

# 一九九三年亞太數學奧林匹亞研習營

## 模擬競試解答評析

陳昭地

國立臺灣師範大學數學系所

### 一、引言

中華民國數學奧林匹亞委員會根據其既定計畫，於本年二月四日～九日共六天在國立臺灣師範大學理學院舉辦一九九三年亞太數學奧林匹亞研習營。本次研習營的目的，邀請參加對象及課程設計，跟上一屆類似〔陳昭地，民 82 年〕，計有全國二十一所公私立高級中學數學資賦特殊優異學生六十一人參加，包括香港亞太數學奧林匹亞代表張百康教授在內，計有全國三十位大學教授參與專題探討、獨立研究及模擬競試評量指導的工作。正如上一年的研習營，本屆更具有如下的特色：

- (一) 提供前四屆亞太數學奧林匹亞試題及第四屆試題解答成績統計分析。
- (二) 提供國際數學奧林匹亞競賽重要資訊，特別是我國首次參加一九九二年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽實況及績效。
- (三) 提供八個專題探討的主題，提昇學生的數學知識與能力（參見附錄）。
- (四) 提供八個獨立研究的主題，共 28 題，作為個別輔導評量的問題，提昇研究能力。
- (五) 提供二次模擬競試，其試題採用中華民國奧林匹亞試題開發小組研擬設計的問題。
- (六) 專題探討、獨立研究或模擬競試問題之研究心得，成果發表採用分組或集中方式，相互討論，教授指導或評量，增進學生解題能力，及適應國際數學競試。

大體說來，在累積過去二屆的經驗，檢討改進研習內容，使得本屆研習營更能突顯績效，兼具發掘數學資優人才，達到甄選出全國十七所公私立高級中學數學資賦特殊優異學生四十七人參加角逐中華民國參加一九九三年第五屆亞太數學奧林匹亞競賽前十名代表資格。經中華民國數學奧林匹亞委員會評定出本屆之前十名代表，成績相當傑出，仍可望禪聯本屆冠軍，為國爭光。本文主要目的在針對占研習營成績評量比例 80 % 以上的二次模擬競試的成績加以統計分析，並給出試題解答評析，以提供對數學資優學生的教

學輔導之參考。

## 二、模擬競試試題

### 模擬競試(一)

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

1993年2月6日

注意事項：(1)本試卷共5題，每題7分，共35分 (2)競試時間：4小時(8:00～

12:00) (3)計算紙必須連同試卷交回 (4)不可使用計算器

1. 設  $n$  為正整數， $a_n = \sum_{k=1}^n k$ 。證明： $a_n$  可整除  $n!$  的充分必要條件是  $n+1$  不為奇質數。
2. 設  $\overline{AA'}$ ， $\overline{BB'}$ ， $\overline{CC'}$  為一球的三條弦；已知這三條弦交於球內的一點  $P$ ，此三條弦不在同一平面上，且知經過  $A, B, C, P$  的球與經過  $A', B', C', P$  的球相切。  
試證： $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ 。
3. 平面上有 1993 個紅點和 1993 個藍點，其中任意三點都不在一條直線上。證明：可將這些點連成 1993 條端點都是一紅一藍且互不相交的線段。  
(註：同一端點的兩線段視為相交)
4. 試求  $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$  的所有整數解。
5. 設  $a, b, c$  為方程式  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  的三個根。  
證明：(1)  $a, b, c$  互不相等。

$$(2) \frac{a^{1993} - b^{1993}}{a - b} + \frac{b^{1993} - c^{1993}}{b - c} + \frac{c^{1993} - a^{1993}}{c - a} \text{ 之值為整數。}$$

### 模擬競試(二)

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

1993年2月7日

注意事項：(1)本試卷共5題，每題7分，共35分 (2)競試時間：4小時(14:10～

18:10) (3)計算紙必須連同試卷交回 (4)不可使用計算器

6. 當一個正整數用十進制表示後，如果它的位數至少是2位且除了最左邊的數字外，其餘各數字都小於其左邊的數字時，我們把這樣的正整數叫做遞降正整數。試求所有遞降正整數的個數。
7. 在給定的平行四邊形  $ABCD$  中， $U, V$  分別在兩邊  $\overline{AB}$  及  $\overline{CD}$  內部的動點， $\overline{AV}$  與  $\overline{DU}$  交於  $P$ ， $\overline{BV}$  與  $\overline{CU}$  交於  $Q$ 。試決定所有  $U, V$  的可能位置使得四邊形  $PUQV$

的面積為最大。

8. 已知四面體的六條稜長的和不大于  $\sqrt{3}$ 。試證：

這個四面體的四個三角形的面，至少有一個三角形的內切圓的半徑不大于  $\frac{1}{12}$ 。

9. 設  $N$  為全體的自然數集合， $\langle a_n \rangle$  為正整數形成的數列且  $a_n = \lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$ ,

$n \in N$ 。設  $S = \{ a_n \mid n \in N \}$ ，試說明  $S$  是由那些整數所組成的集合。

10. 設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為  $n$  個正整數且  $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ 。

$$\text{證明：} \sum_{k=1}^n (X_k^5 + X_k^7) \geq 2 \left( \sum_{k=1}^n X_k^3 \right)^2$$

並問  $X_1, X_2, \dots, X_n$  各為何值時等號“=”成立？

### 三、模擬競試成績統計

1. 模擬競試(一)成績統計表：(見第 5 頁表 1.1，表 1.2，表 1.3)
2. 模擬競試(二)成績統計表：(見第 6 頁表 2.1，表 2.2，表 2.3)
3. 模擬競試(一)、(二)合併成績統計表：(見第 7 頁表 3.1，表 3.2)

### 四、試題解答與評析

1. 設  $n$  為正整數， $a_n = \sum_{k=1}^n k$ 。證明： $a_n$  可整除  $n!$  的充分必要條件是  $n+1$  不為奇質數。(出自 1992 年加拿大 MO)

[解]  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。  $a_n \mid n! \iff (n+1) \mid 2(n-1)!$

- (1) 當  $n+1 = p$  為奇質數時，則

$$p \nmid 2 \text{ 且 } p \nmid k, 1 \leq k \leq n-1. \text{ 故得 } p \nmid 2(n-1)!$$

- (2) 當  $n+1$  不為奇質數時，則

- (i)  $n+1$  為偶數或 (ii)  $n+1$  為奇數且為合數。

當  $n+1$  為偶數時，設  $n+1 = 2m, m \in N$ 。

$$m = 1 \iff n = 1, (1+1) \mid 2(1-1)!$$

$$m \geq 2 \Rightarrow m = (n+1) - m \leq n-1 \Rightarrow n+1 = 2m \text{ 可整除 } 2(n-1)!$$

表 1.1 模擬競試(一)前十名問題 1 (Q1)~問題 5 (Q5)各題成績統計表

| 名 次 | 編 號    | 性 別 | 年 級 | Q 1 | Q 2 | Q 3 | Q 4 | Q 5 | 總 分 |
|-----|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 82MP10 | 男   | 3   | 6   | 7   | 7   | 1   | 4   | 25  |
| 2   | 82MP01 | 男   | 3   | 6   | 5   | 6   | 1   | 6   | 24  |
| 3   | 82MP04 | 男   | 3   | 3   | 5   | 7   | 1   | 7   | 23  |
| 4   | 82MP02 | 男   | 1   | 3   | 7   | 4   | 0   | 6   | 20  |
| 5   | 82MG19 | 男   | 2   | 4   | 7   | 2   | 1   | 4   | 18  |
| 6   | 81AP04 | 男   | 2   | 7   | 0   | 2   | 2   | 7   | 18  |
| 7   | 82ME06 | 男   | 3   | 6   | 0   | 7   | 2   | 2   | 17  |
| 8   | 82MG25 | 女   | 2   | 2   | 7   | 0   | 2   | 6   | 17  |
| 9   | 82MP07 | 男   | 3   | 6   | 4   | 1   | 1   | 3   | 15  |
| 10  | 82ME03 | 男   | 3   | 1   | 5   | 2   | 1   | 6   | 15  |
| 10  | 82MG15 | 男   | 3   | 3   | 7   | 2   | 1   | 2   | 15  |
| 10  | 82MG23 | 男   | 3   | 1   | 0   | 5   | 2   | 7   | 15  |
| 10  | 81AP07 | 男   | 3   | 4   | 6   | 1   | 1   | 3   | 15  |

表 1.2 模擬競試(一)前十名成績統計表

| 題 目 | 前 10 名 | 最 低 分 | 最 高 分 | 平 均 值 | 標 準 差 |
|-----|--------|-------|-------|-------|-------|
| Q 1 | 10     | 1.00  | 7.00  | 4.40  | 2.07  |
| Q 2 | 10     | 0.00  | 7.00  | 4.70  | 2.71  |
| Q 3 | 10     | 0.00  | 7.00  | 3.80  | 2.74  |
| Q 4 | 10     | 0.00  | 2.00  | 1.20  | 0.63  |
| Q 5 | 10     | 2.00  | 7.00  | 5.10  | 1.73  |
| 總 和 | 10     | 15.00 | 25.00 | 19.20 | 3.65  |

表 1.3 模擬競試(一)全體成績統計表

| 總人數 | 問題  | 零分 | 1分 | 2分 | 3分 | 4分 | 5分 | 6分 | 7分 | 平均值  | 標準差  | 得分率  | 鑑別指數 |
|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|------|------|------|
| 61  | Q 1 | 7  | 6  | 12 | 19 | 4  | 3  | 7  | 3  | 2.97 | 1.94 | 0.42 | 0.36 |
|     | Q 2 | 37 | 2  | 4  | 1  | 2  | 5  | 1  | 9  | 1.89 | 2.72 | 0.27 | 0.65 |
|     | Q 3 | 14 | 28 | 13 | 0  | 1  | 1  | 1  | 3  | 1.48 | 1.69 | 0.21 | 0.33 |
|     | Q 4 | 7  | 40 | 13 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1.13 | 0.62 | 0.16 | 0.06 |
|     | Q 5 | 12 | 1  | 26 | 6  | 6  | 0  | 5  | 5  | 2.62 | 2.08 | 0.37 | 0.50 |

表2.1 模擬競試(二)前十名問題6(Q6)~問題10(Q10)各題成績統計表

| 名次 | 編號      | 性別 | 年級 | Q 6 | Q 7 | Q 8 | Q 9 | Q10 | 總和 |
|----|---------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| 1  | 82ME 03 | 男  | 3  | 7   | 7   | 7   | 7   | 7   | 35 |
| 2  | 82MP 01 | 男  | 3  | 7   | 7   | 7   | 6   | 7   | 34 |
| 3  | 82MP 07 | 男  | 3  | 7   | 7   | 7   | 6   | 7   | 34 |
| 4  | 82MP 10 | 男  | 3  | 7   | 7   | 7   | 5   | 7   | 33 |
| 5  | 81AP 04 | 男  | 2  | 7   | 7   | 7   | 6   | 5   | 32 |
| 6  | 82MG 05 | 女  | 2  | 7   | 7   | 7   | 6   | 2   | 29 |
| 7  | 82MP 04 | 男  | 3  | 7   | 7   | 7   | 6   | 1   | 28 |
| 8  | 82MG 23 | 男  | 3  | 7   | 5   | 5   | 2   | 7   | 26 |
| 9  | 81AP 07 | 男  | 3  | 7   | 2   | 7   | 3   | 7   | 26 |
| 10 | 82MP 02 | 男  | 1  | 7   | 7   | 7   | 3   | 0   | 24 |

表2.2 模擬競試(二)前十名成績統計表

| 題目  | 前十名 | 最低分   | 最高分   | 平均值   | 標準差  |
|-----|-----|-------|-------|-------|------|
| Q 6 | 10  | 7.00  | 7.00  | 7.00  | 0.00 |
| Q 7 | 10  | 2.00  | 7.00  | 6.30  | 1.64 |
| Q 8 | 10  | 5.00  | 7.00  | 6.80  | 0.63 |
| Q 9 | 10  | 2.00  | 7.00  | 5.00  | 1.70 |
| Q10 | 10  | 0.00  | 7.00  | 5.00  | 2.87 |
| 總和  | 10  | 24.00 | 35.00 | 30.10 | 3.98 |

表2.3 模擬競試(二)全體成績統計表

| 總人數 | 問題  | 零分 | 1分 | 2分 | 3分 | 4分 | 5分 | 6分 | 7分 | 平均值  | 標準差  | 得分率  | 鑑別指數 |
|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|------|------|------|
| 61  | Q 6 | 5  | 3  | 1  | 2  | 0  | 2  | 10 | 38 | 5.69 | 2.32 | 0.81 | 0.50 |
|     | Q 7 | 19 | 15 | 6  | 0  | 1  | 1  | 0  | 19 | 2.77 | 3.01 | 0.40 | 0.86 |
|     | Q 8 | 23 | 2  | 7  | 1  | 9  | 5  | 0  | 14 | 2.92 | 2.81 | 0.42 | 0.64 |
|     | Q 9 | 14 | 7  | 20 | 7  | 4  | 1  | 7  | 1  | 2.26 | 1.95 | 0.32 | 0.45 |
|     | Q10 | 20 | 21 | 8  | 1  | 0  | 1  | 2  | 8  | 1.85 | 2.39 | 0.26 | 0.47 |

表 3.1 模擬競試(一)、(二)合併前十名問題 1(Q1)~問題 10(Q10)各題成績統計表

| 名次 | 編號      | 性別 | 年級 | Q 1 | Q 2 | Q 3 | Q 4 | Q 5 | Q 6 | Q 7 | Q 8 | Q 9 | Q 10 | 總分 |
|----|---------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|----|
| 1  | 82MP 01 | 男  | 3  | 6   | 5   | 6   | 1   | 6   | 7   | 7   | 7   | 6   | 7    | 58 |
| 2  | 82MP 10 | 男  | 3  | 6   | 7   | 7   | 1   | 4   | 7   | 7   | 7   | 5   | 7    | 58 |
| 3  | 82MP 04 | 男  | 3  | 3   | 5   | 7   | 1   | 7   | 7   | 7   | 7   | 6   | 1    | 51 |
| 4  | 82ME 03 | 男  | 3  | 1   | 5   | 2   | 1   | 6   | 7   | 7   | 7   | 7   | 7    | 50 |
| 5  | 81AP 04 | 男  | 2  | 7   | 0   | 2   | 2   | 7   | 7   | 7   | 7   | 6   | 5    | 50 |
| 6  | 82MP 07 | 男  | 3  | 6   | 4   | 1   | 1   | 3   | 7   | 7   | 7   | 6   | 7    | 49 |
| 7  | 82MP 02 | 男  | 1  | 3   | 7   | 4   | 0   | 6   | 7   | 7   | 7   | 3   | 0    | 44 |
| 8  | 82MG 23 | 男  | 3  | 1   | 0   | 5   | 2   | 7   | 7   | 5   | 5   | 2   | 7    | 41 |
| 9  | 81AP 07 | 男  | 3  | 4   | 6   | 1   | 1   | 3   | 7   | 2   | 7   | 3   | 7    | 41 |
| 10 | 82ME 06 | 男  | 3  | 6   | 0   | 7   | 2   | 2   | 7   | 7   | 4   | 1   | 2    | 38 |

表 3.2 模擬競試(一)、(二)合併前十名成績統計表

| 題目   | 總分前十名 | 最低分   | 最高分   | 平均值   | 標準差  |
|------|-------|-------|-------|-------|------|
| Q 1  | 10    | 1.00  | 7.00  | 4.30  | 2.21 |
| Q 2  | 10    | 0.00  | 7.00  | 3.90  | 2.85 |
| Q 3  | 10    | 1.00  | 7.00  | 4.20  | 2.53 |
| Q 4  | 10    | 0.00  | 2.00  | 1.20  | 0.63 |
| Q 5  | 10    | 2.00  | 7.00  | 5.10  | 1.91 |
| Q 6  | 10    | 7.00  | 7.00  | 7.00  | 0.00 |
| Q 7  | 10    | 2.00  | 7.00  | 6.30  | 1.64 |
| Q 8  | 10    | 4.00  | 7.00  | 6.50  | 1.08 |
| Q 9  | 10    | 1.00  | 7.00  | 4.50  | 2.07 |
| Q 10 | 10    | 0.00  | 7.00  | 5.00  | 2.87 |
| 總分   | 10    | 38.00 | 58.00 | 48.00 | 6.93 |

當  $n+1$  為奇數且為合數時，則  $(n+1) \geq 9$ ；可令  $n+1 = qr$ ；

其中  $q, r \in N$ ， $3 \leq q \leq r \leq \frac{1}{3}(n+1)$ 。

$$\therefore 3 \leq q < 2r \leq (n-1) \Rightarrow (q \times 2r) \mid (n-1)!$$

$$\therefore n+1 = qr \text{ 可整除 } 2(n-1)!$$

合併(1)、(2)證畢。

評析：

- (1) 本題在競試(一)五道題屬最簡易的題目，全體得分率為 0.42，但僅有 3 位得滿分，仍有 7 位得零分，在總分前十名學生中僅有 1 位得 7 分，顯示答題表達品質有待加強訓練。

(2) 解題主要概念：

- $\frac{n(n+1)}{2} \mid n! \Leftrightarrow (n+1) \mid 2(n-1)!$ 。
- $n+1$  為奇質數， $n+1$  不為  $2(n-1)!$  的因數。
- $n+1$  為偶數時， $n+1 \mid 2(n-1)!$ 。
- $n+1$  為奇數且為合數時，令  $n+1 = qr$ ， $3 \leq q \leq r$ ， $3 \leq q < 2r \leq n-1$  得  $qr \mid 2(n-1)!$ 。

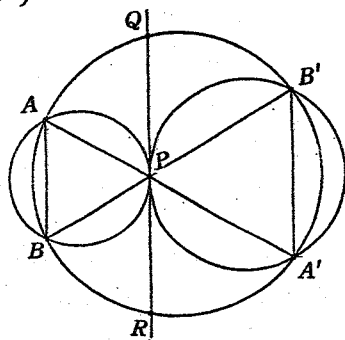
(3) 討論：

- ① 一些學生將  $(n+1) \mid 2(n-1)!$  寫成  $\frac{n+1}{2} \mid (n-1)!$ ，但  $\frac{n+1}{2}$  可能不是整數。
- ② 大多數學生都在  $n+1$  為奇合數時，無法解說清楚 “ $3 \leq q < 2r \leq n-1$ ”，而就得到結論，這是本題的重點。

2. 設  $\overline{AA'}$ ， $\overline{BB'}$ ， $\overline{CC'}$  為一球的三條弦；已知這三條弦交於球內的一點  $P$ ，此三條弦不在同一平面上，且知經過  $A, B, C, P$  的球與經過  $A', B', C', P$  的球相切。  
試證： $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$  (出自 1992 美國 MO)

[證明] (一) 先證  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$

- (1) 三個球在  $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$  相交線段所決定的平面交出三個圓，如圖所示。其中  $\overleftrightarrow{QR}$  為經由  $P$  點兩小圓的公切線， $Q$ 、 $R$  為其與大圓的交點。



- (2)  $\angle ABP = \angle APQ$  (弦切角)， $\angle A'B'P = \angle A'PR$  (弦切角)

- (3)  $\angle A'B'P = \angle BAP$  (大圓  $\widehat{BRA'}$  弧上的圓周角)

(4) 由(2)、(3)得  $\angle ABP = \angle BAP$

$\therefore \triangle ABP$  為等腰三角形  $\therefore \overline{AP} = \overline{BP}$

(5) 同理： $\overline{A'P} = \overline{B'P}$ 。

(6) 由(4)、(5)得  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ 。

(二) 同理可證  $\overline{BB'} = \overline{CC'}$ 。

(三) 綜合(一)、(二)得證  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ 。

評析：

- (1) 本題是競試(一)五道題中得0分與7分都是最多的一道題，高達37位(占61%)得0分，鑑別指數很高。
- (2) 本題基本上是屬於圓的幾何，但因以球的形式呈現，我們的學生透視立體幾何的能力較弱，無法有效掌握解題途徑。
- (3) 解題主要概念：
  - 弦切角性質。
  - 同弧上的圓周角相等。
- (4) 討論：
  - ① 本題亦可先證  $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$  而得出  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ， $ABA'B'$  為梯形，故為等腰梯形(圓內接梯形必為等腰梯形)，從而得到  $\overline{AP} = \overline{BP}$ ， $\overline{B'P} = \overline{A'P}$ ，而證出  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ 。
  - ② 平面幾何的證題技術是我們輔導數學資優生參加國際數學競賽應加強訓練的一項主題。

3. 平面上有1993個紅點和1993個藍點，其中任意三點都不在一條直線上。

證明：可將這些點連成1993條端點都是一紅一藍且互不相交的線段。

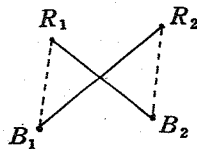
(註：同一端點的兩線段視為相交)出自大陸奧林匹亞訓練教材改編

[解1] (1) 隨意地將這  $2 \times 1993$  個點分別一紅一藍地連成1993條線段，其連法總共只有有限個方法。

(2) 上面的每一種連法都可求得1993條線段之長度和  $S$ 。

(3) 不同的連法其長度和  $S$  也可能不同，但這總共有限個連法，對應的有限個長度和中必有一個最小值  $S_0$ 。

(4) 達到最小值  $S_0$  的連法，其  $n$  條線段必互不相交，理由如下：





若有兩條線段  $\overline{R_1B_2}$  與  $\overline{R_2B_1}$  相交，用  $\overline{R_1B_1}$ ， $\overline{R_2B_2}$  取代，其餘不變之連法，長度和更小，此為不可能。

(5) 如(1)中 1993 條線段互不相交者必存在，故得證。

評析：

- (1) 本題只有 3 位同學得到 7 分（滿分），且都使用數學歸納法，基本上在歸納過程都須考慮周詳，容易出錯而遭到扣分。
- (2) 本題上述解法基本上是離散數學的技術，透過直觀的分析而得到證明，具有思路簡潔，且易於理解的特色。
- (3) 解題主要概念：
  - 有限個條總長中，必有一種方法是最短。
  - 數學歸納法 + 周詳討論。

4. 試求  $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$  的所有整數解。

（試題開發小組趙文敏教授設計）

[解] 將右端配方，得  $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2y + 1)^2$ 。於是，左端的  $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$  是完全平方數。顯然地，

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 &= (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 1 \\ &= (2x^2 + x + 1)^2 - x^2 + 2x \end{aligned}$$

當  $x < -1$  或  $x > -\frac{1}{3}$  時，恆有  $3x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(3x + 1) > 0$ ，

所以，當  $x < -1$  或  $x > -\frac{1}{3}$  時， $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 > (2x^2 + x)^2$

恆成立。另一方面，當  $x > 2$  或  $x < 0$  時，恆有  $-x^2 + 2x < 0$ 。所以，

當  $x > 2$  或  $x < 0$  時，可得  $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < (2x^2 + x + 1)^2$ 。

將上述二結果合併，可得：當  $x > 2$  或  $x < -1$  時，恆有

$$(2x^2 + x)^2 < 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < (2x^2 + x + 1)^2。$$

當  $x > 2$  或  $x < -1$ ，而且  $x$  是整數時，因為  $(2x^2 + x)^2$  與  $(2x^2 + x + 1)^2$  之間沒有任何完全平方數，所以， $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$  不是完全平方數，於是，不定方程式  $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$  的整數解中的  $x$  只有  $-1, 0, 1$  與  $2$  四種可能。

當  $x = -1$  時，得  $y^2 + y = 0$ ，所以， $y = 0$  或  $-1$ 。

當  $x = 0$  時，得  $y^2 + y = 0$ ，所以， $y = 0$  或  $-1$ 。

當  $x = 1$  時，得  $y^2 + y = 4$ ，所以，此時  $y$  沒有整數解。

當  $x = 2$  時，得  $y^2 + y = 30$ ，所以， $y = 5$  或  $-6$ 。

結論：共有六組解： $(x, y) = (-1, 0)$  或  $(-1, -1)$  或  $(0, 0)$  或  $(0, -1)$  或  $(2, 5)$  或  $(2, -6)$ 。

評析：

- (1) 學生幾乎只能猜到  $(-1, 0)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, -1)$  的四組解而得到 1 分，全體 61 位平均值僅得 1.13 分，前十名學生之平均值亦僅有 1.20 分，鑑別指數頗低。
- (2) 本題跟中學數學教材之相關性較低，學生缺乏這方面的解題訓練。
- (3) 解題主要概念：
  - 配方技術的應用。
  - 找出其中的一個未知數的有限範圍，進而找出所有的解。

5. 設  $a, b, c$  為方程式  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  的三個根。

證明：(1)  $a, b, c$  互不相等。

$$(2) \frac{a^{1993} - b^{1993}}{a - b} + \frac{b^{1993} - c^{1993}}{b - c} + \frac{c^{1993} - a^{1993}}{c - a} \text{ 之值為整數。}$$

(出自大陸奧林匹亞訓練教材，蘇淳(1992))

[證明] (1) [證法一]  $a + b + c = 1$ ,  $ab + bc + ca = -1$ ,  $abc = 1$

$$\text{若 } a = b, \text{ 則得 } \begin{cases} 2a + c = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a^2 + 2ac = -1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ a^2c = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

解①, ②得  $a = 1, c = -1$  或  $a = -\frac{1}{3}, c = \frac{5}{3}$  代入③都不合，

所以  $a \neq b$ 。同理  $b \neq c, c \neq a$ 。

故得證  $a, b, c$  互不相等。

[證法二] 令  $g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ ,  $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 。

$$g'(x) = 0 \iff (3x + 1)(x - 1) = 0 \iff x = 1 \text{ 或 } x = -\frac{1}{3}。$$

但  $g(1) \neq 0$ ,  $g(-\frac{1}{3}) \neq 0$ , 故知  $g(x) = 0$  沒有重根。

$\therefore g(x) = 0$  的三根  $a, b, c$  互不相等。

(2) 令  $A_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} + \frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a}$ ,  $n$  是非負整數。

注意  $a, b, c$  都不為 0。

$$A_0 = 0, A_1 = 3, A_2 = 2(a + b + c) = 2。$$

故知  $n = 0, 1, 2, A_n$  都是整數。

設  $A_{k-2}, A_{k-1}, A_k$  都是整數 ( $k \geq 2$ ),

則由  $a^3 = a^2 + a + 1, b^3 = b^2 + b + 1, c^3 = c^2 + c + 1$ ,

$$\text{得} \quad a^{k+1} = a^k + a^{k-1} + a^{k-2}$$

$$b^{k+1} = b^k + b^{k-1} + b^{k-2}$$

$$c^{k+1} = c^k + c^{k-1} + c^{k-2}$$

所以  $A_{k+1} = A_k + A_{k-1} + A_{k-2} \Rightarrow A_{k+1}$  也是整數

$\therefore$  當  $n$  是非負整數時,  $A_n$  恆為整數。

特別  $A_{1993}$  之值為整數, 故得證(2)式之值為整數。

評析：

(1) 本題與高一基礎數學及本次研習營之 數學歸納法的應用技術 專題相關性頗密切, 全體平均值 2.62, 得分率 0.37, 前十名平均值高達 5.10, 鑑別指數 0.50, 均堪稱理想。

(2) 解題主要概念：

- 根與係數之關係。
- 歸謬證題法。
- 數學歸納法或綜合除法 (見下面的討論)。

(3) 討論：

① 本題將第 2 個結論一般化, 並用數學歸納法加以證明, 此技術為數學歸納法功效發揮到極致的實例。

② 私立黎明高中陳建州於成果發表時給出結論(2)的簡潔證明法：

(i)  $A_0 = 0, A_1 = 3, A_2 = 2。$

(ii) 由綜合除法知：有一整係數多項式  $Q(x)$  及 3 個整數  $\alpha, \beta, \gamma$  使得

$$x^{1993} = (x^3 - x^2 - x - 1)Q(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

故得原式 =  $\alpha A_2 + \beta A_1 + \gamma A_0 = 3\alpha + \beta$  為整數。

6. 當一個正整數用十進制表示後，如果它的位數至少是 2 位且除了最左邊的數字外，其餘各數字都小於其左邊的數字時，我們把這樣的正整數叫做遞降正整數。試求所有遞降正整數的個數。（1992 年全美高中邀請賽改編）

[解 1] 一個遞降正整數  $n$  的數字集合為  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  之子集合且其數字個數至少為 2。每一個  $A$  之元素個數至少為 2 的子集合，將其數字由大而小排列，恰好對應出一個遞降正整數。

因此遞降正整數的個數為

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_{10} + {}_{10}C_9 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_6 + \cdots + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 \\ &= \left( \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \right) - ({}_{10}C_1 + {}_{10}C_0) = 2^{10} - (10 + 1) = 1013 \end{aligned}$$

[解 2] 袁新盛的解法：

設最左邊的數字為  $a$

|     |       |       |          |   |   |
|-----|-------|-------|----------|---|---|
| $a$ | $a-1$ | $a-2$ | $\cdots$ | 1 | 0 |
|     |       | √     |          |   | √ |

上圖“√”表  $a$  後有此數字，未打“√”表無此數字。則每個比  $a$  小的數字可能出現亦可能不出現。故以  $a$  為最左邊的遞降正整數個數有  $2^a - 1$  個。但  $a = 1, 2, 3, \cdots, 9$ ，故遞降正整數個數共有

$$\sum_{a=1}^9 (2^a - 1) = 2^{10} - 11 = 1013 \text{ (個)}.$$

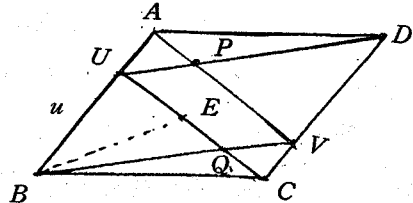
評析：

- (1) 本題為高二基礎數學組合總數的問題，全體平均值高達 5.69，前十名的學生都得滿分，全部有 38 位（占 62%）得滿分，鑑別指數 0.50 亦稱理想。
- (2) 解 1 或解 2 都是頗簡潔的解法。
- (3) 解題主要概念：
  - 掌握遞降正整數的定義。
  - 每一個遞降正整數跟  $\{0, 1, 2, \cdots, 8, 9\}$  2 個元素以上之子集合形成一一對應。
- (4) 討論：
 

使用列舉法易出錯，應該避免。

7. 在給定的平行四邊形  $ABCD$  中,  $U, V$  分別在兩邊  $\overline{AB}$  及  $\overline{CD}$  內部的動點,  $\overline{AV}$  與  $\overline{DU}$  交於  $P$ ,  $\overline{BV}$  與  $\overline{CU}$  交於  $Q$ 。試決定所有  $U, V$  的可能位置使得四邊形  $PUQV$  的面積為最大。(1992 年加拿大 MO 改編)

[解1] 以下  $(ABC)$ ,  $(PUQV)$  等表示  $\triangle ABC$ 、四邊形  $PUQV$  之面積。  
不妨設  $BU \geq CV$ 。



$$\therefore \triangle BQU \sim \triangle VQC$$

$$\therefore UQ \geq QC \text{ 且 “=” 成立 } \iff BU = CV$$

$$\therefore B \text{ 到 } \overrightarrow{UC} \text{ 距離} \geq V \text{ 到 } \overrightarrow{UC} \text{ 的距離且 “=” } \iff BU = CV。$$

在  $\overline{UQ}$  上作點  $E$  使  $QE = QC$ 。則  $(BEU) \geq (VEU)$ ,  $(BEQ) = (BQC)$

$$\text{且 } (VEQ) = (VQC)$$

$$\therefore (BQU) + (VQC) \geq (UQV) + (BQC)$$

$$\therefore (UQV) = (BQC), (UQV) \leq \frac{1}{4} (UVCB)$$

$$\text{同理 } (PUV) \leq \frac{1}{4} (UVDA)。$$

$$\therefore (PUQV) \leq \frac{1}{4} (ABCD) \text{ 且 “=” } \iff “BU = CV”$$

此對四邊形  $PUQV$  之面積為最大 (其值等於  $\frac{1}{4} (ABCD)$ )。

[解2] (1)  $\therefore (BQC) : (BQU) = QC : QU = (VQC) : (VQU)$

$$\therefore (BQC) \times (VQU) = (BQU) \times (VQC)$$

(2)  $\therefore (BUC) = (BVU)$

$$\therefore (BQC) = (VQU) = \sqrt{(BQC) \times (VQU)}$$

$$= \sqrt{(BQU) \times (VQC)} \leq \frac{1}{2} [(BQU) + (VQC)]$$

$$\text{且 “=” 成立 } \iff (BQU) = (VQC)$$

(3)  $\therefore \triangle BQU \sim \triangle VQC$  (2) 中 “=”  $\iff \triangle BQU \cong \triangle VQC$

$$\text{即 } BU = CV。$$

(4) 由(2)知  $(BQVC) = (BQC) + (VQU) + (BQU) + (VQC)$

$$\geq 4 (QUV) \text{ 且 “=” } \iff BU = CV。$$

(5) 同理,  $(AUV D) \geq 4(PUV)$ , “=”  $\iff AU = DV$ 。

(6) 合併(4), (5)知  $(PUQV) \leq \frac{1}{4}(ABCD)$ , “=”  $\iff AU = DV$ 。

評析:

(1) 本題為具有很好鑑別指數的問題, 很適合於甄選出數學資賦特殊能力的學生之用。

(2) 解題主要概念:

- 直觀透視  $BU = CV$ ,  $(PUQV) = \frac{1}{4}(ABCD)$ 。

- 相似三角形面積比的性質。

- 等底同高的三角形面積相等。

(3) 討論:

本題基本上是屬於平面幾何平行四邊形的問題, 解法很多, 亦可用代數方法來求解。

8. 已知四面體的六條稜長的和不小於  $\sqrt{3}$ 。試證:

這個四面體的四個三角形的面, 至少有一個三角形的內切圓的半徑不大於  $\frac{1}{12}$ 。

(大陸奧林匹亞訓練教材改編)

[解] (1) 先證: 邊長  $a, b, c$ , 內切圓半徑  $r$  的三角形。

$$r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}} \quad (s = \frac{a+b+c}{2})$$

$$\therefore rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\left(\frac{(s-a)+(s-b)(s-c)}{3}\right)^3} \leq \frac{s}{3\sqrt{3}}$$

(2) 設四面體  $ABCD$  的四個面之內切圓半徑分別為  $r_1, r_2, r_3, r_4$ ,

各面三角形之半周長分別為  $s_1, s_2, s_3, s_4$ 。則

$$2(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = 2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}) \leq 2 \times \sqrt{3}$$

$$\therefore s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \leq \sqrt{3}。$$

$$\text{由(1)知 } r_i \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} s_i \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)。$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq \frac{1}{3}。$$

$$\therefore r_1, r_2, r_3, r_4 \text{ 四者之中至少有一個 } \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}。$$

評析：

(1) 本題屬難易適中的三角題，有 14 位得滿分，但有 23 位得 0 分，鑑別指數 0.64，堪稱理想。

(2) 解題主要概念：

- 三角形內切圓半徑與周長之關係。
- 將空間的四個三角形轉換成四個平面上的三角形，並掌握其周長之關係。
- 簡單的鴿籠原理之應用。

9. 設  $N$  為全體的自然數集合， $\langle a_n \rangle$  為正整數形成的數列且  $a_n = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ， $n \in N$ 。設  $S = \{ a_n \mid n \in N \}$ ，試說明  $S$  是由那些整數所組成的集合。

(中華民國數學奧林匹亞提供給第 4 屆亞太奧林匹亞備選題，趙文敏教授設計)

[解] 因為  $\sqrt{1} = 1$ ， $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ ， $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$ ，所以  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$ 。

更進一步可知： $a_4 = 6, a_5 = 7, a_6 = 8, a_7 = 10, a_8 = 11, \dots$

$\langle a_n \rangle$ ：2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, ……。

$1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, \dots$  都不在上面的數列內，

猜測： $S$  為由非完全平方數的正整數所組成。

證明猜測結果：

$$\begin{aligned} (1) \text{ 若 } n \in N, \text{ 則 } & ((n+1) + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}) - (n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}) \\ & = 1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 1。 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_{n+1} = \left\lfloor (n+1) + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} + 1 \right\rfloor = a_n + 1,$$

即  $a_{n+1} > a_n$ 。所以  $\langle a_n \rangle$  為嚴格增數列。

(2) 若  $m > 1, m \in N, m$  與任一  $a_n$  都不等，則有  $n \in N$  使得

$$a_n < m < a_{n+1},$$

因此  $\left[ n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right] < m < \left[ (n+1) + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right]$ 。

$$\therefore n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} < m, m+1 \leq (n+1) + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sqrt{n} < m - n - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n+1}$$

$$\therefore n < (m-n)^2 - (m-n) + \frac{1}{4} \leq n+1, -\frac{1}{4} < (m-n)^2 - m \leq \frac{3}{4}$$

$\therefore m = (m-n)^2$ 。即  $m$  為完全平方數。

(3) 對任一  $k \in N$ ，因為  $k-1 \leq \sqrt{k^2-k} < k - \frac{1}{2}$ ，

$$\text{所以 } k^2 - \frac{1}{2} \leq (k^2-k) + \sqrt{k^2-k} + \frac{1}{2} < k^2, \text{ 因此 } a_{k^2-k} = k^2 - 1。$$

$$\text{另因 } k - \frac{1}{2} < \sqrt{k^2-k+1} \leq k,$$

$$\text{所以 } k^2 + 1 < k(k^2-k+1) + \sqrt{k^2-k+1} + \frac{1}{2} \leq k^2 + \frac{3}{2}$$

因此  $a_{k^2-k+1} = k^2 + 1$ ，所以  $k^2 \notin S$ 。

綜合(2)、(3)得證  $S$  為全部非完全平方數以外的正整數所組成。

評析：

(1) 全體 61 位學生僅有 8 位得到 6 分或 7 分，而有 14 位得 0 分，27 位學生能猜測中  $S$  是由非完全平方數組成而得 2 分或 1 分，在競試(二)中難度較高，僅次於第 10 題，但鑑別指數仍稱理想。

(2) 解題主要概念：

- 找出規律性。
- 高斯函數的基本性質。

(3) 討論：

本題為我國提供給第四屆亞太數學奧林匹亞備選題，但未被採用到；此次測出的統計數據，顯示本題仍宜作為國際數學競試的題目。

10. 設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為  $n$  個正整數且  $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ 。

$$\text{證明： } \sum_{k=1}^n (X_k^5 + X_k^7) \geq 2 \left( \sum_{k=1}^n X_k^3 \right)^2$$

並問  $X_1, X_2, \dots, X_n$  各為何值時等號“=”成立？



(大陸數學奧林匹亞訓練教材改編)

[證] 用數學歸納法證明。

(1) 當  $n = 1$  時  $\because x_1^5 (x_1 - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^5 + x_1^7 \geq 2x_1^6$ 。  $\therefore$  不等式成立。

(2) 設  $n = m$  時，不等式成立，欲證  $n = m + 1$  時亦成立。

$$\because 2 \left( \sum_{k=1}^m x_k^3 \right)^2 \leq \sum_{k=1}^m (x_k^5 + x_k^7)$$

$$\therefore 2 \left( \sum_{k=1}^{m+1} x_k^3 \right)^2 = 2 \left[ \left( \sum_{k=1}^m x_k^3 \right)^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^m x_k^3 \right) x_{m+1}^3 + x_{m+1}^6 \right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^m (x_k^5 + x_k^7) + 2x_{m+1}^6 + 4x_{m+1}^3 \left( \sum_{k=1}^m x_k^3 \right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^m (x_k^5 + x_k^7) + 2x_{m+1}^6 + 4x_{m+1}^3 [1^3 + 2^3 + \cdots + x_m^3 + \cdots + (x_{m+1} - 1)^3]$$

$$= \sum_{k=1}^m (x_k^5 + x_k^7) + 2x_{m+1}^6 + 4x_{m+1}^3 \frac{1}{4} (x_{m+1} - 1)^2 (x_{m+1})^2$$

$$= \sum_{k=1}^m (x_k^5 + x_k^7) + (x_{m+1}^5 + x_{m+1}^7)$$

$$\text{即 } 2 \left( \sum_{k=1}^{m+1} x_k^3 \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{m+1} (x_k^5 + x_k^7)。$$

另從上式證題過程中，可知等號“=”成立之條件為  $x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_n = n$ 。

評析：

1. 全體 61 位中僅有 8 位得滿分，而有 41 位得 0 分或 1 分，在競試(二)中難度最高，但鑑別指數仍稱理想。
2. 解題主要概念：
  - 數學歸納法。
  - 很有技術性地應用前  $n$  個正整數立方和公式。
3. 討論：

本題應屬不等式的難題，證明過程中要有效的應用到立方和公式，否則無法突破。

## 五、結 論

根據以上的統計與評析，這兩次的模擬競試，除了競試(一)之第 4 題外，其餘各題之

難度與鑑別指數均堪稱合理，尤其是模擬競試(二)更是一份很有鑑別度的試題，值得作為甄選數學資優生之參考。從這二份分析統計結果，跟以往研習營比較（陳昭地，民 82 年）或跟上一屆亞太數學奧林匹亞競賽之試題分析比較（陳昭地，民 81 年），均顯示本年研習營模擬競試甄選命題工作有很顯著的進步，其中二次模擬競試與獨立研究（見附錄）成績前十名者呈現很穩定者，可望獲得中華民國參加一九九三年亞太數學奧林匹亞競賽前十名代表或一九九三年國際數學奧林匹亞代表；且由第二次模擬競試前十名成績平均高達 30.1，跟第一次相差頗大，顯示研習績效外，更可望繼續為我國獲得一九九三年第五屆亞太數學奧林匹亞競賽的王座。

## 六、參考資料

1. 陳昭地（民 81 年），第四屆亞太數學奧林匹亞競試成績報告，科學教育月刊，(150)，42～51。
2. 陳昭地（民 82 年），中華民國參加一九九二年第四屆亞太數學奧林匹亞研習營簡介，科學教育月刊(156)，29～45。
3. 蘇淳（1992），漫話數學歸納法的應用技巧（數學奧林匹克競賽叢書），中國科技大學出版社，1992 年 3 月 1 版。

## 七、附 錄：專題探討主題、獨立研究題及成績評分統計資料

### 專題探討主題及獨立研究題

#### 1. 專題探討(一)：數學歸納法的應用技術

獨立研究(一)：陳昭地教授提供，研究作答時間 100 分鐘

1-1 設  $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1$ ， $n = 2, 3, \dots$

$S = \{ n \mid a_n \text{ 不是完全平方數} \}$ ，試求集合  $S$ 。

1-2 設  $n$  為正整數，試求在  $0 \leq x \leq 1$  的範圍中高斯函數方程

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor \text{ 的所有解。}$$

1-3 試證： $x^{1993} - x^{-1993}$  可以用  $x - x^{-1}$  的實係數多項式來表示。

1-4 設  $a_1, a_2, \dots, a_{1993}$  都是實數， $b_1, b_2, \dots, b_{1993}$  都是正數。試證：

$$\sum_{k=1}^{1993} \frac{a_k^2}{b_k} \geq \frac{\left( \sum_{k=1}^{1993} a_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{1993} b_k}。$$

## 2. 專題探討(二)：平面幾何的重要定理與應用

獨立研究(二)：趙文敏教授提供，研究作答時間 100 分鐘

2-1 設  $\alpha$  為一直線，而  $A$  與  $B$  是不在  $\alpha$  上的二相異點，試以直尺圓規作出過  $A$ 、 $B$  而與  $\alpha$  相切的圓。

2-2 在  $\triangle ABC$  中，過  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的內角平分線分別交對邊於  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，試證：

$\triangle DEF$  的面積不大於  $\triangle ABC$  的面積的  $\frac{1}{4}$ 。

2-3 過  $O$  點任作四相異直線  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  與  $\alpha_4$ ， $A$  為  $\alpha_1$  上任意點， $A \neq O$ ，過  $A$  作  $\alpha_4$  的平行線與  $\alpha_2$  交於  $B$ ，過  $B$  作  $\alpha_1$  的平行線與  $\alpha_3$  交於  $C$ ，過  $C$  作  $\alpha_2$  的平行線與  $\alpha_4$  交於  $D$ ，過  $D$  作  $\alpha_3$  的平行線與  $\alpha_1$  交於  $E$ 。試證： $\overline{AO} \geq 4 \overline{EO}$ 。

2-4 設一個四面體的六稜的長分別為  $a, b, c, d, e, f$ ，長為  $a, d$  的稜不相交，長為  $b, e$  的稜不相交，長為  $c, f$  的稜不相交，試證：此四面體的體積  $v$  為

$$v = \frac{1}{12} [a^2 d^2 (-a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + e^2 + f^2) + b^2 e^2 (a^2 - b^2 + c^2 + d^2 - e^2 + f^2) + c^2 f^2 (a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 - f^2) - a^2 b^2 c^2 - a^2 e^2 f^2 - b^2 d^2 f^2 - c^2 d^2 e^2]^{\frac{1}{2}}。$$

## 3. 專題探討(三)：數論初步

獨立研究(三)：林哲雄教授提供，研究作答時間 100 分鐘

3-1 設  $n$  為大於 7 的整數，試證  $n$  可表為  $3x + 5y$  的形式，其中， $x, y$  為非負的整數。

3-2 證明： $10^{\frac{10}{5}} + 5^{\frac{10}{5}}$  為 11 的倍數。

3-3 設  $n$  為正整數，試證：存在非負整數  $x, y$  使得  $n + 54x + 77y$  這個數的十進位表示法中，末兩位數字相同。

3-4 找出所有的自然數  $n$ ，使得  $n^4 + 4^n$  為質數。

## 4. 專題探討(四)：解難策略

獨立研究(四)：香港大學張百康教授提供，研究作答時間 100 分鐘

4-1 如果  $n$  是不小於 3 的自然數，則以  $f(n)$  表示不是  $n$  的因數的最小自然數（例如  $f(12) = 5$ ）。如果  $f(n) \geq 3$ ，又可作  $f(f(n))$ 。類似地，如果  $f(f(n)) \geq 3$ ，又可作  $f(f(f(n)))$ ，等等。如果

$$\underbrace{f(f(\cdots f(n)\cdots))}_{i \text{ 個 } f} = 2,$$

就把  $i$  叫做  $n$  的“長度”。如果用  $l_n$  表示  $n$  的長度，試對任意的自然數  $n \geq 3$ ，求  $l_n$  之值並證明你的結論。

- 4-2 設點  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分別在  $\triangle ABC$  的三邊  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  上，且  $\triangle AEF$ 、 $\triangle BFD$ 、 $\triangle CDE$  的內切圓有相等的半徑  $r$ ，又以  $r_0$  及  $R$  分別表示  $\triangle DEF$  和  $\triangle ABC$  的內切圓半徑，求證： $r + r_0 = R$ 。

5. 專題探討(五)：國際數學競試解題實例與策略

獨立研究(五)：香港大學張百康教授提供，研究作答時間100分鐘

- 5-1 空間中有1993個點，其中任何三點不共線，把它們分成點數各不相同的30組，在任何三個不同的組中各取一點為頂點作三角形。

問：要使這種三角形的總數最大，各組的點數應為多少？

- 5-2 如果一自然數  $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ ，其中  $n_1, n_2, \cdots, n_k$  為自然數且  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} = 1$ ，則  $n$  稱為「埃及數」。例如， $32 = 2 + 3 + 9 + 18$  是個埃及數，因為  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1$ 。證明：所有大於23的自然數都是埃及數。

6. 專題探討(六)：方程式論

獨立研究(六)：張瑞吉教授提供，研究作答時間100分鐘

- 6-1 設  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$  為整係數多項式，若存在奇數  $k$  與偶數  $l$  使  $f(k)$  與  $f(l)$  均為奇數，則  $f(x)$  無整數根。
- 6-2 設  $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ ，其中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  為  $n$  個相異的整數，試證  $p(x)$  在整數範圍內不可約。
- 6-3 設  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$  其中  $a_k = 1$  或  $-1$  ( $k = 1, 2, \cdots, n$ ) 且其根全為實數，問  $n$  為何值？
- 6-4 試求適合  $f(x^2) - f(x)f(x+1) = 0$  的非零多項式  $f(x) \in R[x]$ 。
7. 專題探討(七)：高斯函數  $[x]$

獨立研究(七)：洪有情教授提供，研究作答時間100分鐘

- 7-1 設  $d(n)$  表示  $n$  的正因數個數。證明：

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = \left[ \frac{n}{1} \right] + \left[ \frac{n}{2} \right] + \cdots + \left[ \frac{n}{n} \right]。$$

- 7-2 設  $c$  為大於1的整數，求下列級數和：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{c^k - 2.2}{c^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2c^k - 2.2}{c^{k+1}} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(c-1)c^k - 2.2}{c^{k+1}} \right\rfloor \right)$$

7-3 設  $\pi(n)$  表示不大於  $n$  的質數的個數。證明： $2^{1993} \leq (3986)^{\pi(3986)}$ 。

7-4 證明數列  $\{a_n\}$ ，其中  $a_n = \lfloor \sqrt{2} n \rfloor$ ，含有無窮多個完全平方數。

# 8. 專題探討(八)：圖論淺介

獨立研究(八)：傅恆霖教授提供，研究作答時間 100 分鐘

8-1 證明一個連通平面圖，頂點的個數  $p$ ，邊的個數  $q$  和區域的個數  $r$  之間的關係為  $p - q + r = 2$ 。

8-2 試安排一場  $2n$  個球隊參加的循環賽，使得每隊每天都出賽一場，而且在  $2n-1$  天完成。(每天賽程都會完成)

8-3 證明在六個人中必定會有三個人彼此都相識或是有三個人彼此都不相識。(兩個人之間相識或不相識只有一種選擇)並說明 5 個人辦不到。

8-4 有  $2n$  個人在一起聚會 ( $n \geq 2$ )，其中每個人至少都認識半數以上的人。證明：我們可以找到一張圓桌 (有四個位置)，把四個人安排進去使得每個人和旁邊的兩人都相識。

獨立研究前十名成績統計表

| 題次  | 總分前十名 | 最低分   | 最高分   | 平均值   | 標準差  |
|-----|-------|-------|-------|-------|------|
| 1-1 | 10    | 1.00  | 7.00  | 5.80  | 1.99 |
| 1-2 | 10    | 3.00  | 7.00  | 6.30  | 1.34 |
| 1-3 | 10    | 5.00  | 7.00  | 6.70  | 0.67 |
| 1-4 | 10    | 6.00  | 7.00  | 6.90  | 0.32 |
| 2-1 | 10    | 0.00  | 7.00  | 4.65  | 1.86 |
| 2-2 | 10    | 0.00  | 7.00  | 5.20  | 3.01 |
| 2-3 | 10    | 0.00  | 3.00  | 0.60  | 0.97 |
| 2-4 | 10    | 0.00  | 7.00  | 1.00  | 2.21 |
| 3-1 | 10    | 7.00  | 7.00  | 7.00  | 0.00 |
| 3-2 | 10    | 7.00  | 7.00  | 7.00  | 0.00 |
| 3-3 | 10    | 0.00  | 7.00  | 5.70  | 2.54 |
| 3-4 | 10    | 0.00  | 7.00  | 4.80  | 2.90 |
| 4-1 | 10    | 1.00  | 7.00  | 5.10  | 1.85 |
| 4-2 | 10    | 0.00  | 7.00  | 5.10  | 3.11 |
| 5-1 | 10    | 0.00  | 7.00  | 1.60  | 2.91 |
| 5-2 | 10    | 0.00  | 7.00  | 1.80  | 2.78 |
| 總分  | 10    | 67.00 | 94.00 | 75.25 | 7.98 |

獨立研究前十名成績評分紀錄（未含補交）（每題滿分7分）：

| 名次 | 編號      | 1-1 | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 2-1 | 2-2 | 2-3 | 2-4 | 3-1 | 3-2 | 3-3 | 3-4 | 4-1 | 4-2 | 5-1 | 5-2 | 總分   |
|----|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1  | 82MP 01 | 7   | 7   | 7   | 7   | 0   | 7   | 0   | 7   | 7   | 7   | 7   | 7   | 6   | 7   | 7   | 4   | 94.0 |
| 2  | 82MP 04 | 7   | 7   | 6   | 7   | 6   | 7   | 0   | 0   | 7   | 7   | 7   | 7   | 6   | 2   | 7   | 0   | 83.0 |
| 3  | 82MP 10 | 7   | 6   | 7   | 6   | 5   | 7   | 0   | 0   | 7   | 7   | 7   | 7   | 4   | 7   | 0   | 0   | 77.0 |
| 4  | 81AP 04 | 7   | 7   | 5   | 7   | 5   | 0   | 1   | 0   | 7   | 7   | 6   | 6   | 4   | 7   | 0   | 6   | 75.0 |
| 5  | 82ME 03 | 7   | 7   | 7   | 7   | 4   | 7   | 0   | 0   | 7   | 7   | 7   | 0   | 7   | 7   | 0   | 0   | 74.0 |
| 6  | 82MP 07 | 4   | 7   | 7   | 7   | 6   | 7   | 0   | 2   | 7   | 7   | 0   | 7   | 4   | 7   | 0   | 0   | 72.0 |
| 7  | 82MP 02 | 6   | 7   | 7   | 7   | 5   | 0   | 1   | 0   | 7   | 7   | 7   | 4   | 6   | 0   | 0   | 7   | 71.0 |
| 8  | 82MG 23 | 5   | 5   | 7   | 7   | 5   | 7   | 0   | 0   | 7   | 7   | 7   | 0   | 7   | 7   | 0   | 0   | 71.0 |
| 9  | 82MG 05 | 7   | 3   | 7   | 7   | 7   | 3   | 3   | 0   | 7   | 7   | 7   | 7   | 1   | 0   | 2   | 1   | 69.0 |
| 10 | 82ME 06 | 1   | 7   | 7   | 7   | 4   | 7   | 1   | 1   | 7   | 7   | 2   | 3   | 6   | 7   | 0   | 0   | 67.0 |

全體獨立研究成績統計表

| 題次  | 總人數 | 最低分  | 最高分   | 平均值   | 標準差   | 得分率  | 鑑別指數 |
|-----|-----|------|-------|-------|-------|------|------|
| 1-1 | 61  | 0.00 | 7.00  | 2.23  | 2.85  | 0.32 | 0.48 |
| 1-2 | 61  | 0.00 | 7.00  | 3.56  | 3.05  | 0.51 | 0.68 |
| 1-3 | 61  | 0.00 | 7.00  | 4.84  | 2.88  | 0.69 | 0.50 |
| 1-4 | 61  | 0.00 | 7.00  | 4.45  | 3.26  | 0.64 | 0.77 |
| 2-1 | 61  | 0.00 | 7.00  | 2.52  | 2.54  | 0.36 | 0.51 |
| 2-2 | 61  | 0.00 | 7.00  | 2.02  | 2.90  | 0.29 | 0.54 |
| 2-3 | 61  | 0.00 | 7.00  | 0.52  | 1.58  | 0.07 | 0.07 |
| 2-4 | 61  | 0.00 | 7.00  | 0.43  | 1.35  | 0.06 | 0.09 |
| 3-1 | 61  | 0.00 | 7.00  | 4.44  | 3.08  | 0.63 | 0.86 |
| 3-2 | 61  | 0.00 | 7.00  | 5.41  | 2.57  | 0.77 | 0.46 |
| 3-3 | 61  | 0.00 | 7.00  | 2.18  | 2.92  | 0.31 | 0.71 |
| 3-4 | 61  | 0.00 | 7.00  | 2.52  | 2.40  | 0.36 | 0.51 |
| 4-1 | 61  | 0.00 | 7.00  | 2.77  | 2.36  | 0.40 | 0.44 |
| 4-2 | 61  | 0.00 | 7.00  | 2.33  | 2.84  | 0.33 | 0.53 |
| 5-1 | 61  | 0.00 | 7.00  | 0.98  | 1.85  | 0.14 | 0.14 |
| 5-2 | 61  | 0.00 | 7.00  | 0.57  | 1.40  | 0.08 | 0.13 |
| 總分  | 61  | 4.00 | 94.00 | 41.78 | 20.87 |      |      |