數的速度的定性圖。

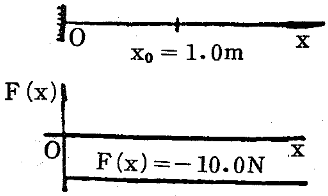


圖 14.1

解：(a) 由圖14.1可見質點受向左 10N之定力作用。對 x>0 上任一點，摩擦力恆小於 F。因此質點只可能在原點達到靜止。運動初期，質點將在原點彈回，然而摩擦力逐漸消耗能量，直到其勢能和動能完全轉換爲克服摩擦力作功，即停止運動。即

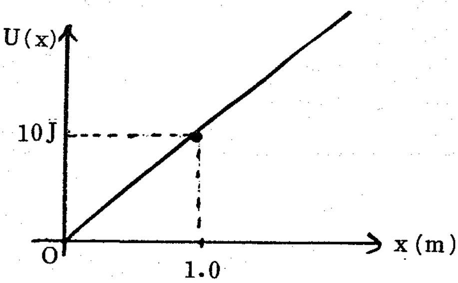
$$F_f S = x_0 F + E_0$$

$$\Rightarrow \text{所經路程長度} \quad S = \frac{1 \times 10 + 10}{1} = 20\ (\text{m}) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ans}$$

(b) $U(x) = -\int F \cdot dx = -F \cdot x + C$

令 $x = 0$ 時 $U(x) = 0 \Rightarrow C = 0$

得勢能 U(x) 圖如右：



(c) 若質點向左運動，則其加速度爲：

$$a_{左} = \frac{10 - 1}{m}$$

$$10\,\text{N} \longleftarrow \overset{\leftarrow}{\bullet} \longrightarrow 1\,\text{N}$$

用 x′ 表示開始運動的那一點，則質點位置和速度的方程如下：

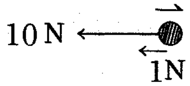
$$x = \frac{1}{2} a t^2 + x' \ ; \quad v = at \ \Rightarrow \ \frac{2(x - x')}{a} = t^2$$

$$\Rightarrow \quad v = a \cdot \sqrt{\frac{2(x-x')}{a}} = \sqrt{2a(x-x')}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{m}(x-x')} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

若質點向右運動

$$a_{右} = \frac{-10-1}{m}$$



用 U′ 表示反彈的質點初速，則質點位置和速度方程如下：

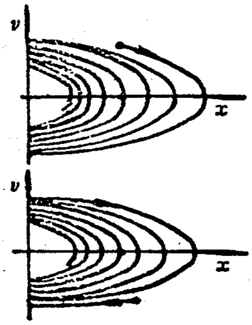
$$x = \frac{1}{2}at^2 + V't \quad ;$$

$$V = V' + at \Rightarrow t = \frac{-V' \pm \sqrt{V'^2 + 2ax}}{a} \qquad (\text{負不合})$$

$$\Rightarrow \quad v = V' + [-V' + \sqrt{V'^2 + 2(\frac{-11}{m})x}\,]$$

$$= \sqrt{V'^2 - \frac{22}{m}x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

式(1)、(2)中顯示 v 函數都具有 $\sqrt{x}$ 的形式，它們代表拋物線。按質點是從 x_0 向左或向右出發，可能有兩種不同的運動。右圖定性地描繪了這兩種情形。



2. 在如圖 14.2 所示的電路中，$L_1 = 10\,mH$，$L_2 = 20\,mH$，$C_1 = 10\,\mu F$，$C_2 = 5\,\mu F$，$R = 100\,k\Omega$。開關 K 長時間閉合。電源的正弦式頻率 f 可改變，但其電流振幅保持恆定。

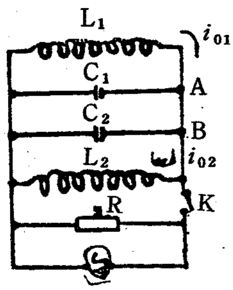


圖 14.2

(a) 以 f_m 表示有效功率為極大值 (P_m)時的頻率，而分別以 f_+ 和 f_- 表示有效功率為 $\frac{1}{2}P_m$ 時的頻率。試決定 f_m 與 $\Delta f = f_+ - f_-$ 的比值。

打開開關 K_0 在打開開關 t_0 時間後，通過 L_1 和 L_2 的電流為 $i_{01} = 0.1\,A$，$i_{02} = 0.2\,A$，電壓為 $U_0 = 40\,V$。

(b) 計算電路 $L_1C_1C_2L_2$ 的固有振盪頻率。

(c) 求導線AB內的電流。

(d) 計算線圈L_1中電流振盪的振幅。

解：(a) 用Z表示電路的等效阻抗。由於是並聯，故

$$\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2$$

式中C為等效電容 $C=C_1+C_2=15\,\mu F$

L為等效電感 $L=\dfrac{L_1L_2}{L_1+L_2}=\dfrac{20}{3}\,mH$

有效功率為 $P=\dfrac{U^2}{R}=\dfrac{I^2Z^2}{R}=\dfrac{I^2}{R}\dfrac{1}{\dfrac{1}{R^2}+\left(C\omega-\dfrac{1}{L\omega}\right)^2}$ ……①

可見，若 $C\omega-\dfrac{1}{L\omega}=0$，則P有極大值 P_{max}

$$\Rightarrow\ f_m=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

由①式亦可見，當$\dfrac{1}{R^2}=\left(C\omega-\dfrac{1}{L\omega}\right)^2$時，$P=\dfrac{1}{2}P_{max}$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow\frac{1}{R}=C\omega_+-\frac{1}{L\omega_+}\Rightarrow\omega_+=\frac{L+\sqrt{L^2+4CLR^2}}{2LCR}\\&-\frac{1}{R}=C\omega_--\frac{1}{L\omega_-}\Rightarrow\omega_-=\frac{-L+\sqrt{L^2+4CLR^2}}{2LCR}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\omega_+-\omega_-=\frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow\ \Delta f=\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi RC}$$

$$\Rightarrow\ \frac{f_m}{\Delta f}=\frac{2\pi RC}{2\pi\sqrt{LC}}=R\sqrt{\frac{C}{L}}=100\times10^3\sqrt{\frac{15\times10^{-6}}{\frac{20}{3}\times10^{-3}}}$$

$$=4.7\times10^3\ \cdots\cdots\cdots \text{Ans}$$

(b) 對所給的數據$L_1C_1=L_2C_2$，電路L_1C_1和L_2C_2以相同頻率獨立振盪。其固有頻率為：

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{100\times10^{-9}}}=503\,(Hz)\cdots\cdots\cdots \text{Ans}$$

(c) 因兩振盪電路是獨立的，因而在支路AB中無交流電流。僅須求直流電流。令 C_1 在 t_0 時流到A的電流爲 i_{C_1} ，而 C_2 流到B的電流爲 i_{C_2} ，則

$$i_{C_1}=C_1\frac{dU}{dt}\quad ;\quad i_{C_2}=C_2\frac{dU}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad i_{C_1}=\frac{C_1}{C_2}i_{C_2}\quad 即\quad i_{C_1}=2i_{C_2}\cdots\cdots\cdots②$$

由柯西荷夫節點定理：

對A點 $i_{AB}=i_{01}+i_{C_1}\cdots\cdots\cdots\cdots③$

對B點 $i_{AB}=-i_{02}-i_{C_2}\cdots\cdots\cdots ④\qquad i_{C_2}=-i_{02}-i_{AB}=\dfrac{i_{C_1}}{2}$

由②、③、④解得 $i_{AB}=\dfrac{i_{01}-2i_{02}}{3}=-0.1\text{A}\cdots\cdots\cdots$ Ans

(d) 以下標 r 表由振盪器振盪形成之電流

得 $i_{01r}=i_{01}-i_{AB}=0.2\text{A}$

由振盪器 L_1C_1 內能量守恆，則

$$L_1\frac{i^2_{1r\max}}{2}=L_1\frac{i^2_{01r}}{2}+C_1\frac{U_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 電流振幅\quad i_{1r\max}=\sqrt{i^2_{01r}+\frac{C_1}{L_1}U_0^2}=\sqrt{0.2^2+\frac{10\times10^{-6}}{10\times10^{-3}}\times40^2}$$

$$=1.28\,(A)\cdots\cdots\cdots \text{Ans}$$

3. 如圖 14.3 所示兩個頂角分別爲 $\angle A_1=60°$ 和 $\angle A_2=30°$ 的稜鏡結合在一起（$\angle C=90°$），折射率由下式給出：

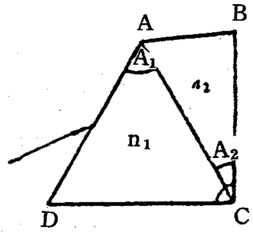


圖 14.3

$$n_1=a_1+\frac{b_1}{\lambda^2}\quad ,\quad n_2=a_2+\frac{b_2}{\lambda^2}$$

其中 $a_1=1.1$; $b_1=10^5\ nm^2$;

$a_2 = 1.3$ ； $b_2 = 5 \times 10^4\ nm^2$

(a) 求使從任何方向入射的光線在經過AC面時不發生折射的波長 λ_0。求此情形的折射率 n_1 和 n_2。

(b) 畫出入射角相同而波長爲 $\lambda_{紅}$、λ_0 和 $\lambda_{藍}$ 的三種不同光線的路徑。

(c) 求組合稜鏡的最小偏向角。

(d) 計算平行於DC入射且在離開組合稜鏡時仍平行於DC的光線的波長。

解：(a) 從任何方向入射皆不折射 $\Rightarrow\ n_1 = n_2$

$$\Rightarrow\ a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2}$$

$$\Rightarrow\ \lambda_0 = \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}} = \sqrt{\frac{-5\times10^{+4}}{-0.2}} = 500\ (nm) \cdots\cdots \text{Ans}$$

此時 $n_1 = 1.1 + \dfrac{10^5}{500^2} = 1.5 = n_2$

(b) $\lambda_{紅} > \lambda_0 = 500\ (nm)$

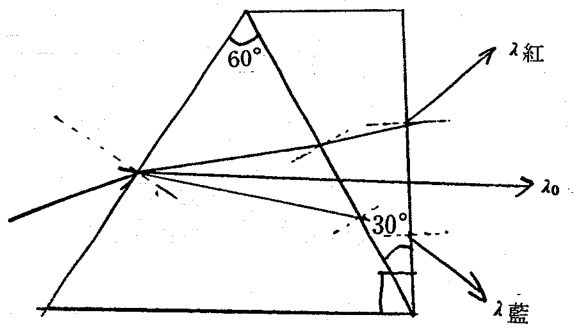
$\Rightarrow$ 對紅光言 n_1，n_2 均小於1.5

且 $\dfrac{n_2}{n_1} > 1$ （$\because\ b_1 > b_2$）

$\lambda_{紫} < \lambda_0$

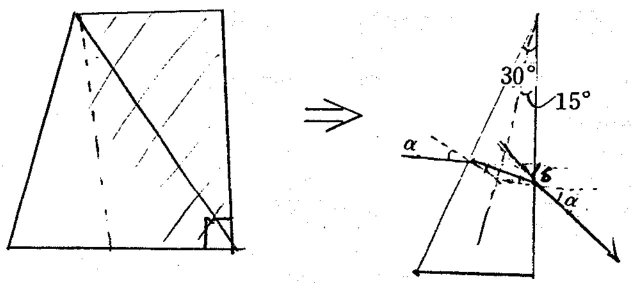
$\Rightarrow$ 對紫光言 n_1，n_2 均大於1.5

且 $\dfrac{n_2}{n_1} < 1$



故可畫出光線穿過稜鏡之路徑分別如右。

(c) 對波長爲 λ_0 的光，因立方塊不起偏向，故可將組合稜鏡視爲頂角 30°，折射率 n=1.5 的單一稜鏡如圖示。



我們知道最小偏向角在對稱折射（即入射角＝出射角）時發生。

$$折射角=\frac{180-(180-30)}{2}=15^\circ$$

又　$2\alpha+(180^\circ-\delta)+180^\circ-30^\circ=360^\circ$

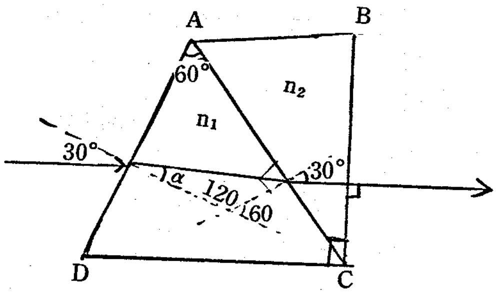
$\delta=2\alpha-30^\circ$

由折射定律

$1\times\sin\alpha=1.5\times\sin 15^\circ \Rightarrow \alpha=22^\circ 50'$

偏向角　$\delta=2\times 22^\circ 50'-30^\circ=15^\circ 40'$ ………… Ans

(d) 依題意作如右圖。



由折射定律

$1\times\sin 30^\circ=n_1\times\sin\alpha$

$n_1\times\sin(60^\circ-\alpha)$

$=n_2\sin 30^\circ$

$\Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{1}{2n_1}$ ，

$n_1(\sin 60^\circ\cos\alpha-\cos 60^\circ\sin\alpha)=\frac{n_2}{2}$

$\Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{4n_1^2-1}}{2n_1}\Rightarrow n_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{4n_1^2-1}}{2n_1}-\frac{1}{2}\frac{1}{2n_1}\right)=\frac{n_2}{2}$

化簡得　$3(4n_1^2-1)=4n_2^2+4n_2+1$

$\Rightarrow\ 3n_1^2=n_2^2+n_2+1$

代入　$n_1=a_1+\frac{b_1}{\lambda^2}$ ，　$n_2=a_2+\frac{b_2}{\lambda^2}$

$$3\left(a_1^2+\frac{2a_1b_1}{\lambda^2}+\frac{b_1^2}{\lambda^4}\right)=a_2^2+\frac{2a_2b_2}{\lambda^2}+\frac{b_2^2}{\lambda^4}+a_2+\frac{b_2}{\lambda^2}+1$$

$\Rightarrow\ (3a_1^2-a_2^2-a_2-1)\lambda^4+(6a_1b_1-2a_2b_2-b_2)\lambda^2+3b_1^2-b_2^2=0$

$\Rightarrow\ -2.78\lambda^4+5.45\times 5\lambda^2+2.75\times 10^{10}=0$

$\Rightarrow\ \lambda^2=\frac{-5.45\times 10^5-\sqrt{(5.45\times 10^5)^2+4\times 2.78\times 2.75\times 10^{10}}}{-2\times 2.78}$　(取＋不合)

$=2.37\times 10^5\Rightarrow\lambda=487\text{ nm}$ ……… Ans

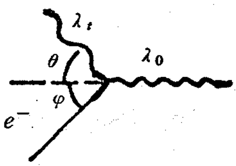
4. 一波長爲 λ_i 的光子與一運動的自由電子碰撞。碰撞的結果使電子變爲靜止，並且波長爲 λ_0 的光子在與原方向的夾角爲 $\theta=60°$ 的方向上前進。此光子與另一靜止的自由電子碰撞，然後以波長爲 $\lambda_f=1.25\times10^{-10}$ m 的光子前進，其方向在碰撞後改變了 60°。計算第一個電子在碰撞前的德布羅依波長。（普朗克常數 $h=6.6\times10^{-34}$ Js，電子質量 $m_e=9.1\times10^{-31}$ kg，光速 $C=3\times10^8$ mls。）

解：對第一次碰撞，用能量守恆定律得

$h\nu_0=h\nu_i+E_e$ ……①　　式中 ν 爲光子頻率，E_e 是電子動能

在波長爲 λ_0 的光子與出射方向及其垂直方向，爲動量守定律（見圖）得

$$\begin{cases} \dfrac{h}{\lambda_0}=\dfrac{h}{\lambda_i}\cos\theta+P_e\cos\phi \\[2ex] 0=\dfrac{h}{\lambda_i}\sin\theta-P_e\sin\phi \end{cases}$$



式中 P_e 爲電子動量

消去 ϕ，並把 λ 改寫成 C/ν 得

$$(h\nu_0)^2+(h\nu_i)^2-2h^2\nu_0\nu_i\cos\theta=P_e^{\,2}C^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

利用相對論
$$\begin{cases} E^2=E_0^2+P_e^2C^2 \Rightarrow P_e^2C^2=E_e(E_e+2m_eC^2) \cdots\cdots ③ \\ E=E_0+E_e \qquad \because\ E_0=m_eC^2 \end{cases}$$

解①、②、③得

$$\nu_0=\frac{\nu_i}{\dfrac{h\nu_1}{m_eC^2}(1-\cos\theta)-1}$$

變換　$\nu=\dfrac{C}{\lambda}$　得　$\lambda_0-\lambda_i=-\dfrac{h}{m_eC}(1-\cos\theta)$ ………④

第二次碰撞爲典型康普頓散射，故

$$\lambda_0-\lambda_f=-\frac{h}{m_eC}(1-\cos\theta) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

比較④、⑤得

$$\lambda_i=\lambda_f=1.25\ \text{Å}$$

由⑤得

$$\lambda_0=1.25-0.0243(1-\cos 60°)=1.25-0.012=1.238\ (\text{Å})$$

由①得 $E_e = hC\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i}\right) = 1.56\times10^{-17}(J)$

由③得 $P_e = 28.4\times10^{-48}$ kg m/s

⇒ 第二個電子的德布羅依波長為

$$\lambda_e = \frac{h}{P_e} = 1.24\ (\text{Å}) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ans}$$

[實驗題]

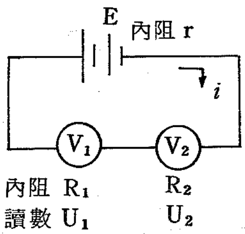
給一電源(電池和電阻器)、兩個伏特計和一個可調電阻器。(伏特計不可測量電流)

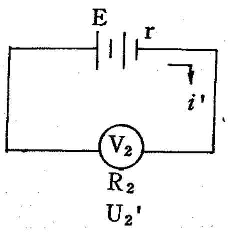
(a) 用數目最少的電路，確定電源電動勢。(不准使用可調電阻)

(b) 用一個伏特計和可調電阻，決定電源電動勢和伏特計內電阻。(不能利用(a)的測量結果)畫圖是可行的，理論圖線為直線，借助它決定待求量。

(c) 指出誤差來源，其中那些對結果的影響最大?

作法:(a) 作如下圖示之兩個電路，並設物理量符號如圖示:





得 $E = ir + iR_1 + iR_2$　　　　$E = i'r + i'R_2$

$U_1 = iR_1$　　　　$U'_2 = i'R_2$

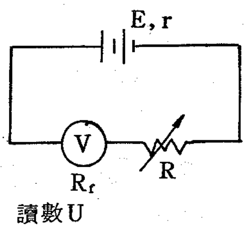
$U_2 = iR_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{U_1}{E} = \dfrac{R_1}{R_1+R_2+r} \\[2ex] \dfrac{U_2}{E} = \dfrac{R_2}{R_1+R_2+r} \\[2ex] \dfrac{U_2'}{E} = \dfrac{R_2}{R_2+r} \end{cases} \Rightarrow \quad E = \frac{U_1U_2'}{U_2' - U_2}$$

故只要連接上兩線路，並讀取伏特計讀數，即可決定電源電動勢。

(b)　再作兩電路如下圖：

①　得 $\dfrac{E}{U}=\dfrac{R_f+R+r}{R_f}$

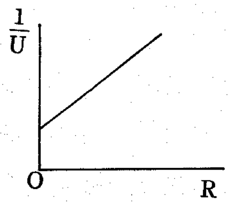


$\Rightarrow \dfrac{1}{U}=\dfrac{R_f+r}{R_f E}+\dfrac{R}{R_f E}$

以 $\dfrac{1}{U}$ 對R作圖得

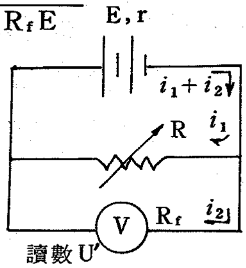
斜率　$m_1=\dfrac{1}{R_f E}$

截距　$b_1=\dfrac{R_f+r}{R_f E}$



②　$i_1=\dfrac{U'}{R}$

$i_2=\dfrac{U'}{R_f}$



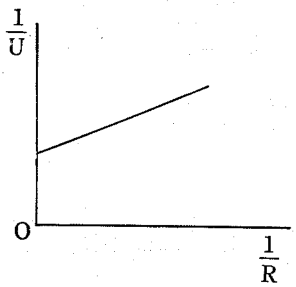
$$E=(i_1+i_2)\left[r+\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_f}}\right]=U'\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_f}\right)\left[r+\frac{RR_f}{R+R_f}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{U'}=\frac{1+\left(\frac{1}{R_f}+\frac{1}{R}\right)r}{E}=\frac{1}{E}+\frac{r}{R_f E}+\frac{1}{R}\left(\frac{r}{E}\right)$$

將 $\dfrac{1}{U}$ 對 $\dfrac{1}{R}$ 作圖得

斜率　$m_2=\dfrac{r}{E}$

截距　$b_2=\dfrac{1+R_f}{R_f E}$



由 $\begin{cases} m_1 = \dfrac{1}{R_f E} & \Rightarrow\ R_f = \dfrac{1}{m_1 E}\ ,\ \ r = m_2 E \\[2ex] m_2 = \dfrac{r}{E} & \\[2ex] b_1 = \dfrac{R_f + r}{R_f E} & b_1 = \dfrac{\dfrac{1}{m_1 E} + m_2 E}{\dfrac{E}{m_1 E}} = \dfrac{1}{E_1} + m_1 m_2 E \end{cases}$

$$\Rightarrow\ m_1 m_2 E^2 - b_1 E + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ E = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4 m_1 m_2}}{2 m_1 m_2}$$

故由作圖所得已知量可求得電源電動勢E，進而求得伏特計內阻

$R_f = \dfrac{1}{m_1 E}$ ，電源內阻 $r = m_2 E$ 。

③ 由以上兩部分實驗的分析可知皆須要以伏特計的讀數為依據。故最主要的誤差來源是伏特計的精確度。若伏特計品質不良，則會產生很大的誤差。