國際物理奧林匹亞試題與解答(四)

傅祖怡　沈青嵩

國立臺灣師範大學物理系

第9屆(1976年於匈牙利布達佩斯)

1. 半徑 $R=0.5\,m$ 的空心球以角速度 $\omega=5\,S^{-1}$ 繞其垂直直徑旋轉(圖9.1)。在球內側高度為 $R/2$ 處有一小木塊同球一起旋轉。
   ($g=10\,m/S^2$)
   (a) 產生此一情況所需最小摩擦係數為多少?
   (b) 求 $\omega=8\,S^{-1}$ 時產生這一情況的條件。
   (c) 在以下兩種情況研究運動的穩定性:
   ①木塊位置有微小變動;②球角速度有微小變動。

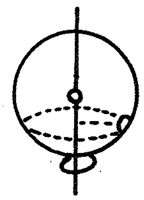


圖 9.1

解:此系統之平衡有二種臨界情況:

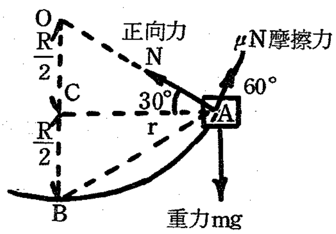
(1) 木塊將向下滑而未滑,此時受摩擦力向上,力圖如圖 a。

$\triangle ABC$ 全等於 $\triangle ACO$,故知 $\angle CAO=30^\circ$

水平方向:圓周運動所需向心力為

$$mr\omega^2 = N\cos 30^\circ - \mu N\cos 60^\circ$$

垂直方向:$mg = N\sin 30^\circ + \mu N\sin 60^\circ$



且 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$

圖 a

解得: $$\mu = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}g - \frac{1}{2}r\omega^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega^2 + \frac{1}{2}g}$$

即 $$\mu \geq \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}g - \frac{1}{2}r\omega^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega^2 + \frac{1}{2}g}$$ 時木塊不會下滑

(2) 木塊將向上滑而未滑,此時受摩擦力向下,力圖如圖 b。

水平方向:$mr\omega^2 = N\cos 30^\circ + \mu N\cos 60^\circ$

垂直方向：$mg+\mu N\sin 60^\circ = N\sin 30^\circ$

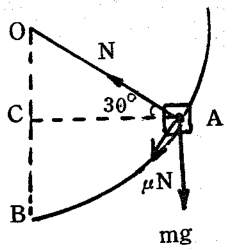


圖 b

解得：$$\mu=\frac{\frac{1}{2}r\omega^2-\frac{\sqrt{3}}{2}g}{\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega^2+\frac{1}{2}g}$$

即 $\mu\geq\dfrac{\frac{1}{2}r\omega^2-\frac{\sqrt{3}}{2}g}{\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega^2+\frac{1}{2}g}$ 時木塊不會上滑

由μ值恆為正可知：

當 $\frac{1}{2}r\omega^2<\frac{\sqrt{3}}{2}g$ 時即 $\omega<6.3\,s^{-1}$ 適用(1)情況

而 $\frac{1}{2}r\omega^2>\frac{\sqrt{3}}{2}g$ 時即 $\omega>6.3\,s^{-1}$ 適用(2)情況

故(a)中 $\omega=5\,s^{-1}$ 其保持平衡之條件為

$$\mu\geq\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times10-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0.5\times25}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0.5\times25+\frac{1}{2}\times10}\simeq0.22$$

即所需最小摩擦係數為0.22 ······················ Ans (a)

而(b)中 $\omega=8\,s^{-1}$ 保持平衡條件為

$$\mu\geq\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0.5\cdot25-\frac{\sqrt{3}}{2}\times10}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0.5\cdot25+\frac{1}{2}\times10}\simeq0.18$$

即此情況保持平衡摩擦係數至少為0.18 ·············· Ans (b)

(c) 依木塊將下滑或上滑之趨勢而有所不同：

(1) 在臨界情況(1)時：即小木塊將下滑而未滑時

① 木塊微向上移，它將返回，仍能保持平衡；但若微向下移，則將滑下，不再平衡。

② 角速度ω微增，仍能保持平衡；但若ω微減，則木塊下滑。

(2) 在臨界情況(2)時：即小木塊將上滑而未滑時

① 木塊微向上移，它將停留該處；而微向下移，則會返回。

② 角速度ω微增，木塊將向上滑；而ω微減，木塊保持平衡。

2. 有一底面積爲 $1\,dm^2$ 的圓筒，筒壁、活塞以及內部的隔板都是完全絕熱的。當右方壓強大於左方壓強時，隔板的閥門打開(圖9.2)。開始時有 12 g 氦氣在左方，有 2 g 氦氣在右方。左右兩方長度均爲 11.2 dm，溫度均爲0°C。外部壓強爲 $10\,N/cm^2 \simeq 100\,kPa = 1\,atm$。定容比熱爲 $C_V = 0.75\,cal/g\cdot k = 3.15\,J/g\cdot k$。定壓比熱爲$C_P = 1.25\,cal/g\cdot k = 5.25\,J/g\cdot k$。慢慢地把活塞推向隔板，當閥門打開時稍停片刻，爾後繼續緩慢推動活塞，直到達隔板爲止。求所作總功。
($1\,dm = 0.1\,m$)

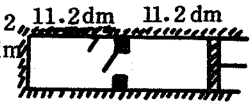


圖 9.2

解：① 由 $PV = nRT$ 求出初始之壓力：

$$P_{右} \times 11.2 = \frac{2}{4} \times 0.082 \times 273 \Rightarrow P_{右} = 1\ (atm)$$

$$P_{左} \times 11.2 = \frac{12}{4} \times 0.082 \times 273 \Rightarrow P_{左} = 6\ (atm)$$

② 活塞推向隔板，至 $P_{右}$ 漸增爲 6 atm 時閥門打開，此爲絕熱過程滿足

$PV^r =$ 常數 (其中 $r = \frac{C_P}{C_V} = \frac{1.25}{0.75} = \frac{5}{3}$)

$$1 \times 11.2^{\frac{5}{3}} = 6 \times V_{右}'^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{1}{6} = \left(\frac{V_{右}'}{11.2}\right)^{\frac{5}{3}} \Rightarrow V_{右}' = 3.82\ (dm^3)$$

由 $PV = nRT$ 得出此時右邊溫度 $T_{右}'$ 爲

$$6 \times 3.82 = \frac{2}{4} \times 0.082 \times T_{右}' \Rightarrow T_{右}' = 559\ (K)$$

此階段作功用以增加氣體的內能：$\Delta U = mC_V\ \ \Delta T = W_1$

$$W_1 = 2 \times 3.15 \times (559 - 273) = 1802\ (J)$$

③ 閥門打開，左右兩邊氣體混合，溫度變為

$$T_{混}=\frac{12\times273+2\times559}{12+2}=313.9\ (K)$$

此階段活塞停止，不作功。

④ 繼續推動活塞，直達隔板即從體積 $11.2+3.82=15.02\ dm^3$ 減為 $11.2\ dm^3$ 的絕熱過程，此過程應滿足 $TV^{r-1}=$ 常數

$$313.9\times15.02^{2/3}=T_{混}'\times11.2^{2/3}\Rightarrow T_{混}'=381.7\ (K)$$

此階段作功用以增加氣體內能

$$W_2=14\times3.15\times(381.7-313.9)=2990\ (J)$$

⑤ 在整個過程中，大氣壓力作用為 $W_{大氣}=P\Delta V$

$$1\times1.01\times10^5\times11.2\times10^{-3}\simeq1120\ (J)$$

⑥ 故所作總功為

$$W_1+W_2-W_{大氣}=1802+2990-1120=3672\ (J)\cdots\cdots\cdots Ans$$

3. 實心玻璃球內某處有一空氣泡，試述不破損玻璃球而確定氣泡直徑的方法。

解：① 利用密度。但由於在玻璃製作過程中添加不同種類不同量但金屬，都有不同的密度，故表列常數有相當程度的不確定。

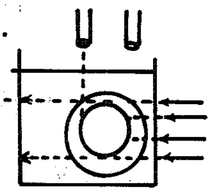
② 利用轉動慣量。確定玻璃球相對於軸線的轉動慣量，可確定氣泡直徑。

③ 用X射線。X射線不被玻璃折射，物體結構從X射線的投影中表明。

④ 用光學方法。以不接觸氣泡的光束，確定玻璃的折射率。再以"不倒翁效應"找出球心與氣泡中心的連線。

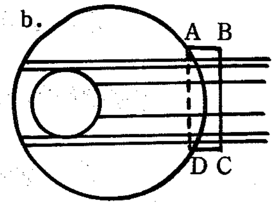
法 a. 將玻璃球浸在相同折射率的液體內，球形氣泡可視為處於平行板之內（如 a 圖），可以測微計或平行光束確定氣泡邊界。

a.



法 b. 在軸線一端給玻璃球密接一相同折射率的平凹透鏡（如 b 圖），ABCD成為平行平板，氣泡直徑可用平行光束測定。

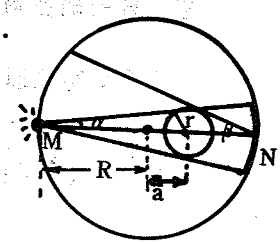
b.



法 c. 把光束聚焦在玻璃球表面M點（如c圖），在球內有來自M點的發散光束，但在氣泡周圍入射角大於某值時，發生全反射而經

氣泡折射的光束亦在界面發生部分反射部分折射。故在光線另一側的表面上有一較昏暗區域，形成一暗球面，測此區域得 α 角，同法在N得 β 角。

c.



由 $\sin\alpha=\dfrac{r}{R+a}$

$$\sin\beta=\frac{r}{R-a}$$

得 $r=2R\cdot\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$ ， $a=R\cdot\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\alpha}$

［實驗題］ 給定已知比熱的某液體，在液體內部有一不可溶解的晶態物質，可以利用一支溫度計和一支附有電熱器的試管。試確定晶態物質的熱學性質。

作法：先將液體加熱，再將晶態物質和液體一起加熱。繪出兩條時間—溫度曲線。由此不難得出晶態物質的比熱。若加熱過程中晶態物質熔化，亦可得共熔點和熔解熱。

第10屆（1977年於捷克斯洛伐克赫拉茨—克拉洛弗

1. 一台四衝程內燃機的壓縮比 $\varepsilon=9.5$，熱機抽運的空氣和氣體燃料的溫度爲27°C，在 1 atm＝100 kPa 壓強下的體積爲 V_0 ，如圖 10.1 ，從1～2是絕熱壓縮過程；從2～3混合氣體燃爆，壓強加倍；從3～4活塞外推，氣體絕熱膨脹至體積 $9.5\,V_0$；這時排氣閥門打開，壓強回到初始值 1 atm 。（壓縮比是氣缸最大與最小體積之比，並設 r 爲定壓比熱與定容比熱之比值）

   (a) 確定1、2、3、4態的壓強和溫度。

   (b) 求循環的熱效率。

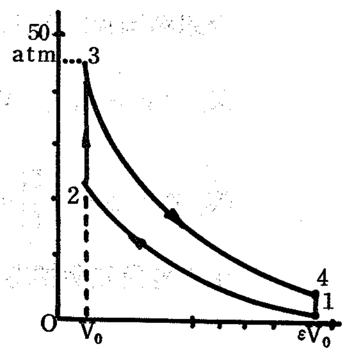


圖 10.1

解：(a) ① 狀態1時，$P_1=1\,\text{atm}$， $T_1=27+273=300$ (K)。

② 應用絕熱過程定律 $PV^{r}=$ 常數，求狀態2：

（∵空氣以雙原子分子為主，$r=\frac{7}{5}$）

$$1\times(9.5V_0)^{7/5}=P_2\times V_0^{7/5} \Rightarrow P_2=23.38(\text{atm})$$

由 $\frac{PV}{T}=$ 常數

得 $\frac{1\times 9.5V_0}{300}=\frac{23.38\times V_0}{T_2} \Rightarrow T_2 = 738.3\ (K)$

③ 狀態3時 $P_3=2P_2=2\times 23.38=46.76(\text{atm})$

因體積固定，故 $T_3=2T_2=2\times 738.3=1476.6\ (K)$

④ 以絕熱定律過程求狀態4

$$46.76\cdot V_0^{7/5}=P_4\cdot(9.5V_0)^{7/5} \Rightarrow P_4=2\ (\text{atm})$$

$$\frac{46.76\cdot V_0}{1476.6}=\frac{2\times 9.5V_0}{T_4} \Rightarrow T_4=600\ (K)$$

(b) 熱效率 $\eta=\frac{\text{對外作功之熱量}}{\text{吸收熱量}}=\frac{C_Vm(T_3-T_2)-C_Vm(T_4-T_1)}{C_Vm(T_3-T_2)}$

$$=1-\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}=1-\frac{T_1(\frac{T_4}{T_1}-1)}{T_2(\frac{T_3}{T_2}-1)}$$

由絕熱過程 $T_4V_4^{r-1}=T_3V_3^{r-1}$， $T_1V_1^{r-1}=T_2V_2^{r-1}$

又 $V_4=V_1$, $V_3=V_2$ 得 $\frac{T_4}{T_1}=\frac{T_3}{T_2}$

故 $\eta=1-\frac{T_1}{T_2}=1-(\frac{V_2}{V_1})^{r-1}=1-(\frac{1}{\varepsilon})^{r-1}=1-\varepsilon^{1-r}$

由本題所給數據得 $\eta=1-9.5^{-2/5}=0.593=59.3\%$ …… Ans

2. 一束白光以 $\alpha=30°$ 角射在肥皂膜上，反射光中波長 $\lambda_0=0.5\,\mu m$ 的綠光顯得特別明亮。

(a) 問薄膜最小厚度爲多少？

(b) 從垂直方向觀察，薄膜是什麼顏色？

（液體折射率 n＝1.33）見圖10.2。

解：(a) 平行光束中有一光線由A點入射，部分反射、部分折射到達B點，而部分在B點被反射經折射後在C點出射。而另一光線CD在C點反射，此二光線重疊。干涉後何種波長會增強則決定於相位差，在光束的A、D兩點具有相同的相位。

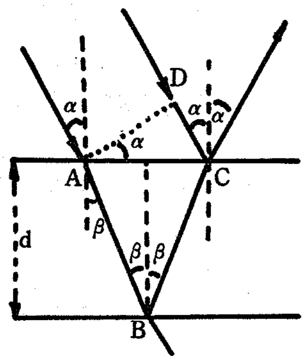


圖 10.2

光線由A經B到C，經第二表面反射的路程爲 $AB + BC = \dfrac{2d}{\cos\beta}$

在折射率爲n的介質中波長爲 $\dfrac{\lambda_0}{n}$，故 AB＋BC 上波數爲

$$\frac{2d}{\cos\beta}\Big/\frac{\lambda_0}{n} = \frac{2nd}{\lambda_0\cos\beta}$$

光線由D到C經第一表面反射的路程爲

$$DC = AC\sin\alpha + \frac{\lambda_0}{2} = 2d\tan\beta\sin\alpha + \frac{\lambda_0}{2}$$

（∵經光密介質反射，產生180° 相位差，相當於增加 $\dfrac{\lambda_0}{2}$ 之路程）

空氣中波長爲 λ_0，故 DC 上波數爲

$$\frac{2d\sin\beta\sin\alpha}{\lambda_0\cos\beta} + \frac{1}{2}$$

若波數差爲整數 m，則出現加強

即 $$m = \frac{2nd}{\lambda_0\cos\beta} - \frac{2d\sin\beta\sin\alpha}{\lambda_0\cos\beta} - \frac{1}{2}$$

又由司乃耳定律： $1\times\sin\alpha = n\times\sin\beta$ 代入化簡得

$$m = \frac{2nd}{\lambda_0\cos\beta}(1-\sin^2\beta) - \frac{1}{2} = \frac{2nd}{\lambda_0}\sqrt{1-\sin^2\beta} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2d}{\lambda_0}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 加強條件為 $\frac{4d}{\lambda_0}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = 2m+1$

欲求最小厚度薄膜，令m＝0，代入已知值 $\lambda_0 = 0.5\times10^{-6}$ m，n＝1.33，$\alpha = 30°$

得 $d = \dfrac{0.5\times10^{-6}}{4\sqrt{1.33^2 - 0.5^2}} \simeq 1.01\times10^{-7}\text{m} = 0.10\,\mu\text{m}$ ……Ans

(b) 對於垂直入射，若 m＝0，呈現極大增強的波長為

$$\lambda_0' = 4d\sqrt{n^2 - \sin^2 0°} = 4dn$$
$$= 4\times1.01\times10^{-7}\times1.33 \simeq 5.37\times10^{-7}\ (\text{m})$$
$$= 0.54\ (\mu\text{m})$$

此為一種稍帶黃色的綠光。即從垂直方向觀察，薄膜是黃綠色。……Ans

3. 如圖 10.3 所示，被 1000 V 的電位差加速的電子從電子槍發射出來，沿直線 a 方向運動，要求電子擊中在 α 方向（60°），距離槍口 d（5 cm）的靶M，對以下兩種情形求出所用的均勻磁場的磁感應強度B。

(a) 磁場垂直於由直線 a 與點M所決定之平面；

(b) 磁場平行於 TM。

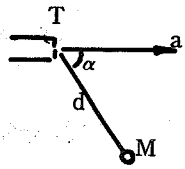
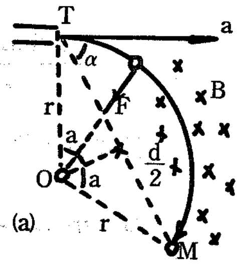


圖 10.3

解：(a) 能擊中靶M之電子軌跡應如右圖。由幾何考慮得電子之圓軌道半徑為



$$r\cos(90-\alpha) = \frac{d}{2}$$

即 $r = \frac{d}{2}\csc\alpha$

由能量守恆定律，電荷Q通過電位差V後速度 v 滿足

$$\frac{1}{2}mv^2 = QV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2QV}{m}}$$

作用於電荷Q上之羅侖茲力作爲圓運動之向心力

得　$QvB = m\dfrac{v^2}{r} \Rightarrow B = \dfrac{mv}{rQ}$

代入 r 及 v 得

$$B = \frac{m\sqrt{\dfrac{2QV}{m}}}{\dfrac{d}{2}\csc\alpha\, Q} = \frac{2\sin\alpha}{d}\sqrt{\frac{2mV}{Q}}$$

代入　$m = 9.1\times10^{-31}\,kg$ ，　$Q = 1.6\times10^{-19}\,C$ ，　$V = 1000\,V$ ，

　　$d = 5\times10^{-2}\,m$ ，　$\alpha = 60^\circ$

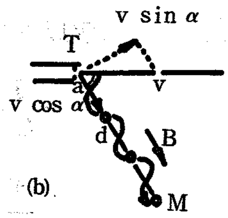
得　$B = 3.7\times10^{-3}\ T$ ………………… Ans

(b)　在此情況下分解 v 爲平行磁場方向 $v_\parallel$ 與垂直磁場方向 $v_\perp$ 。

$v_\parallel = v\cos\alpha$ ……此方向不受磁力等速前進

$v_\perp = v\sin\alpha$ ……此方向受磁力B作圓周運動

故此系統作螺線運動，如欲擊中靶 M 必須在 $v_\parallel$ 行進 d 時，$v_\perp$ 旋轉 n 整數周，即



(b)

$$\frac{d}{v\cos\alpha} = n\frac{2\pi r'}{v\sin\alpha}$$

$$= n\frac{2\pi\dfrac{mv\sin\alpha}{QB}}{v\sin\alpha} = n\frac{2\pi m}{QB}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

因此，所需磁感應強度爲：　$B = n\cdot\dfrac{2m\cos\alpha}{Qd}$

代入給定數據得　$B = 6.7\times10^{-3}n\ (T)$

［實驗題］　給定一個“黑盒子”，它有三個形狀相同的接頭 A、B、C，盒內有兩個電容 C_1、C_2 和一個電阻R，星形聯接（圖 10.4 ）。求出電阻值和電容值。你可以使用：頻率在 0.1 KHz ～ 10 KHz 的交流電源，一交流伏特計和一交流安培計。借助它們可以測量電源的交流電壓和黑盒子各接頭間

的交流電流，決定接頭間的阻抗以及阻抗對頻率的依存關係。

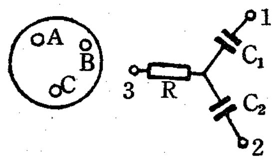


圖 10.4

作法：首先找出連接電阻的接頭。因另兩接頭間為純電容，其阻抗與頻率成反比。故變化頻率測量每對接頭間的阻抗，觀察阻抗與頻率的關係，即可找到對應圖中的1、2兩點。再用下法作進一步研究。

（法1） 在一固定頻率下測量 1、2 間電容器 C_1、C_2 的串聯阻抗

$$Z = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} \quad \cdots\cdots(1)$$

再在同一頻率下分別測量 1、3 和 2、3 間電阻電容之串聯阻抗

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$Z_2^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2 \quad \cdots\cdots(3)$$

解以上方程組得

$$\frac{1}{C_1} = \frac{\omega}{2Z}(Z^2 + Z_1^2 - Z_2^2)$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{\omega}{2Z}(Z^2 - Z_1^2 + Z_2^2)$$

將 C_1 或 C_2 代入(2)或(3)式可求得R

（法2） 連接 1、2 兩點，連接後等效電容為 $C_1 + C_2$，用兩個不同頻率測量接頭3和已連在一起 1、2 間的阻抗：

$$Z_A^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_A^2 (C_1 + C_2)^2}$$

$$Z_B^2 = R^2 + \frac{1}{\omega_B^2 (C_1 + C_2)^2}$$

消去 $(C_1 + C_2)$ 得 $R^2 = \dfrac{\omega_A^2 Z_A^2 - \omega_B^2 Z_B^2}{\omega_A^2 - \omega_B^2}$

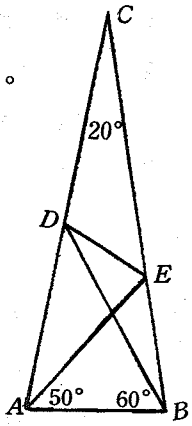
再由(2)或(3)式求出電容。

（下轉第54頁）

二、高雄市複賽試題(二)

1. 若 $0° < x < 180°$ 且 $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$，則 $\tan x = -\frac{p+\sqrt{q}}{3}$。

   試求：p，q 之值。



2. 如右圖，$\triangle ABC$ 爲等腰直角三角形，$AC = BC$，$\angle ABD = 60°$，$\angle BAE = 50°$ 且 $\angle C = 20°$，求 $\angle EDB$ 之度數。

3. 設一數列之前 n 項爲 $10^{1/11}$，$10^{2/11}$，$10^{3/11}$，…，$10^{n/11}$，試求一最小正整數 n，使上數列之前 n 項乘積大於 100000。

4. 設 m 爲一實數，若 x^2+mx+2 被 $x+1$ 除時，其餘式爲 R_1，而 x^2+mx+2 被 $x-1$ 除之，其餘式爲 R_2。

   試問：m 之值爲何時可使 $R_1 = R_2$。

5. 設 $x^3+ax^2+bx+c = (x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)$，試以 a，b，c 表示

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \end{vmatrix}^2$$

（上承第40頁）

（法3） 利用高頻時電容阻抗可忽略，低頻時電阻阻抗相對於電容可忽略的性質。選取儘量低頻作測量，可直接從阻抗計算電容值。

另一方面，選取儘量高頻作測量，可直接得電阻R。