教育部八十一學年度高級中學 數學競賽複賽試題特輯

國立臺灣師範大學數學系提供

壹、一、台北市複賽試題(一)

注意事項：

(1) 本試卷共四題；滿分爲49分。
第一題及第二題各11分，第三題13分，第四題14分。

(2) 考試時間：兩小時。

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

(5) 請將答案寫在答案卷內。

問題1：（11分）

試證：在一平面上可作出19條直線，使得其中無任何三線共點，而它們恰有92個交點。

問題2：（11分）

設S_1與S_2爲二非負實數。試證：對滿足$\sum_{i=1}^{n} d_i \leqq S_1+S_2$的任意$n$個非負實數$d_1, d_2, \cdots, d_n$，恆存在$2n$個非負的實數$X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leqq S_1 , \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i \leqq S_2 ,$$

且對每個$i=1,2,\cdots,n$，恆有$X_i+Y_i \geqq d_i$。

問題3：（13分）

設$f(x)$爲一實係數多項式，令$f^2(x)=f(f(x))$，$f^3(x)=f(f^2(x))$，$\cdots$，等等。試證：若有一個實數a及一個正整數n滿足$f^n(a)=a$，則必有一實數b滿足$f(b)=b$。

問題4：（14分）

若四邊形$ABCD$有內切圓，且$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$與內切圓分別切於P、Q、R、S，試證：$\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{PR}^2=\overline{BC}\cdot\overline{DA}\cdot\overline{QS}^2$。

二、台北市複賽試題(二)

注意事項：

(1) 本試卷共五題；滿分為21分。
第一、二、三、四題各4分，第五題5分。
第一題、第二題及第三題為填充題，第四題及第五題為證明題。

(2) 考試時間：壹小時。

(3) 計算紙必須連同試卷交回。

(4) 不可使用計算器。

(5) 請將答案寫在答案卷內。

問題1：（4分）

$\triangle ABC$為一正三角形，若其內部有一點P滿足$\overline{PA}=3$，$\overline{PB}=4$，$\overline{PC}=5$，則$\triangle ABC$的面積＝＿＿＿＿＿＿。

問題2：（4分）

在$(1+x+x^2)^{10}$的展開式中，x^{15}項的係數＝＿＿＿＿＿。

問題3：（4分）

在坐標平面上，對任意點$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，定義

$$d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|。$$

設$A(-14,12)$，$B(10,22)$為兩定點，且令

$$S=\{P \mid d(A,P)+d(B,P)=54\},$$

則集合S的圖形所圍區域的面積＝＿＿＿＿＿。

問題4：（4分）

試證：不存在三相異實數a，b，c同時滿足下列三等式：

$$ab+ca=a^2-1，bc+ab=b^2-1，ca+bc=c^2-1。$$

問題5：（5分）

若三實數a，b，c滿足$0<a,b,c<1/2$及$a+b+c=1$，試證：

$$\sqrt{a(1-2a)}+\sqrt{b(1-2b)}>\sqrt{c(1-2c)}。$$

貳、一、台北區複賽試題(一)

注意事項：

(1) 本試卷共4題；第1題10分，第2題、第3題及第4題各20分（滿分70分）。
(2) 競試時間：2小時
(3) 計算紙必須連同試卷交回
(4) 不可使用計算器

問題1：（10分）

設$H(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$n$為自然數，試證：當$n\geq 2$時，$n+\sum_{k=1}^{n-1}H(k)=nH(n)$。

問題2：（20分）

設$A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{1991}$在一半徑為1的圓周上，並且將此圓分成1992等分。

試求$\prod_{j=1}^{1991}\overline{A_0A_j}$之值。　（註：$\prod_{j=1}^{n}a_j=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$）

問題3：（20分）

設函數$f(x)$在區間(a,b)內有定義，且知$x_1, x_2\in(a,b)$時，下列不等式恆成立:

(*)　$f(x_1)+f(x_2)\leq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(a)　試證：當$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$為$(a,b)$內任意$n$個數，下列不等式恆成立：

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\leq nf\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}\right)$$

(b)　利用滿足(*)條件的函數$f(x)$及(a)的結果，證明：任意n個正數$a_1, a_2, \cdots, a_n$，下列不等式恆成立：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\geq n\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$$

問題4：（20分）

某工廠設計生產三種邊數相異，但每邊邊長及厚度相同的正多邊形磁磚，用來鋪滿平面地板，其鋪設方式為：

「除了鋪設地板邊緣地帶需將磁磚切割修整以符合地板邊緣形狀外，其餘中間部分均由這三種整塊的磁磚互不重疊地拼湊而成，且每一塊正多邊形的頂點都跟其他二種正多邊形的頂點接合在一起。」

設這三種磁磚的邊數分別為a, b, c且$a<b<c$，試求所有的a, b, c之值。

二、台北區複賽試題(二)

注意事項：

(1) 本試卷共6題；每題5分（滿分30分）

(2) 競試時間：1小時

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

(5) 請將答案塡在劃線空格內

1. 設 x，y，z 表示1，2，……，9中3個不相同的數字且知下列四位數的加法算式完全正確：

$$\begin{array}{r} x\ y\ y\ x \\ z\ x\ z\ y \\ +)\ y\ z\ x\ z \\ \hline x\ y\ y\ y\ z \end{array}$$

則　（ x，y，z ）＝（___，___，___）。

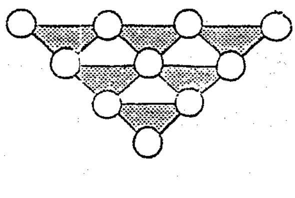
2. 正三角形 ABC 內有三個兩兩互相外切的等圓，且每個圓都跟 $\triangle ABC$ 的兩個邊相切。設圓的半徑爲1公分，則 $\triangle ABC$ 的周長爲________公分。

3. 設 P，Q 都在直角 $\triangle ABC$ 的斜邊 $\overline{AB}$ 上，且知 $\overline{PB}=\overline{CB}$，$\overline{QA}=\overline{CA}$，則（ $\angle BPC+\angle AQC$ ）的度數爲________；且若 $\triangle ABC$ 內切圓的直徑爲2公分時，則 $\triangle CPQ$ 的外接圓的直徑爲________公分。

4. 設 V 爲四個平面：$x=3$，$y=2$，$z=1$ 及 $3x+2y+z=26$ 所圍成的四面體，則 V 的體積爲________。

5. $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 爲一三次多項函數，且知 $P(1)=10$，$P(3)=30$，則 $\dfrac{P(11)-P(-7)}{18}$ 之值爲________。

6. 張三宣稱他可以將下圖中的十個圓格內分別塡上0，1，2，……，9十個相異數字，使得畫斜線的三角形之三頂點所塡數字和彼此相等。那麼張三所塡的正中央圓格的數字爲________。



叁、一、新竹區複賽試題(一)

注意事項：

(1) 考試時間：08：30 - 10：30

(2) 配分：第一題及第二題各16分，第三題17分

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

問題1：（16分）

在平面上給定一直線L及位於L異側的兩點P，Q。是否能在L上找到一點A，使得$|\overline{AP}-\overline{AQ}|$最大？試就$P$，$Q$位置分別證明你的答案。

問題2：（16分）

設$F(x)=(((x-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2$，此處共15層括號。求$F(x)$展開式中$x^2$項的係數。

問題3：（17分）

任給定n個正數$a_1,a_2,\cdots,a_n$。

求所有形如$\dfrac{1}{a_{i_1}\times(a_{i_1}+a_{i_2})\times\cdots\times(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n})}$的總和。

其中$i_1,i_2,\cdots,i_n$是$1,2,\cdots,n$的排列。（即$\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$）

二、新竹區複賽試題(二)

注意事項：

(1) 考試時間：10：50 - 11：50

(2) 配分：每題3.5分，共21分

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

1. 在互相垂直的兩個平面上各有一圓，它們的半徑都是13。若這兩個圓交於A，B兩點；且$\overline{AB}=10$，求這兩個圓圓心的距離是多少？答：__________

2. 由1，2，3，⋯，8八個數字排成一列所構成的八位數中有幾個是275的倍數？答：__________

3. 設正整數$N=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\cdots p_r^{k_r}$，其中$p_1,p_2,\cdots p_r$爲相異的質數，則$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{N}$共有幾組正整數解？答：__________

4. 設△ABC中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}$和$\overline{BC}$上的中線互相垂直。求△ABC的最大面積？
答：＿＿＿＿＿＿＿＿

5. 相距6的兩個平行平面上分別有矩形$ABCD$，矩形$A'B'C'D'$。已知$\overline{AB}\,/\!\!/\,\overline{A'B'}$，$\overline{AD}\,/\!\!/\,\overline{A'D'}$。$\overline{AB}=10$，$\overline{A'B'}=7$，$\overline{AD}=6$，$\overline{A'D'}=2$，連接$\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$，$\overline{CC'}$，$\overline{DD'}$成為一個六面體。此六面體的體積是多少？答：＿＿＿＿＿＿＿＿

6. 設三點A_1，A_2，A_3的坐標，分別為$A_1(0,0)$，$A_2(1,0)$，$A_3(1,1)$，若A_4在$\overline{A_1A_2}$上，且$2\overline{A_1A_4}=\overline{A_4A_2}$，$A_5$在$\overline{A_2A_3}$上，且$2\overline{A_2A_5}=\overline{A_5A_3}$，…，$A_{n+3}$在$\overline{A_nA_{n+1}}$上，且$2\overline{A_nA_{n+3}}=\overline{A_{n+3}A_{n+1}}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$的坐標是：＿＿＿＿＿＿＿＿

肆、一、花蓮區複賽試題(一)

注意事項：

(1) 考試時間：08：30 - 10：30

(2) 配分：第二題20分，第一題及第三題各25分（滿分70分）

(3) 計算紙必須連同試卷交回

(4) 不可使用計算器

問題1：（25分）

(1) 證明：任意m個連續正整數之連乘積必可被$m!$整除。

(2) 設a，n都是正整數。假設存在有理數r滿足$r^n=a$，證明：r必是一個整數。

問題2：（20分）

設z是複數。

(1) 問$z^6-2z^3+2=0$是否有實數解（即實根）？理由？

(2) 求$z^6-2z^3+2=0$的所有複數解（已知：$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$）。

(3) 設z_0，z_1，z_2，z_3，z_4，z_5是(2)中之六個解。

① 試問這六個點共圓嗎？圓心？半徑？

② 這六個點當中以那三個點當頂點，可造多少個正三角形？它們之間有何關係？

③ 求這種正三角形的面積？

問題3：（25分）

設△ABC之外接圓半徑爲R，內切圓半徑爲r，外接圓及內切圓兩圓心之距離爲d，試問：R,r,d之關係爲何？又任給內離之二圓，是否能找到一個三角形，使得外圓爲此三角形之外接圓，內圓爲此三角形之內切圓？

二、花蓮區複賽試題(二)

注意事項：

(1) 考試時間：10：50－11：50

(2) 計算紙必須連同試卷交回

(3) 不可使用計算器

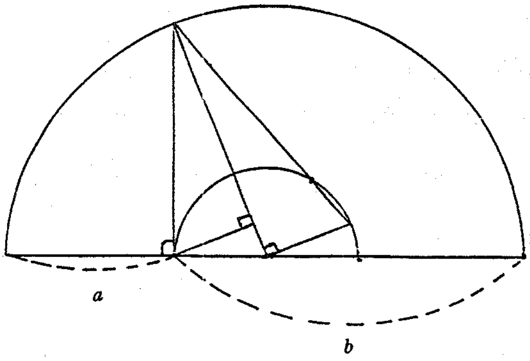
(一) 填充題：（每題4分）共20分

1. 已知平面$x+2y+3z=1$與單位圓$x^2+y^2+z^2=1$之截痕爲一個圓，則此圓的圓心爲__________，半徑爲__________。
2. 將a,a,a,b,b,b作一環狀排列共有__________種排法。
3. 方程式$2\sin 2x+2\sin x-2\cos x\leq 1$在$[0,2\pi]$上的解爲__________。
4. 設函數$f(x)$滿足對所有$h>0$，$x>0$時$|f(x)|\leq\dfrac{2a}{h}+\dfrac{bh}{2}$，其中$a>0$，$b>0$爲常數，則$|f(x)|$的最大值爲__________。
5. 設$3^x=5^y=15^{xy}$，其中x，y均爲實數，且$xy\neq 0$，則$x+y=$__________。

(二) 設$a>0$，$b>0$

1. 比較下列5個數目的大小

   $\dfrac{2ab}{a+b}$，$\dfrac{1}{2}(a+b)$，$\sqrt{(2a^2b^2)/(a^2+b^2)}$，$\sqrt{ab}$，$\sqrt{(a^2+b^2)/2}$ 並求出等號成立的充要條件。（4分）
2. 在1.的五個量中，試問$\sqrt{ab}$是那些量的幾何平均數？（2分）
3. 在下圖中，有兩個同心的半圓及一些垂直的線段，試找出儘量多的線段，它們的長度恰是1.中所給出的數目。（4分）



伍、一、台中區複賽試題(一)(每題二十分)

1. 定義 $F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，($n\geq 1$)，並且 $L_1=1$，$L_n=F_{n+1}+F_{n-1}$，($n\geq 2$)，證明 $F_{2n}=F_nL_n$

2. 如果天秤的兩個盤子都可以放砝碼，那麼至少要多少個砝碼才有辦法來量不超過40公克，且重量是整數公克的東西？

3. 設 α 為一實數，求：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha}{n}\\ -\frac{\alpha}{n} & 1\end{pmatrix}^n$

4. 設 A，B 為平面上的二個點，r 為自然數，且 $\overline{AB}=r$，設 P 為平面上的點，且 P 至 A 及 P 至 B 之距離均為整數：
   (a) 求 $|\overline{PA}-\overline{PB}|$ 之極大值。
   (b) 設 Q 為平面上之點，且 $|\overline{QA}-\overline{QB}|=n$，$n=0,1,2,\cdots,r$，試討論 Q 點之軌跡。
   (c) 平面上任意無限多個點，若其中任兩點的距離均為整數，求證這些點共線。

5. 試證每個正整數都有一個倍數其十進位表示法含有 $0,1,2,\cdots,9$ 十個數字。

二、台中區複賽試題(二)

1. (13分)若 α，β，γ 為 $\overrightarrow{OP}$ 之方向角，求 $3\sin\alpha+2\sin\beta+4\sin\gamma$ 之極大和極小值？

2. (16分)設 $f:R\to R$
   (a) 若 $f'_+(x_0)$，$f'_-(x_0)$ 存在，求證

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

(b) 若存在常數 $k>0$，使得對所有實數 x，y，不等式

$$|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|^2$$

恆成立，求證 f 爲一常數函數。

3. （16分）若 $u_n=(1+\frac{1}{n})^n$，n 爲自然數：

   (a) 求證 $u_n<u_{n+1}$

   (b) 若 $n>2$，求證 $2<u_n<3$

4. （13分）求證

$$\cos^8\theta+\sin^8\theta=\frac{1}{64}(\cos 8\theta+28\cos 4\theta+35)$$

5. （13分）若 a，b，c 爲 $\triangle ABC$ 之三邊，且 $(2a+3b+2c)(6ab+6bc+4ca)=108abc$，又 $4a^2+9b^2+7c^2=135$，求 $\triangle ABC$ 之面積？

6. （13分）投擲4個均勻骰子，一次出現二同面二異面的機率爲何？

7. （16分）數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足，$a_1=5$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1$：

   (a) 求 a_n

   (b) 求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$

陸、一、嘉義區複賽試題(一)（每題二十分）

1. 球面上 n 個大圓（即圓心是球心的圓），若任三圓均不共點，能將球面分爲幾個區域？

2. 證明存在1992個連續整數，每個均含有重複的質因子。

3. 設 $T_1=2$，$T_{n+1}=T_n^2-T_n+1$，$n>0$：

   (a) 試證 $T_{n+1}=1+T_1T_2\cdots T_n$

   (b) 設 $m<n$，求證 T_m，T_n 互質

   (c) 求

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{T_i}$$

4. 設 $n\geq 2$，證明

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不是整數。

5. 若A，B，C表示三角形三個角的弧度：

(a) 求證$A > \sin A$

(b) 若$\frac{\pi}{2} \leq B < \pi$，求證$A < \tan A$

(c) 求證$A \cos B + \sin A \cos C > 0$

二、嘉義區複賽試題(二)

1. （13分）設$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$，求$\sin\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\theta$之極大與極小值。

2. （13分）設x，y是實數，且$x^2+xy+y^2=1$，求x^2+y^2的最大及最小值。

3. （14分）設$(Z+1)^5+Z^5=0$之根為Z_k，$k=0,1,2,3,4$，以$Re(Z_k)$表示Z_k之實部，求證$Re(Z_k)=-\frac{1}{2}$。

4. （14分）設$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，且r_1,r_2,r_3為$f(x)=0$之三實根，$(s, f(s))$為f之反曲點，求證

$$s=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$$

5. （14分）投擲兩粒公正之骰子，其出現點數各為x，y，求x，y滿足

$$\begin{cases} x-y+2>0 \\ x+y-8<0 \end{cases}$$

之機率？

6. （16分）若$x_1=1$，$x_2=2$，$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$：

(a) 求證$1 \leq x_n \leq 2$

(b) 若$m>n$，求證$|x_m-x_n|<\frac{1}{2^{n-2}}$

7. （16分）設$f: R \to R$是一函數，且滿足下列條件：對所有x，$y \in R$，$\lambda \in [0,1]$，$f([\lambda x+(1-\lambda)y] \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

(a) 若$a<b<c$，求證

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(b) 若 f 在 x_0 可微分，求證

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\alpha(x)$$

α 是 x 的函數且

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x)=0$$

(c) 若 f 在 x_0 可微分，求證對任意實數 x，

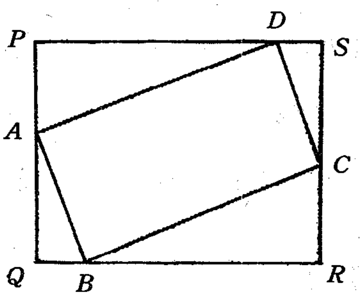
$$f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

恆成立

柒、一、台南區複賽試題(一)

1. 若 x，y，z 均爲正的質數，而且 $x^y+1=z$，試求 x，y，z。

2. 矩形 $ABCD$ 內接於矩形 $PQRS$，若矩形 $ABCD$ 的長與寬分別爲 $2m$ 與 $1m$，且矩形 $PQRS$ 的面積爲 $\frac{22}{5}m^2$，試求矩形 $PQRS$ 的周長？



3. 試判定是否存在正整數 m，n，p，使 $5^m+9^n=7p^2$；若存在，請舉出 m，n，p 之值；若不存在，請證明之。

4. 設函數 $f(x)$ 用 f_x 表示；當 $n \geqq 2$，定義 $\Delta f_x=f_{x+1}-f_x$，$\Delta^n f_x=\Delta(\Delta^{n-1}f_x)$，又當 $n \geqq 1$，定義 $x^{(n)}=x(x-1)\cdots(x-n+1)$，

(a) 若 f_x 爲 x 之 n 次多項式，試證 f_x 可以表示如下：

$$f_x=f_0+x^{(1)}\Delta f_0+\frac{x^{(2)}}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots\cdots+\frac{x^{(n)}}{n!}\Delta^n f_0。$$

(b) 若數列 $f_0=1$，$f_1=4$，$f_2=10$，$f_3=20$，$f_4=35$，$f_5=56$，試求 f_{10} 及 f_n。

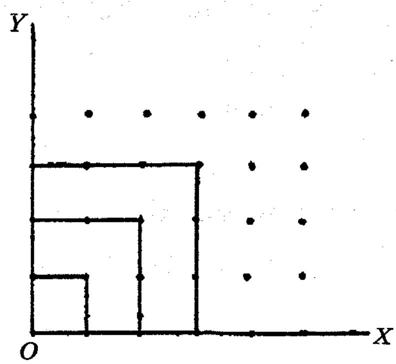
(c) 試求一函數 f_x 使 $\Delta f_x = x^3-2x^2+7x-12$ 。

二、台南區複賽試題(二)

1. 設 $i=\sqrt{-1}$ ，若 $i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+32i^{32}=A+Bi$ ，其中 A , B 爲實數，試求 A 與 B 之值。
2. 設一直角三角形其周長爲一定，試問在什麼情形下可使其斜邊爲最短？
3. 在直角坐標平面的第一象限中，將坐標都是整數的點依下列方式編上號碼：

第一點 (0,0)， 第六點 (1,2)，
第二點 (1,0)， 第七點 (2,2)，
第三點 (1,1)， 第八點 (2,1)，
第四點 (0,1)， 第九點 (2,0)，
第五點 (0,2)， ．．．．．．．

依照右圖箭頭順序，問第 1992 點的坐標是什麼？



4. 設 $16x+63y=1008$ ，試求 $\sqrt{x^2+y^2}$ 之極小值。
5. 設 x 爲實數，試求所有 x 值，使 $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$ 。
6. (a) 若 $f(x)$ 爲定義在實數集合的函數，且對於任意實數 a , b 恆有

$$f(a+b)=f(ab)\text{，且有 } f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\text{，試求 } f(1992)\text{？}$$

(b) 試求一整數 n ，使 n 爲最接近 1992 且爲一個等差數列中連續三項之乘積。

捌、一、高屏區複賽試題(一)

1. A , B , C 爲平面上圓心不共線的任意三個圓， P , Q , R 分別爲任二圓外公切線的交點。試證 P , Q , R 共線。
2. 平面上有 17 個點，任三點均不共線。今將此 17 個點兩兩以紅色筆或黃色筆或藍色筆連接起來（每線段祇有一種顏色）。試證：以這 17 點中任三點爲頂點的三角形中至少有一個三角形三邊同色。
3. 設 $X_1\geq X_2\geq X_3\geq X_4$ 且 $Y_1\geq Y_2\geq Y_3\geq Y_4$

試證： $X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3+X_4Y_4\geq X_1Y_3+X_2Y_4+X_3Y_2+X_4Y_1$ 。
4. 試證： $3^x+4^y=5^z$ 除 $x=2$, $y=2$, $z=2$ 外無其它整數解。

二、高屏區複賽試題(二)

1. 證明：若 n 爲大於 1 的整數，則 n^4+4 必不爲質數。
2. 對任意正整數 n，$(2+\sqrt{3})^n$ 均可表爲 $P+Q\sqrt{3}$ 的型式（P，Q 爲整數）；試證：P 爲最接近 $Q\sqrt{3}$ 的整數。
3. 下式中十個符號各代表由 0 至 9 的不同整數

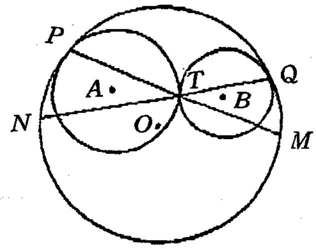
$$\begin{array}{r} D\&J \\ ANDREE \\ +\quad SEND \\ \hline CHEER \end{array}$$

若 $E^2=H$，請找出各符號所代表的數字（請找出所有可能的解）。

4. 試證 $\sin n\theta=\sin^n\theta\ \{C_1^n\cot^{n-1}\theta-C_3^n\cot^{n-3}\theta+C_5^n\cot^{n-5}\theta-\cdots\}$ 而 n 爲一正整數。
5. 設 $f(0,n)=n+1$，$f(k,0)=f(k-1,1)$，$f(k+1,n+1)=f(k,f(k+1,n))$，試求 $f(3,3)$。
6. 試證：$n(1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n-2})\geq(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})$，而 $a\geq0$。

玖、一、高雄市複賽試題(一)

1. 圓 A（以 A 爲圓心）及圓 B（以 B 爲圓心）外切於 T，另有一圓 O 分別和圓 A 及圓 B 內切於 P、Q，若 $\overrightarrow{PT}$ 交圓 O 於 M，$\overrightarrow{QT}$ 交圓 O 於 N，試證：$\overline{MN}$ 爲圓 O 之直徑。



2. $N=\underbrace{9999\cdots99}_{220\text{個}9}$，求 N^2 中各數字之和。
3. 令 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 爲一個 $1,2,3,\cdots,$ 之一重新排列，設 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$，且 $y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n$。

試證：$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\geq x_1y_{r_1}+x_2y_{r_2}+\cdots+x_ny_{r_n}$

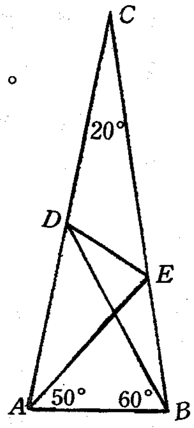
4. 設有 n 封寫好的信，任意放入 n 個已寫好收信人及地址之信封內，若每個信封能且只能裝入一封信。

試證：至少有一封信放對信封之機率大於 $\frac{1}{2}$（其中 $n\geq3$）。

二、高雄市複賽試題(二)

1. 若$0^\circ < x < 180^\circ$且$\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$，則$\tan x = -\frac{p+\sqrt{q}}{3}$。

   試求：p，q之值。



2. 如右圖，$\triangle ABC$爲等腰直角三角形，$AC = BC$，$\angle ABD = 60^\circ$，$\angle BAE = 50^\circ$且$\angle C = 20^\circ$，求$\angle EDB$之度數。

3. 設一數列之前n項爲$10^{1/11}$，$10^{2/11}$，$10^{3/11}$，…，$10^{n/11}$，試求一最小正整數n，使上數列之前n項乘積大於100000。

4. 設m爲一實數，若x^2+mx+2被$x+1$除時，其餘式爲R_1，而x^2+mx+2被$x-1$除之，其餘式爲R_2。

   試問：m之值爲何時可使$R_1 = R_2$。

5. 設$x^3+ax^2+bx+c = (x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)$，試以$a$，$b$，$c$表示

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \end{vmatrix}^2$$

（上承第40頁）

（法3）　利用高頻時電容阻抗可忽略，低頻時電阻阻抗相對於電容可忽略的性質。選取儘量低頻作測量，可直接從阻抗計算電容值。

另一方面，選取儘量高頻作測量，可直接得電阻R。