國際物理奧林匹亞試題與解答(五)

傅祖怡　沈青嵩
國立臺灣師範大學物理系

第11屆(1979年於蘇聯莫斯科)

1. 一質量爲 $m=12\times10^3$ kg 的太空飛船在圍繞月球的圓軌道上旋轉，距月球表面的高度爲 $h=100$ km 。爲使飛船降落到月球表面，噴氣發動機在X點作一次短時間發動。從噴口噴出的熱氣流相對飛船的速度爲 $u=10000$ m/s。月球半徑爲 $R=1700$ km，月球表面的落體加速度爲 $g=1.7\,m/s^2$。飛船可用兩種不同方式到達月球(見圖11.1)：(a)到達月球上的A點，該點正好與X點相對；(b)在X點給一指向月球中心的動量後，與月球表面相切於B點。試計算上述兩種情形下所需要的燃料量。

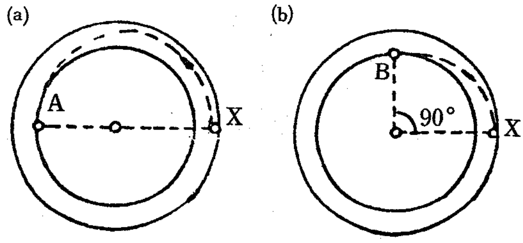


圖 11.1

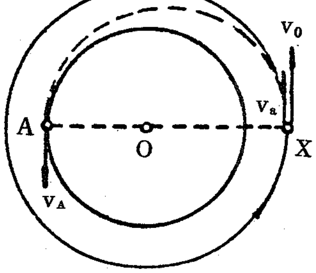
解：月球表面落體加速度 $g=\dfrac{GM}{R^2}\Rightarrow M=\dfrac{gR^2}{G}$ (G爲萬有引力常數，M爲月球質量)，月球與飛船間的萬有引力，作爲飛船繞月旋轉的向心力，

故 $\dfrac{mv_0^2}{R+h}=\dfrac{GMm}{(R+h)^2}$

$$\Rightarrow v_0^2=\frac{GM}{R+h}=\frac{G}{R+h}\cdot\frac{gR^2}{G}=\frac{gR^2}{R+h}$$

$$\Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}=\sqrt{\frac{1.7\times(1.7\times10^6)^2}{1.7\times10^6+1\times10^5}}$$

$$=1652\ (m/s)$$



(a) 如右圖示，在X點利用噴氣發動機反向噴氣，使飛船速度從 v_0 減爲 v_a。而飛船作

主軸端點是A和X的橢圓軌道運動，設A點速度爲 v_A，則由克卜勒第二定運得 $v_A R = v_a(R+h) \Rightarrow v_A = \dfrac{R+h}{R} v_a$ ………… ①

由力學能守恆（m' 爲火箭噴氣後之質量）：

$$\frac{1}{2}m'v_a^2 - \frac{GMm'}{R+h} = \frac{1}{2}m'v_A^2 - \frac{GMm'}{R}$$

得 $v_A^2 - v_a^2 = 2GM\dfrac{h}{R(R+h)} = \dfrac{2ghR}{R+h}$ ………… ②

解 ①、② 得 $v_a = 1628\,(m/s)$

$v_A = 1724\,(m/s)$

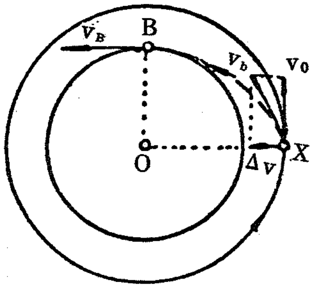
設噴出之燃料爲 Δmkg，以月球爲參考座標系，在X點運用動量守恆得

$$mv_0 - \Delta m(u+v_0) = (m-\Delta m)v_a$$

$$\Rightarrow \Delta m = \frac{m(v_0-v_a)}{(u+v_0-v_a)} = \frac{12\times10^3(1652-1628)}{(10000+1652-1628)}$$

$= 28.7\,(kg)$ ………………………… Ans (a)

(b) 如右圖示，在X點應使噴氣發動機向外噴氣，使在原速度 v_0 上增加一向心方向的速度 Δv。飛船速度將變爲 $v_b = \sqrt{v_0^2+\Delta v^2}$，繼續沿二次曲線軌道運動（因受月球之引力）。



由克卜勒第二定律（角動量守恆律）得

$$v_B R = v_0(R+h)$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{R+h}{R}v_0 = \frac{1.8\times10^6}{1.7\times10^6}\times1652 = 1749.2\,(m/s)$$

由力學能守恆

$$\frac{1}{2}m'v_B^2 - \frac{GMm'}{R} = \frac{1}{2}m'v_b^2 - \frac{GMm'}{R+h}$$

得 $v_B^2 - v_b^2 = v_B^2 - (v_0^2+\Delta v^2) = \dfrac{2ghR}{R+h} = 3.21\times10^5(m^2/s^2)$

代入 $v_B = 1749.2\,(m/s)$，　$v_0 = 1652\,(m/s)$

得 $\Delta v = 97\,(m/s)$

設噴出之燃料量爲 Δm kg ，以飛船爲參考系在X點 Δv 方向運用動量守恆

得 $(\Delta m)\,u = \Delta v\,(m-\Delta m)$

$$\Delta m = \frac{m\Delta v}{u+\Delta v} = \frac{12\times10^3\times97}{10000+97} = 115\ (kg)$$

2. 一鋁塊的質量先在乾燥空氣中測量，然後在濕空氣中測量，濕空氣中水蒸氣的分壓爲 15.2 mm Hg 。稱質量用的是黃銅砝碼。大氣壓爲 760 mmHg ，兩種情形下溫度相同。如果所用天平的靈敏度只能對 0.1 mg 的質量差有反應，問鋁塊質量至少應多大才能在上述兩種情形下顯示出差別？鋁的密度爲 $2.7\ g/cm^3$，黃銅密度爲 $8.5\ g/cm^3$ 。

解：濕空氣中水蒸氣分壓 15.2 mmHg 是1大氣壓的 $\frac{1}{50}$（$\because \frac{15.2}{760}=\frac{1}{50}$），這意味著水蒸氣佔濕空氣體積（或莫耳數）的 $\frac{1}{50}$，

25°C 時乾空氣的密度爲 $\dfrac{\frac{1}{5}\times32+\frac{4}{5}\times28}{24.5\times10^3} \simeq 1.18\times10^{-3}\ (g/cm^3)$

水蒸氣的密度爲 $\dfrac{18}{24.5\times10^3} \simeq 7.3\times10^{-4}\ (g/cm^3)$

由此得濕空氣的密度爲 $\dfrac{49\times1.18\times10^{-3}+1\times7.3\times10^{-4}}{50} \simeq 1.17\times10^{-3}\ (g/cm^3)$

於是得乾濕空氣密度差爲 $1\times10^{-5}\ g/cm^3$

$$\left.\begin{aligned}&1\text{ 克鋁體積}\quad V_{Al}=\frac{1}{2.7}=0.370\ cm^3\\&1\text{ 克銅體積}\quad V_{Cu}=\frac{1}{8.5}=0.117\ cm^3\end{aligned}\right\}\ \text{兩者相差}\ 0.253\ cm^3$$

故當1克鋁在天平上平衡時，若用濕空氣取代乾空氣，向上浮力差（造成秤量差）爲： $0.253\times1\times10^{-5}=2.53\times10^{-6}\ (g)$

但靈敏只有 1×10^{-4} g

故至少需 $\dfrac{1\times10^{-4}}{2.53\times10^{-6}} \simeq 40$（倍）

即鋁塊質量至少須大於 40 g 才能顯出差別。

3. 用一架直徑為 $D=2.6\,m$ 的凹拋物反射面望遠鏡把波長為 $\lambda=0.69\,\mu m$ 的雷射光線發送到月球表面。光線被放置在月球上直徑為 $d=20\,cm$ 的平面鏡反射。反射光正好回到地球上的望遠鏡。一光電池在望遠鏡的焦點上截取光線。地球和月球間的距離為 $L=380,000\,km$。

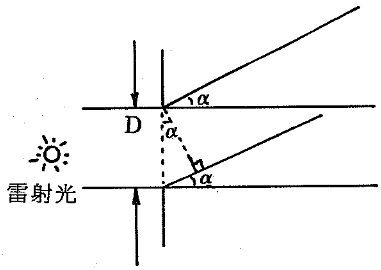
(a) 計算要把望遠鏡調節到所需方向的角度精度。

(b) 光電池截取到的能量占原有光能的多少？（忽略損耗）

(c) 如果發射光脈衝的能量為 1 J，有多少光子到達不用助視儀器的眼睛？（瞳孔直徑為 5 mm）

(d) 如果月球上沒有反射鏡，則回到光電池的能量有多少？（月球表面把入射光的 10 ％向所有方向均勻地反射）

解：(a) 雷射光作為一強點光源，與方向無關，而直徑D的望遠鏡表一發射光的狹縫。光由於繞射而發散，根據繞射原理，在原入射方向上有最大光強，而在滿足 $\lambda=D\sin\alpha$ 的方向上產生第一級相消（暗紋）。如圖示：在理想情形下，軸線正確指向月球上



的反射鏡。若偏角 $\alpha>\dfrac{\lambda}{D}$，則只有極少的光能到達反射鏡。於是求得

$$\alpha \simeq \sin\alpha = \frac{\lambda}{D} = \frac{0.69\times10^{-6}}{2.6} = 2.65\times10^{-7}\ (\text{rad})。$$

當然方向精度必須比此好得多，因為在此角度範圍內，光線分布也不是均勻的，靠近邊緣處光強減弱，因此上述計算只是一種近似的估算。

(b) 由於繞射，在月球上產生一圓形光斑，其直徑約為

$\alpha L=2.65\times10^{-7}\times3.8\times10^{8}=101$ (m)

光斑面積為 $\pi\left(\dfrac{101}{2}\right)^2=7987\ (m^2)$

設原發射出能爲E，無損耗地射在此面積上，則平均能量密度爲

$$\frac{E}{7989}=1.25\times10^{-4}E\ (m^{-2})$$

可算出達面積 $(0.1)^2\pi$ 反射鏡的能量爲

$$1.25\times10^{-4}E\times(0.1)^2\pi=3.93\times10^{-6}E\ 。$$

此光再反射回地球，必須在角度 $\beta=\frac{\lambda}{d}=3.45\times10^{-6}$ (rad) 的範圍內。

故回到地球接收到光範圍的直徑爲 $\beta L=1310$ (m) 造成面積

$\pi\left(\frac{1310}{2}\right)^2\simeq1.35\times10^6\ (m^2)$ 的區域，此時能量密度爲

$$\frac{3.93\times10^{-6}E}{1.35\times10^{6}}=2.91\times10^{-12}E\ (m^{-2})$$

故到達望遠鏡 $\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=5.31\ (m^2)$ 面積上的能量爲

$$2.91\times10^{-12}E\times5.31=15.5\times10^{-12}E$$

即回收能量約爲原能量的 $\frac{16}{10^{12}}$ ………………… Ans (b)

(c) 瞳孔面積爲 $\pi(2.5\times10^{-3})^2\simeq2.0\times10^{-5}\ (m^2)$
僅能接收 $2.91\times10^{-12}E\times2\times10^{-5}=5.8\times10^{-17}E$
若發射光 1 J 則到達眼睛能量 5.8×10^{-17} (J)

波長 0.69 μm 的光，每個光子能量爲 $E=\frac{hC}{\lambda}=2.9\times10^{-19}$ (J)

故有 $\frac{5.8\times10^{-17}}{2.9\times10^{-19}}\simeq200$ 個光子到達肉眼………… Ans (c)

(d) 若月球上沒有反射鏡，月球反射總能量的 $\frac{1}{10}$ 即 0.1 E，而向所有反向均勻地反射，即 0.1 E 的能量均勻分布在半徑爲 L 的半球面上，得能量密度爲

$$\frac{0.1E}{2\pi L^2}=\frac{0.1E}{2\pi\times(3.8\times10^8)^2}=1.1\times10^{-19}E\ (m^{-2})$$

到達望遠鏡的能量爲 $1.1\times10^{-19}\ E\times5.31=5.9\times10^{-19}\ E$

即原發射能量的 $\frac{5.9}{10^{19}}$

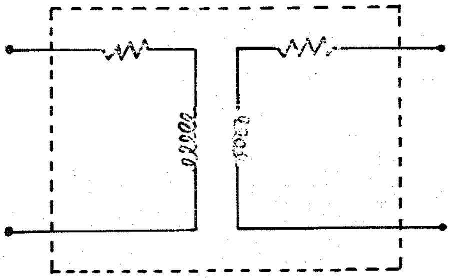
［實驗題］ 帶有四個接出頭的"黑盒子"要在不打開的情形下研究其內部結構。給定直流電源和交流電源、儀表和一個變阻箱（電阻可調）。

作法：1. 以伏特計測量兩兩接頭間是否有電位差。
結果都沒有電位差 ⇒ 盒內無電源。

2. 以歐姆計（或三用電表上之歐姆檔）測兩兩接頭間的電阻，發現盒內包含兩個互不連接的分離部分。

3. 對已知互相連通的接頭改變直流電源正負極，測其 I－V 曲線發現相同，表盒內不含半導體元件。

4. 由此可推測盒內結構爲：
（如右圖）



5. 輸入交流電源或直流電源，由測得之電流—電壓曲線可求得電阻、電感或互感值。

第12屆（1981年於保加利亞瓦爾納）

1. 質量爲 m_1 的圓筒水平的放置在眞空中。質量爲 m_2，厚度可忽略的活塞將圓筒分爲體積相同的兩部分（圖12.1）。圓筒的封閉部分充有 n 莫耳的單原子理想氣體，氣體的莫耳質量爲M，溫度爲 T_0，突然放開活塞，氣體逸出。試問圓筒的最後速度是多少？設摩擦力、圓筒和活塞的熱交換以及氣體重心的運動均忽略不計。
（$T_0=273K$，$m_1=0.6\ kg$，$m_2=0.3\ kg$，$n=25\ mol$，氦的莫耳質量爲 $4\times10^{-3}\ kg/mol$，$Cv=12.6\ J/mol\cdot k$，
$K=\frac{5}{3}$）

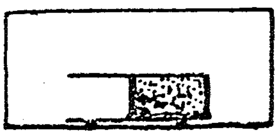


圖12.1

解：將整個過程分爲兩個階段：①絕熱膨脹至體積變爲2倍，活塞未脫離圓筒前。②活塞脫離圓

筒，氣體逸出。

在階段①　根據絕熱變化規律 TV^{K-1} ＝常數

得　$T_0V^{K-1} = T(2V)^{K-1} \Rightarrow T = (\frac{1}{2})^{K-1}\ T_0 = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}\ 273 \simeq 172\,K$

氣體內能的損失等於圓筒和活塞的總動能：

$$nCv(T_0 - T) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

根據動量守恆定律，　$m_1 v_1 = m_2 v_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$

解①、②得第一階段結束時圓筒的速度

$$v_1 = \sqrt{\frac{2nCv(T_0 - T)}{m_1(1 + \frac{m_1}{m_2})}}$$

即在第一階段的最後瞬間，圓筒以 v_1 向右運動，而此時活塞正好從圓筒開口衝出。

在階段②：考慮以 v_1 向右運動的坐標系。

氣體向左方流動，並推動圓筒向右以速度 v_x 運動。

氣體分子的動能 $\frac{m v_m^2}{2} = \frac{3}{2}KT \Rightarrow$ 氣體方均根速率 $v_m = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

考慮三度空間中有三個獨立的坐標，而每一坐標有正、反兩向運動，故平衡狀態下有 $\frac{1}{6}$ 的分子向圓筒底部運動（當然這只是一級近似）。因此 $\frac{nM}{6}$ 的質量以速度 v_m 向圓筒底部運動，並與筒底作彈性碰撞。之後圓筒以速度 v_x，氣體以速度 v_g 運動。

對彈性碰撞而言：

(a)　動量守恆：　$\frac{nM}{6} v_m = \frac{nM}{6} v_g + m_1 v_x$

(b)　機械能守恆：　$\frac{1}{2}(\frac{nM}{6})\ v_m^2 = \frac{1}{2}(\frac{nM}{6})\ v_g^2 + \frac{1}{2} m_1 v_x^2$

解以上方程組得氣體逸出後圓筒速度爲

$$v_x = \frac{2nM}{6m_1 + nM}\, v_m = \frac{2nM}{6m_1 + nM}\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

故最後圓筒速度爲 $v_1 + v_x$

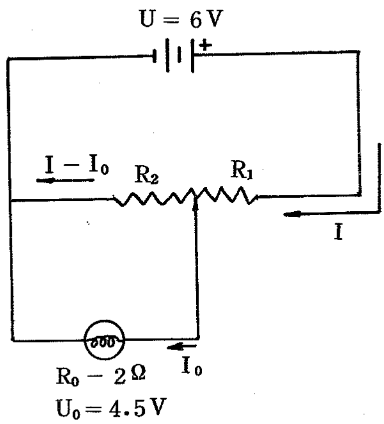
代入已知數據：$n = 25$ mole，$M = 4 \times 10^{-3}$ kg/mole，$C_v = 12.6$ J/mol・k，$T_0 = 273$ K，$T = 172$ K，$m_1 = 0.6$ kg，$m_2 = 0.3$ kg，$R = 8.31$

得 $$\sqrt{\frac{2\times 25\times 12.6(273-172)}{0.6\left(1+\frac{0.6}{0.3}\right)}} + \frac{2\times 25\times 4\times 10^{-3}}{6\times 0.6 + 25\times 4\times 10^{-3}}\sqrt{\frac{3\times 8.31\times 172}{4\times 10^{-3}}}$$

$$= 188 + 55.9 \simeq 244 \text{ (m/s)}$$

2. 一電燈泡的電阻爲 $R_0 = 2\,\Omega$，正常工作電壓爲 $U_0 = 4.5$ V；由電動勢爲 $U = 6$ V，內阻可忽略的電池供電。利用一滑線變阻器（電位器）將燈泡與電池相聯，使系統的效率不低於 $\eta = 0.6$。試計算可變電阻的量值及它應承受的最大電流。求出效率最大的條件並計算最大效率。

解：依題意繪電路圖如右：



流過燈泡電流 $I_0 = \dfrac{U_0}{R_0} = 2.25$ (A)

其功率 $P_0 = U_0 I_0 = 10.125$ (W)

以 R_1，R_2 表電阻器兩部分的電阻值。

設系統總電流爲 I，消耗總功率 $P = UI$

則效率 $\eta = \dfrac{P_0}{P} = \dfrac{U_0 I_0}{UI}$ ……… ①

若 $\eta = 0.6$ 則 $I = \dfrac{10.125}{6\times 0.6} \simeq 2.81$ (A) ………… Ans①之可變電阻應承受之最大電流。

$$R_1 = \frac{U - U_0}{I} = \frac{6 - 4.5}{2.81} \simeq 0.53\ (\Omega)$$

$$R_2 = \frac{4.5}{2.81 - 2.25} \simeq 8.0\ (\Omega)$$

$R_1 + R_2 = 8.53\ (\Omega)$ ……………… Ans ①之可變電阻的阻值

由方程式① $\eta = \dfrac{U_0 I_0}{U I}$ 中 U_0，I_0，U 已知，知 I 決定效率。當 $I = I_0$ 時，可得最大效率。（註：I 愈小 η 愈大，但 $I < I_0$ 不可能發生）

此時最大效率　$\eta = \dfrac{U_0 I_0}{U I_0} = \dfrac{4.5}{6} = 0.75$ ………… Ans ②

3. 某天文台的接收機位於海平面上方高度為 h＝2 m 處。接收機只記錄電場強度的水平分量。當一顆能發射波長為 $\lambda = 21$ cm 電磁波的人造衛星從地平線升起時，接收機記錄下極大值與極小值。

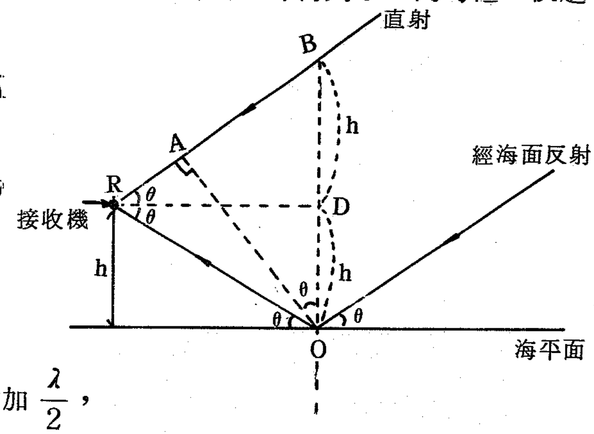
(a) 確定觀察到極大值和極小值時電磁波的方向，方向應以相對於水平線的角度表示。

(b) 當人造衛星在地平線上方出現時，強度減小還是增加？

(c) 研究相繼接收到的極大值與極小值的強度比。

（已知：入射波和反射波的振幅比為（$n - \sin\theta$）/（$n + \sin\theta$），其中 θ 是入射波從水平線量起的角度，n 是折射率。對短波長電磁波在水之介質中， n＝9 ）

解：(a) 直射和經海平面反射的電磁波都到達接收機（忽略多次反射）。由於路程差造成相位差而產生干涉，因相消或相長的不同而記錄得大小不同的值。依題意作圖如右：



得路程差 $\overline{OR} - \overline{RA} = \overline{RB} - \overline{RA}$

$= \overline{AB}$

（$\because$ $\angle DBR = \angle DOR = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

$\therefore$ $\overline{RB} = \overline{OR}$ ）

由圖：$\overline{AB} = 2h\sin\theta$

由 n 大之介質反射時，路徑增加 $\dfrac{\lambda}{2}$，

得極大條件為　$2h\sin\theta_{max} + \dfrac{\lambda}{2} = k\lambda$　　$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

因此　$\sin\theta_{max} = \dfrac{\lambda}{2h}\left(k - \dfrac{1}{2}\right)$ ……………… (1)

而極小條件爲 $2h\sin\theta_{min}+\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{2k+1}{2}\lambda \qquad k=0,1,2,\cdots\cdots$

得 $\sin\theta_{min}=\dfrac{\lambda}{2h}k$ ……………(2)

上式中之 θ_{max} 及 θ_{min} 即所求之電磁波方向。

(b) 當人造衛星恰好在地平線時，$\theta=0$，$\sin\theta=0$，(1)式無法滿足，但(2)式，當 $k=0$ 時，恰可滿足，故知此時強度極小。故當此星逐漸上升，即 θ 逐漸增大時，強度亦逐漸增加。

(c) 極小值時，入射波和反射波的振幅必須相減。若以E表示電場強度的振幅，

則有 $A_{min}=E-E\dfrac{n-\sin\theta_{min}}{n+\sin\theta_{min}}=\dfrac{2\sin\theta_{min}}{n+\sin\theta_{min}}E$

又 $\sin\theta_{min}=\dfrac{\lambda}{2h}k_{min}$

得接收得極小振幅爲 $A_{min}=\dfrac{(\lambda/h)k_{min}}{n+(\lambda/2h)k_{min}}E$

極大值時，入射波和反射波振幅相加，則

$$A_{max}=E+E\frac{n-\sin\theta_{max}}{n+\sin\theta_{max}}=\frac{2n}{n+\sin\theta_{max}}E$$

又 $\sin\theta_{max}=\dfrac{\lambda}{2h}\left(k_{max}-\dfrac{1}{2}\right)$

得接收到極大振幅爲 $A_{max}=\dfrac{2n}{n+\dfrac{\lambda}{2h}\left(k_{max}-\dfrac{1}{2}\right)}E$

但強度與振幅平方成正比，故相繼接收到各級次的極大值與極小值的強度之比爲：

$$\frac{I_{max}}{I_{min}}=\left[\frac{\dfrac{2n}{n+\dfrac{\lambda}{2h}\left(k_{max}-\dfrac{1}{2}\right)}E}{\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{h}\right)k_{min}}{n+\dfrac{\lambda}{2h}k_{min}}E}\right]^2 \qquad \begin{array}{l} k_{max}=1,2,3,\cdots\cdots\cdots \\ \\ k_{min}=0,1,2,3,\cdots \end{array}$$

具體的數值如下表：

k_{min}	k_{max}	θ_{min}	θ_{max}	I_{min}	I_{max}
0		0		0	
	1		1.504°		3.9768 E^2
1		3.009°		0.000136E^2	
	2		4.517°		3.9309 E^2
2		6.027°		0.000532E^2	
	3		7.542°		3.8858 E^2
3		9.062°		0.00118E^2	

［實驗題］ 對橡皮細繩的線性延展性進行實驗研究。

給一根懸掛在支架上的橡皮細繩，其原長 $\ell_0 = 150$ mm ，一質量爲 5g 的稱盤，質量從 5g～100g 的砝碼一套，停錶一只，一把尺和坐標紙。橡皮繩質量忽略不計。假定重力加速度爲 10 m/s² ，請從事下列實驗：

(a) 稱盤上依次加上質量從 15 g～105 g 的負載，測橡皮繩的伸長量 $\Delta\ell$，列成數據表，並作圖畫出 $\Delta\ell$ 與力 F（由質量負載造成）間的函數關係。

(b) 利用所測得的結果，記算負載質量 35 g～95 g 時橡皮繩的體積，並把結果塡入表內。求出體積是負載的函數的公式。在討論實驗結果時要記住：對橡皮來說虎克定律只近似成立。楊氏係數爲 2×10^6 N/m² 。

(c) 負載質量爲 60 g 時，用停錶測定時間，求橡皮繩體積作爲時間函數的公式。

橡皮繩不應長時間掛上負載，從而使它不必要地處於拉伸狀態。橡皮繩的振動振幅不應超過 15～20 mm 。