一九九二年第四屆亞太數學奧林匹亞試題解答評析

陳昭地
國立臺灣師範大學數學系所

一、引　　言

亞太數學奧林匹亞競試（APMO），其試題來源是來自各參與國，每年7～9月提供若干道試題，包括試題來源、解答方案及分段給分原則範例，寄到競試主席，再與常年的資深參與國（本屆爲墨西哥）之代表組成選題委員會，研究圈選五題，並以最高機密方式寄送各參與國代表。經由各參與國代表就其所屬國之競試委員會中，研擬討論依規程翻譯製作成自己國家的語言，並依規定時間內逕行公正辦理競賽與閱卷。我國參加一九九二年第四屆APMO已於民國八十一年三月九日早上9：30～13：30舉行，共有53位獲得亞太數學奧林匹亞研習推荐的學生參加；有關這一屆的前十名代表我國角逐第四屆APMO的成績；全體53位與賽的學生及此次的試題已分別出現於本刊（陳昭地，民81年），比上一屆更上一層樓我國獲得冠軍，十位學生代表獲得總統召見及4～10萬不等的獎學金，名至實歸。本文將進一步就此次的試題提出詳解並作簡要評析，以供將來輔導或準備類似競賽的參考。

二、試題解答與評析

問題1：

任給一個三角形，設其三邊長爲 a，b，c 而其周長的一半爲 s，亦即：$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，我們以 $s-a$，$s-b$，$s-c$爲三邊長得出第2個三角形，依此方式得第3個三角形，第4個三角形，…，直到所出現的三數不能作爲三角形的三邊長爲止，試問何種三角形才能使依上述方式不斷作出三角形而不會停止？（加拿大）

〔解一〕

(1)　考慮每次邊長及邊長和變動的情形

邊長			邊長的和
a	b	c	$2s$
$s-a$	$s-b$	$s-c$	s
$a-(s/2)$	$b-(s/2)$	$c-(s/2)$	$s/2$
$(3/4)s-a$	$(3/4)s-b$	$(3/4)s-c$	$s/4$
$a-(5/8)s$	$b-(5/8)s$	$c-(5/8)s$	$s/8$
	$\vdots$		$\vdots$

若上述過程可無限制地進行，則上表每個數都是正數，即得

$$\underbrace{\frac{s}{2}(1+1/4+1/4^2+\cdots+1/4^n)}_{\downarrow\ 2s/3}<a,b,c<\underbrace{s(1-1/4-1/4^2-\cdots-1/4^n)}_{\downarrow\ 2s/3},n\in N$$

所以 $a=b=c=2s/3$

(2) 顯然當 $a=b=c$ 時上述過程可無限地進行。

合併(1)，(2)得知當且僅當正三角形時，才能不斷地作出三角形。

〔解二〕

注意 $(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$

因而其每次邊長和折半遞減，且因 $(s-a)-(s-b)=b-a$（不妨設 $b\geq a$）

因而兩邊長之差恆爲定值。

故當 $b-a\neq 0$ 時，每次所得的邊長差將會超過周長此爲不可能；因此除了正三角形外，問題的過程終會停止。

評析：

1. 本題爲<u>加拿大</u>所提供，屬於簡易的直觀幾何題，在全部120位各國角逐代表中有55位（46%）得滿分（7分），平均值4.82分，得分率0.69，鑑別指數0.4；在全部五道題爲平均值最高最簡易的題目，其鑑別指數亦稱理想。
2. 我國全部53位參與競賽學生，本題有13位（25%）得滿分，平均值3.70分，得分率0.53，鑑別指數0.51，五道題中成績排序第三，與第2題相近，

但遠遜於第4題，但鑑別指數堪稱理想。

3. 代表我國角逐本屆APMO的前十名學生，有8位（80%）得滿分，平均值達6.2分，得分率0.89，在五道題中成績排序第三，略遜於第2、4兩題；在全部12個參與國中本道題獲得第2，略遜於韓國。

4. 解題主要概念：

- 每次所作的三角形，周長折半，邊長差不變。
- 利用各次能作三角形時，每邊長必為正數的條件，得出原來三邊長 a, b, c，跟半周長 s 的夾擊不等式。
- 再利用等比級數的特性求出極限值並得 $a=b=c=\dfrac{2s}{3}$。

5. 討論：

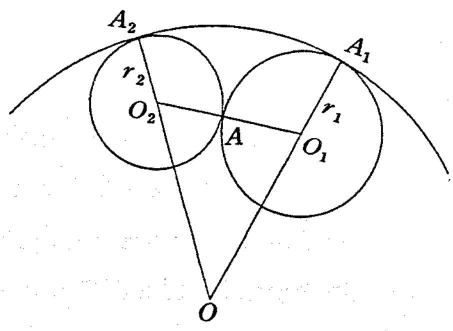
(1) 〔解二〕為設計國提供的參考解答，善用直觀性質，兩邊之差恒為定值，而周長折半減少，惟一能無限作的情況，僅限於邊長相差為0的正三角形而已（隱約含有極限的直觀概念），過程相當簡潔。

(2) 我國學生的解法都採用〔解一〕的方式，其前半段與〔解二〕相同，但在等比級數和的極限說明表達就經常顯示出不正確的概念或式子，欠缺直觀透析明顯事實的能力，並且顯示極限的基本概念之教學有待加強檢討改進。

問題2：

設圓 C 的圓心為 O 而半徑為 r，兩圓 C_1 與 C_2 的圓心分別為 O_1 與 O_2 而半徑分別為 r_1 與 r_2。若圓 C_1, C_2 分別與圓 C 內切於 A_1, A_2，而圓 C_1 與 C_2 互相外切於 A，試證三直線 OA，O_1A_2 與 O_2A_1 共點。（加拿大）

〔解一〕



在 $\triangle OO_1O_2$ 中，A_1，A，A_2 分別為 $\overrightarrow{OO_1}$，$\overline{O_1O_2}$，$\overrightarrow{OO_2}$ 上之三點

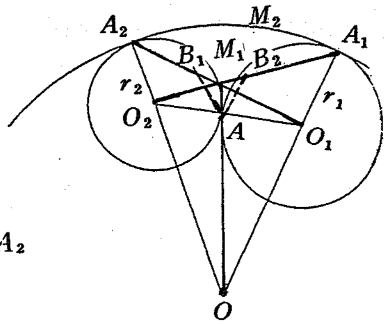
由於 $\dfrac{OA_1}{A_1O_1}\cdot\dfrac{O_1A}{AO_2}\cdot\dfrac{O_2A_2}{A_2O}$

$=\dfrac{r}{r_1}\cdot\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{r_2}{r}=1$

故由Ceva逆定理知OA，O_1A_2及O_2A_1三直線共點。

〔解二〕

連$\overleftrightarrow{OA}$，分別交O_1A_2及O_2A_1於M_1與M_2



僅須證明$M_1=M_2$；其證法如下：

(1) 過A作$\overleftrightarrow{AB_1}\parallel\overleftrightarrow{OA_2}$並交$\overline{O_1A_2}$於$B_1$，
作$\overleftrightarrow{AB_2}\parallel\overleftrightarrow{OA_1}$ 並交$\overline{O_2A_1}$於B_2

(2) 在$\triangle O_1AB_1$與$\triangle O_1O_2A_2$中，

$\because \overleftrightarrow{AB_1}\parallel\overleftrightarrow{OA_2}$，$\therefore \triangle O_1AB_1\sim\triangle O_1O_2A_2$

得$\dfrac{AB_1}{AO_1}=\dfrac{O_2A_2}{O_1O_2}$

$\therefore AB_1=\dfrac{r_1r_2}{r_1+r_2}$

(3) 同理，$AB_2=\dfrac{r_1r_2}{r_1+r_2}$

(4) 由(2)，(3)得$AB_1=AB_2$

(5) 在$\triangle OA_2M_1$及$\triangle AB_1M_1$中

$\because \overleftrightarrow{AB_1}\parallel\overleftrightarrow{OA_2}$

$\therefore \triangle OA_2M_1\sim\triangle AB_1M_1$

$\therefore \dfrac{OM_1}{AM_1}=\dfrac{OA_2}{AB_1}=\dfrac{r(r_1+r_2)}{r_1r_2}$

(6) 同理，$\dfrac{OM_2}{AM_2}=\dfrac{OA_1}{AB_2}=\dfrac{r(r_1+r_2)}{r_1r_2}$

(7) 由(5)，(6)得$\dfrac{OM_1}{AM_1}=\dfrac{OM_2}{AM_2}$

$\therefore M_1=M_2$

評析：

1. 本題也是加拿大所提供的幾何題，難度不高，在全部120位角逐競賽的各國代表中，有66位(55%)得滿分，爲得滿分最多的一題，平均值4.01 分，得

分率 0.57，鑑別指數高達 0.87，全部五道題中爲鑑別度最高的問題。

2. 我國53位參與競賽學生中，有23位（42%）得滿分，平均值3.89分，得分率0.54，鑑別指數0.82也是最高，在五道題中得分僅次於第4題。
3. 代表我國角逐本屆APMO的前十名學生，僅有1位被扣1分其餘9位（90%）都得滿分，得分率0.99，在五道題中得分最高。
4. 解題主要概念：
   - 相切圓的連心線長與圓半徑之關係式。
   - 西瓦定理及其逆定理。
   - 平行線截比例線段的性質。

討論：

(1) 全部角逐APMO各國代表中有20位（17%）得0分；而我國53位參與角逐前十名代表的53位學生，亦有15位（28%）得0分，突顯中學數學資優生在難易適中的幾何題具有很高的鑑別度。

(2) 有關西瓦定理或其逆定理，雖然在高中數學教材未曾出現，但因其內容與應用爲國際數學競賽經常用到的知識領域，上一屆的第一道幾何題亦可應用西瓦定理迅速求證（陳昭地，民80年），準備或輔導參加類似競賽活動必須加強重視。

(3) 證明方法(二)基本是現行國民中學選修數學的知識領域範圍，以方法(一)頗爲便捷且西瓦定理爲亞太數學奧林匹亞研習營專題探討的重點，參與我國競試的53位學生使用解法一的幾占半數。

(4) 〔解二〕中涉及同一證法，證明$M_1=M_2$，這方面的訓練應該加強。

(5) 在〔解二〕的同一證法，部分與賽學生透過坐標幾何或向量幾何來處理，這是國內學生解平面幾何的慣用技巧。

問題3：

設n是一個大於3的整數，我們從集合$\{2, 3, \cdots, n\}$中選出3個相異的數，將這3個數，用加或乘連結成算式，並可用括號區分加法與乘法的運算次序，但在每一個算式中選出的3個數恰好各出現一次，考慮用這種方式所得到的所有算式。

(a) 如果所選出的3個數都大於$\frac{n}{2}$，試證這樣的3個數所得到的所有算式的值都是不相等。

(b) 設 p 爲質數且 $p \le \sqrt{n}$，若選出的 3 個數中最小的是 p，而由這 3 數所得到的所有算式的值並不完全相異。試證這樣的 3 個數之選法總數恰等於 $p-1$ 的正因數之個數。（南韓）

〔解〕

設 a, b, c 爲被取出的三相異數，可令 $a < b < c$，其所可能結合成的算式共有八種：

(a) abc，$c(a+b)$，$b(c+a)$，$a(b+c)$，$a+bc$，$b+ca$，$c+ab$，$a+b+c$

除了 $a(b+c)$ 可能與 $a+bc$ 相等外，其餘兩兩不等

若 $a(b+c)=a+bc$，則 $(b-a)(c-a)=a(a-1)$

因此 $c-a \ge a$，故當 $a > n/2$ 時，這八個算式兩兩不等。

(b) 注意 $c-a \le a(a-1)$

因 $a=p \le \sqrt{n}$，其方法數恰爲 $p(p-1)$ 因正數個數之半即爲 $(p-1)$ 之正因數之個數（此地用到 p 爲質數）。

評析：

1. 本題爲南韓所提供，應爲難易適中的整數問題；在全部 120 位各國角逐的代表中有 19 位（16％）得滿分，平均值 2.32 分，得分率 0.33，鑑別指數亦高達 0.8；有 46 位（38％）得 0 分，在五道題中，得分僅略高於第 5 題。
2. 我國全部角逐前十名代表的 53 位參賽學生中，僅有 6 位（11％）得滿分，平均值僅 1.75，得分率 0.25，鑑別指數 0.59；得分情形僅略高於第 5 題。
3. 代表我國角逐本屆 APMO 的前十名學生，有 4 位（40％）得滿分，平均值 5.4 分；在十二個參與國中本題我國排名第一。
4. 解題主要概念：
   - 應特別重視問題核心所在，即應重視「瞭解問題」。
   - 三個正整數，用＋，× 或小括號結合的算式共有八種。
   - 判斷可能相等的算式。
   - 判斷 $\le \sqrt{n}$ 的質數 p 之方法數跟 $p(p-1)$ 的正因數個數關係。
   - 判斷當 p 爲質數時，$p(p-1)$ 的正因數的個數與 $(p-1)$ 的正因數的個數關

係。

5. 討論：

(1) 本題所涉及的數學知識領域範圍僅及高一上基礎數學第一章，問題敘述冗長，必須掌握問題核心，不可誤會題意，很大比例的學生未能得分之主因應歸咎於未清楚瞭解題意就茫然下手而致一無所得。

(2) 經常發現學生把簡易的數學問題想歪了！思考方向偏向高水準知識範圍或公式，不敢輕易使用直觀透視的方式，這可能跟平常學校的數學考試習慣有關。

(3) 解題過程有點類似離散數學處理方式。

問題4：

求滿足下列性質的所有正整數形成的數對 (h, s)：

在平面上先畫出 h 條不同的水平直線之後，再畫出具有(1)，(2)，(3)條件的 s 條不同直線：

(1) 這 s 條直線都不是水平的，

(2) 任二條直線都不平行，

(3) 這 $h+s$ 條直線中任意 3 條都不共點；

而且這 $h+s$ 條直線將平面分成 1992 個區域。（墨西哥）

〔解〕

畫出 h 條水平直線時，將平面分成 $h+1$ 個區域，然後每畫出一條非水平直線時，則增加 $h+1$ 個區域。我們發現每增加一條非水平直線時，則對每一非水平直線均再增加一個區域，因之，這 $h+s$ 條直線所形成的區域計有

$(h+1)+(h+1)+[(h+1)+1]+\cdots+[(h+1)+(s-1)]$

因之

$(h+1)+(h+1)+[(h+1)+1]+\cdots+[(h+1)+(s-1)]=1992$

設 $k=h+1$，即得

$k+k+(k+1)+\cdots+(k+(s-1))=1992$

故得

$s^2+(2k-1)s+2k-3984=0$

$$\Rightarrow s=\frac{-(2k-1)+\sqrt{(2k-1)^2-4(2k-3984)}}{2}$$

$r^2=(2k-1)^2-4(2k-3984)$ 時，r 爲奇數且 $r>2k-1$

整理之，得到

$(r-(2k-3))(r+(2k-3))=2^3\cdot 11\cdot 181$

$\Rightarrow k=990,\ r=1993;\ k=177,\ r=373;\ k=81,\ r=203$

$\Rightarrow s=1,\ s=10,\ s=21$

$\Rightarrow h=995,\ s=1;\ h=170,\ s=10;\ h=80,\ s=21$

評析：

1. 本題爲墨西哥所提供，屬於中偏易的代數題；各參與國的120位學生中，有51位（43％）得滿分，平均值4.31分，得分率0.62，鑑別指數頗高，爲0.83；得分及鑑別度在五道題中均排名第二。
2. 我國53位參賽學生中，有23位（43％）得滿分，9位（17％）僅被扣1分，接近滿分；平均值高達4.92分，得分率0.70，鑑別指數亦高，爲0.66，僅次於第2題；得分之高尤高於全部十二國最優秀學生120位代表。
3. 我國前十名代表角逐本屆APMO的學生，有7位（70％）得滿分，另3位亦接近滿分，平均值高達6.6分，得分率0.94，僅略遜於第2題；但在十二個參與國中，本題排名仍然第一。
4. 解題主要概念：
   - 依據題意求出這（$h+s$）條直線分割平面區域的算式。
   - 求解整係數一元二次方程式的正整數解。
   - 用到質因數惟一分解性質。
5. 討論：
   (1) 本題的類型經常出現於相關的參考書籍中，這應該是國內全體參與學生得分情況最好，解題方式亦佳的主要因素。
   (2) 本題亦須審愼瞭解題意，掌握問題中的條件，步步爲營，用基本標準的解題方式即可求得正確的解答。

問題5：

在各項都是不為零的整數且任意連續7項之和均為正數，而任意連續11項之和均為負數的所有數列中，試找出一個項數最多的數列。（紐西蘭）

〔解〕

數列−5，−5，13，−5，−5，−5，13，−5，−5，13，−5，−5，−5，13，−5，−5為滿足問題條件之數列，其長度為16項。

用S_n表示具有上述性質的n項實數列，僅須證明S_{17}決不能滿足問題的要求，因而S_n，$n \geq 17$也都無法滿足問題的要求。於是本題的答案就是16項。用$a_1, a_2, \cdots, a_{17}$表示S_{17}的各項，如果某一個S_{17}滿足問題要求時，把7個連續項所成的集合寫成如下形式：

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17}
\end{array}$$

上表中共有11列連續7項之和，其總和應為正數，但從上表中共有7行連續11項之和，其總和應為負數，此為矛盾，故知不存在S_{17}滿足問題條件的實數列，於是證明完成。

評析：

1. 本題為紐西蘭所提供，屬於中偏難的分析題，跟一九七七年第十九屆在南斯拉夫舉辦的國際數學奧林匹亞，越南所提供的第2題類似（胡炳生等，民80年），僅差一個符號正負對調，其餘題目本質不變。
2. 在所有參與競試國120位學生代表中，只有15位（13%）得滿分，而有68位（57%）得0分，平均值僅1.71分，得分率0.24，鑑別指數0.60尚稱理想，得分排列殿後，難度最高。
3. 我國53位參賽學生中，只有6位（11%）得滿分，而有27位（51%）得0分，9位（17%）僅得1分，平均值僅1.68分，得分率0.24，鑑別指數0.40，得分情況與全體參與國不相上下。

4. 前十名代表我國參加本屆APMO的學生，有3位（30％）得滿分，而有3位得0分，平均值3.7分，得分率0.53，得分情況殿後，難度最高。在十二個參與國中，排名第二，僅次於香港。

5. 解題主要概念：
   - 每連續11項的前4項之和必爲負數（11＝4＋7）
   - 每連續14項的前3項之和必爲正數（14＝3＋11）
   - 每連續15項的第1項必爲負數（15＝1＋7＋7＝4＋11）
   - 利用上述實際建造滿足問題條件的數列
   - 利用前三項結果可推證得最長是16項。

6. 討論：

(1) 依次將所求數列 $a_1, a_2, \cdots, a_{16}, a_{17}$ 排成如解答中7行11列的陣列，仍爲相當高招的辦法，可輕易得出至多16項。

(2) 答案中的16項數列可用下述方法建造出來〔胡炳生等，民80年〕：設想一個從最左看到最右，和從最右看到最左是一模一樣，得（$a_9=a_8, a_{10}=a_7, a_{11}=a_6$），且任7個連續項之和爲＋1，任11個連續項之和爲－1，則

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=1$$
$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=1$$
$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8=1$$
$$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7=1$$
$$a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6=1$$

可得 $a_1=a_8$, $a_2=a_8$, $a_3=a_7$, $a_4=a_6$

再由 $$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6=-1$$
$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6+a_5=-1$$
$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4=-1$$

得 $a_1=a_5$ 和 $a_2=a_4$

即得 $a_1=a_2=a_4=a_5=a_6=a_8$ 與 $a_3=a_7$

則此16項可寫成如下形式：

$a_1, a_1, a_3, a_1, a_1, a_1, a_3, a_1, a_1, a_3, a_1, a_1, a_1, a_3, a_1, a_1$

其中任一7個連續項 $5a_1+2a_3=1$，而任11個連續項 $8a_1+3a_3=-1$

得出 $a_1=-5$, $a_3=13$ 的整數解。

(3) 對於類似建構滿足給定條件的分析題，跟一般中學生的學習經驗偏離較遠，而為將來專攻數學常用的技術。

(4) 本題應爲考古題，在本屆賽後曾引起廣泛的爭論，希望往後儘量避免這種型式的類似題，惟本題在國內的學生僅有3～4位考前看過類似題，對整個競賽及甄選參加代表我國參加第三十三屆國際數學奧林匹亞的活動沒有太大的負面影響。

(5) 本題類似題香港IMO曾出現於其訓練課程中，這可能是香港本題獲第一且全部十二國中總分排名第二的重要原因。

三、結　論

根據上面的分析，跟前三屆比較，試題難度比較合理，鑑別指數亦趨理想。針對我國中學數學資優生的表現，固然值得欣慰，但仍需向下紮根，及早培養敏捷思考、直觀透視問題的能力，配合良好的升學政策，期待未來持續為國爭光，突顯我國的數學資優教育的聲譽。

參考資料

1. 陳昭地（民80年），一九九一年第三屆亞太數學奧林匹亞試題解答評析，科教月刊(143)，第2～17頁。

2. 陳昭地（民81年），第四屆亞太數學奧林匹亞競試成績報告，科教月刊（150期），第42～51頁。

3. 中華民國數學奧林匹亞委員會（民81年），1992年亞太數學奧林匹亞試題，科教月刊，（149期）第71～72頁。

4. 胡炳生等（民80年），國際奧林匹亞數學競賽（IMO）第一～三十一屆題解，九章出版社民國80年8月一版，第185～191頁。