教育部八十一學年度高級中學第二屆數學競賽決賽試題

國立臺灣師範大學數學系提供

競賽（一）試題

注意事項：

(1) 本試卷共三題，每題滿分 15 分。

(2) 考試時間：兩小時（ 10:00-12:00 ）。

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

問題1：

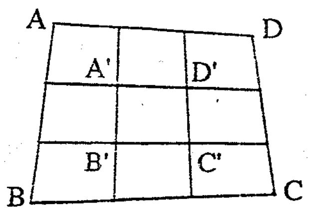
設 x，y，z 爲正整數，$2 \le x \le y \le z$。若 $yz-1$ 是 x 的倍數，$zx-1$ 是 y 的倍數，$xy-1$ 是 z 的倍數。試求出 x，y 與 z 的所有可能值。

問題2：

試求滿足 $8\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$ 及 $0 \le \theta < 2\pi$ 的所有 θ 值。

問題3：

設 $ABCD$ 爲一凸四邊形，各邊的三等分點相連如下圖，試證：中間的四邊形 $A'B'C'D'$ 的面積等於四邊形 $ABCD$ 面積的九分之一。



競賽（二）試題

注意事項：

(1) 本試卷共三題，每題滿分 15 分。

(2) 考試時間：兩小時（14:00-16:00）。

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

問題4：

若a,b,c,d爲正數，試證：$\dfrac{a+c}{a+b}+\dfrac{b+d}{b+c}+\dfrac{c+a}{c+d}+\dfrac{d+b}{d+a}\geq 4$，並討論等號成立的充要條件。

問題5：

在坐標空間中，令Σ表示以原點O爲球心，半徑爲a的球面，而$N(0,0,a)$是Σ的北極，令Π表示xy平面。定義一函數$f:\Sigma-\{N\}\to\Pi$如下：對於Σ上異於N的每個點P，若直線NP與平面Π交於Q，則令$f(P)=Q$。試證：若$\overline{P_1P_2}$爲Σ的一直徑，$P_1\neq N$，$P_2\neq N$，而$f(P_1)=Q_1$，$f(P_2)=Q_2$，則向量$\overrightarrow{OQ_1}$與$\overrightarrow{OQ_2}$的內積爲定值。

問題6：

令N_0表示所有非負整數所成的集合，而$f:N_0\to N_0$爲一函數。若$f(1)>0$，而且對所有$m,n\in N_0$，恆有

$$f(m^2+n^2)=(f(m))^2+(f(n))^2\text{。}$$

試求函數$f(n)$。

口試（B）試題　（每題滿分15分）

問題1：

在空間中，以一平面截一正立方體，可能截出的多邊形有那些不同的邊數？邊數相同者又有那些不同的形狀？

問題2：

在坐標平面上，

(1)　圓$x^2+y^2=2$是否有兩個坐標都是有理數的點？（此種點稱爲有理點。）

(2)　圓$x^2+y^2=3$是否有有理點？

(3)　對每個正數a，試討論圓$x^2+y^2=a$有有理點的充要條件。

獨立研究問題

1. 試求$f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$與$g(x)=x^{n+1}-nx+n-1$的最大公因式。

2. 設n是大於1的正整數，而$a_1,a_2,\cdots,a_n$爲n個正數。若$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+a_i}=1$，試證：$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{a_i}}$，並討論等號成立的充要條件。

3. 試證：若A，B，C，D是平面上四相異點，且直線AB與直線CD不垂直，則可分別過A與B作一對平行線，再分別過C與D作一對平行線，使得四直線相交成一個正方形。

4. 若三實數a,b,c滿足$a+b+c=2$及$bc+ca+ab=1$，試求abc的最大值與最小值。

5. 設a為一正數，試證：對每個有理數r，$0<r<1$，恆可找到無數多個有理數$\frac{x_1}{y_1}$及無數多個有理數$\frac{x_2}{y_2}$，使得

   (a) x_1, y_1, x_2, y_2都是有理數，且
   $$0<x_1<a<y_1 \text{，} 0<x_2<a<y_2 \text{。}$$

   (b) $\frac{x_1}{y_1}<r<\frac{x_2}{y_2}$。

6. 試證：對所有實數x、y，恆有
$$[x]+[2x+2y]\geq[2x]+[y]+[x+y] \text{。}$$

7. 試證：對每個$n\in N$，方程式$x^{2n+1}+(2n-x)(x+1)^{2n}=0$恰有一實根。

8. 在$\triangle ABC$中，若$\overline{AC}=1$，$\angle C=45°$，而且過A的高$\overline{AD}$、過B的中線$\overline{BE}$與$\angle C$的內角分角線$\overline{CF}$共點，試求$\triangle ABC$的其他邊長與其他角的度數。

9. 若$\triangle ABC$為一個三角形，而有一直線與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、直線BC分別交於相異點F、E、D，試證：$\triangle ABC$、$\triangle AEF$與$\triangle CDE$的垂心共線。

10. 設$m, n\in N$。試證：在前$n\cdot 2^m$個自然數所成的集合$A=\{1,2,\cdots,n\cdot 2^m\}$中，若$S$是$A$的子集且$S$含有$n\cdot(2^m-1)+1$個元素，則$S$中必有$m+1$個元素$a_0, a_1, \cdots, a_m$，使得：對每個$i=1, 2, \cdots, m$，恆有$a_{i-1}\mid a_i$。