三角形面積分割線問題探討

鄭再添

國立臺灣師範大學附屬高級中學

一、前　言

本文是爲“三角形面積平分線探討”（鄭再添，民76年)的一則推廣，針對尺規作圖問題：『已知$\triangle ABC$及一點P，過P作直線將$\triangle ABC$面積分割爲所指定的比$a:b$，其中$\frac{a}{b}$爲一可作圖的實數』的解答個數判別法則，及系統的尺規作法進行探討。

有關的面積分割問題是歷年科展焦點之一，參考資料中(1)～(7)各篇得獎作品可供參考。陳鴻鑫等（民71年）對多邊形形上點的面積平分線作討論，王秋富等（民80年）進一步推廣到形上點的一般分割線情形。P在形內時，其解答個數可能非唯一。陳惠文等（民75年）及陳昱宏等（民76年）曾討論形內點的作法，但未就解答個數加以探索；任宗浩等（民75年）及陳昱宏（民79年）對解答個數已有觸及，可惜在作圖上未能關注。筆者在平分線的解答個數及系統的尺規作法上已獲突破（鄭再添，民76年）。在一般分割線的討論上，陳昱宏（民79年）雖已就包絡線觀點探討，但對解答個數的討論及尺規作法的統整上皆付闕如，故而促使筆者撰寫本文的動機，把個人的探討觀點及處理經驗提供給中學教師們做爲教學輔導參考。

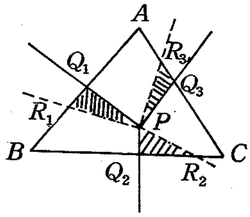
二、本　文

筆者由N等分線的作圖觀察著手，延續平分線之處理心得，嚐試在斜角坐標系中進行解析，再據以推廣判別法則及作法。爲了過程中便於描述，及在所謂“N等分”的意義上有所澄清，先對問題進一步加以說明：

㈠ 問題再界定

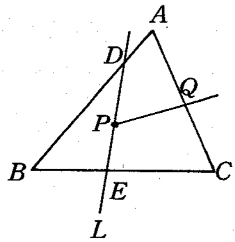
三角形的形狀並不影響問題的解答個數與作法，指定點P的相關位置則極具關鍵。試看三等分的情形：“過形上一點引直線將三角形面積三等分”是意義明確的問題，其解爲唯一；若將形“上”改爲“內”，因兩直線分割三角形成四塊區域，則問題意義喪

失！陳惠文等（民75年）及陳昱宏等（民76年）在作品中都未曾釐清問題即以偏蓋全，殊爲可惜。若再將“直”線改成“射”線，則又面臨無限多解之窘境！參見圖一所示，設 $\overrightarrow{PQ_1}$、$\overrightarrow{PQ_2}$ 及 $\overrightarrow{PQ_3}$ 三等分 $\triangle ABC$，則如圖作 $\triangle PQ_1R_1 = \triangle PQ_2R_2 = \triangle PQ_3R_3$ 即得另一組解 $\overrightarrow{PR_1}$、$\overrightarrow{PR_2}$ 及 $\overrightarrow{PR_3}$，如此仍使問題失去意義。



圖一

筆者排除上述紛擾的方法是：先過 P 作一三等分線，再進一步自 P 引射線將 $\triangle ABC$ 三等分，如圖二所示。一般 N 等分的情形仿此類推。如此已不致有無限多組解的情形發生，又可將注意力集中在 N 等分線上。（只要掌握 N 等分線，當可將 $\triangle ABC$ N 等分）。



圖二

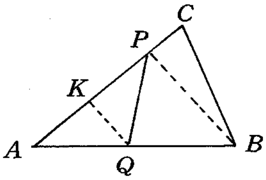
原問題所指定的比 $a:b$ 可以改述爲“$\lambda:(1-\lambda)$，$0<\lambda<1$，λ 爲一可作圖的實數”。若分割成的兩部分不特別強調前後項之分，則 λ 的範圍可再縮小爲 $0\leq\lambda\leq\frac{1}{2}$。又在實際觀察中可以發現，相對於 λ 與 $1-\lambda$ 值的分割線間關係密切，理當合併討論。對於有理數值的 λ，$\lambda=\frac{m}{n}$，可藉由對 N 等分的瞭解加以掌握。下文中利用 N 等分線進行觀察作歸納與推測，到了解析及作圖時，即就一般的 λ 值作論述。

(乙) 作圖觀察

無論 P 點在什麼位置，λ 的值又爲何，面積分割線必定與 $\triangle ABC$ 相交。若沿著 $\triangle ABC$ 的邊上取細分點，將過這些點相對於同一 λ 值的面積分割線一一畫出加以觀察，在解答個數的瞭解上具有“釜底抽薪”的功效！由此可見形上點面積分割線的作法基本而重要。茲特簡述如下：

(一) 基本作法（P 在形上，參見圖三）：

1. 於 P 所在的邊 $\overline{AC}$ 上取內分點 K，使得 $\overline{AK}:\overline{KC}=\lambda:(1-\lambda)$
2. 過 K 作 $\overline{KQ} /\!/ \overline{PB}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即所求。



$(\lambda=\frac{1}{3})$

圖三

以下是我們對 N 等分線觀察後的系列報告，等分線的作法多依上述爲之。

㈡ 平分線（$\lambda=\dfrac{1}{2}$）

如圖四所示，$\triangle ABC$ 的所有面積平分線覆蓋了整個三角形，中央交織成一片網狀的“心臟地帶”。心臟地帶的邊界曲線（即面積平分線所構成的包絡線）是爲三則雙曲線的部分圖形所構成。對圖四詳加研析，可就不同位置的 P 點的解答個數有相當明確的體認。茲利用圖五輔助，將觀察所得敍述如下：

心臟地帶內部的點（圖五中斜線區域）具三條面積平分線；邊界上的點除 R_1、R_2 及 R_3 外具兩條面積平分線；R_1、R_2、R_3 和其餘的點（包含形上及形外點）則具一條面積平分線。

有關詳細推導及驗證過程請參閱（鄭再添，民76年），在此引述之目的乃在於做爲進一步觀察推論之基石。

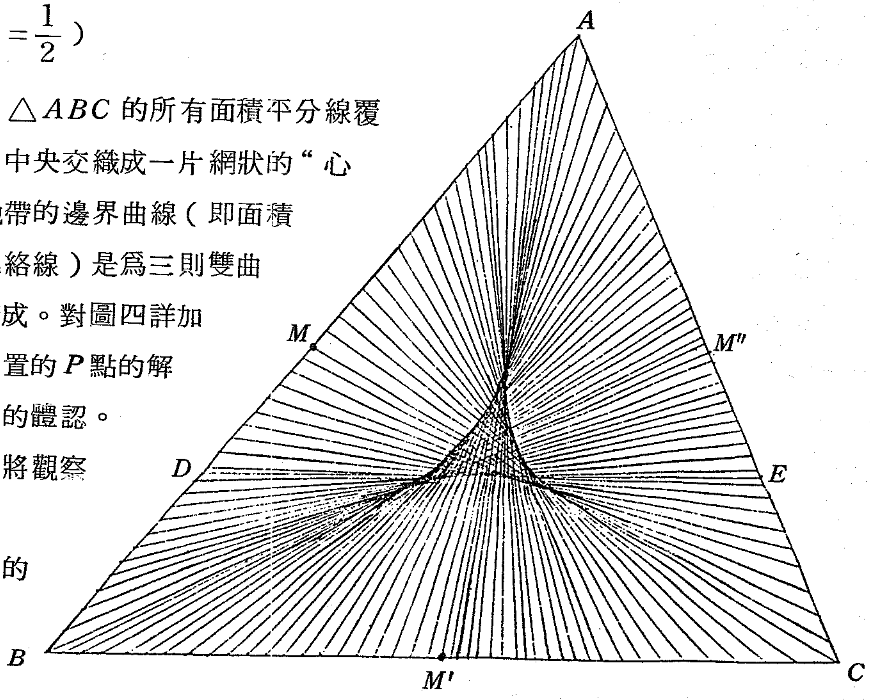


圖 四

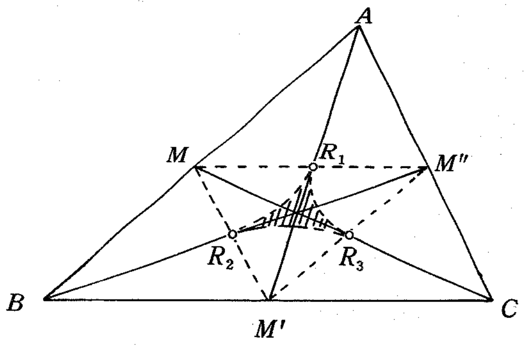


圖 五

㈢ 三等分（$\lambda=\dfrac{1}{3}$）

取三邊上的三等分點 D_1、D_2……D_6（參見圖六），則 $\overleftrightarrow{CD_1}$、$\overleftrightarrow{CD_2}$（即 ℓ_1、ℓ_2）爲過 C 點所作的三等分線；若就 $\angle A$ 而言，則 ℓ_1、ℓ_2 分別爲對應於 $\dfrac{1}{3}$（$=\lambda$）、$\dfrac{2}{3}$（$=1-\lambda$）值的分割線；或者說，ℓ_2 是對 $\angle B$ 的 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 的分割線，而 ℓ_1 則爲 $1-\lambda=\dfrac{2}{3}$ 者；m_1、m_2 及 n_1、n_2 的情形類同。若進一步作細分點的分割線，即可得如圖六的包

絡線。

仔細觀察可以看出，整個包絡線是由六條曲線兩兩相切於過頂點的分割線 ℓ_1、ℓ_2、m_1、m_2、n_1、n_2 及中點連線 $\overline{MM'}$、$\overline{M'M''}$、$\overline{M''M}$ 上；而由圖四的觀察經驗，當可大膽地推斷：這六條曲線也都是雙曲線的部分圖形。若使用刻度尺加以粗略驗證，類如上述之“包絡線（網狀地帶上的邊界）是所有面積分割線（相對於 λ 值）的中點所形成的軌跡”依然成立！三角形的中線、三邊中點連線、及過頂點的分割線在網狀地帶的位置掌握上，令人印象深刻而亟欲進一步印證。事實上，圖六所呈現的結果對於一般的 λ 值具有相當代表性。

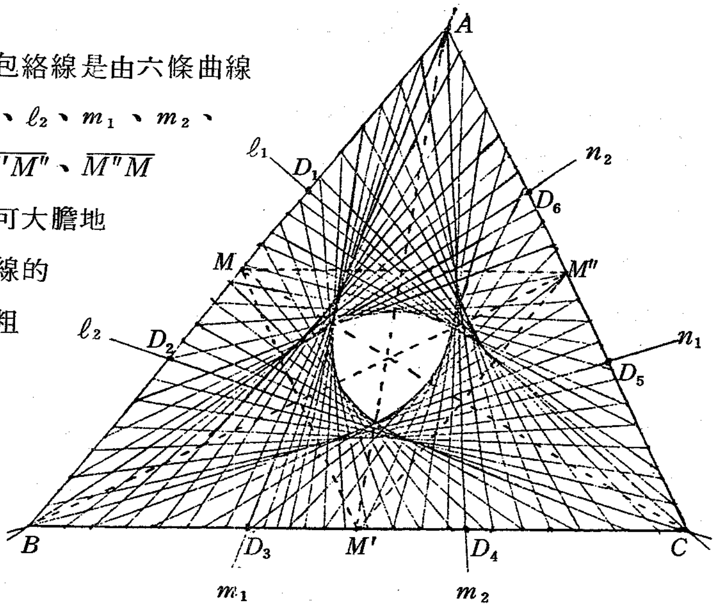


圖　六

圖六和圖四的最大不同處，在於中央部分。三等分的中空現象強而有力的警示我們：相對於 λ 值的分割線可能有“無解區域”存在！以“心臟地帶”的稱呼延用到圖六的網狀地帶似已不妥，以下將改用“網領區域”稱之。至於網領區域如何隨 λ 的值演化，在下文解析工作中將有針對此一要項之討論。

㈣　四等分

仿三等分時之作法，可得如圖七的四等分線的情形。乍看之下，它幾乎就是圖四與圖六的綜合體！事實上，$\lambda=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ 時，正是圖四的情形；而 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 與 $1-\lambda=\dfrac{3}{4}$ 所構成的包絡線，類如圖六之

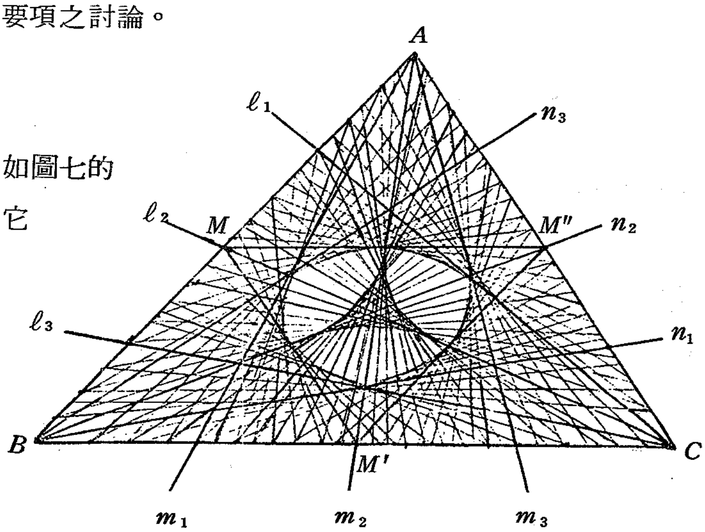


圖　七

$\lambda=\dfrac{1}{3}$ 及 $1-\lambda=\dfrac{2}{3}$ 者，只是中空部分範圍大些罷了。至於綱領區域的邊界，仍由雙曲線的部分圖形兩兩相切而成，且公切點都在三邊中點連線 $\overline{MM'}$ 、$\overline{M'M''}$、$\overline{M''M}$ 上；邊界上的每一點也都是某一分割線的中點。

㈤ 一般的 N 等分

經由上述觀察經驗，我們對五等分以上不再由細分點作實際的等分線，而直接根據各項心得加以推測。以五等分爲例，圖八所示即五等分線所構成的綱領區域概略圖：先取三邊上的等分點與對邊頂點連線，這些分割線與三中點連線的交點位置就是雙曲線間的公切點；再作三中線，雙曲線間另一類的交點（如圖十三之 F ）則恰在中線上！

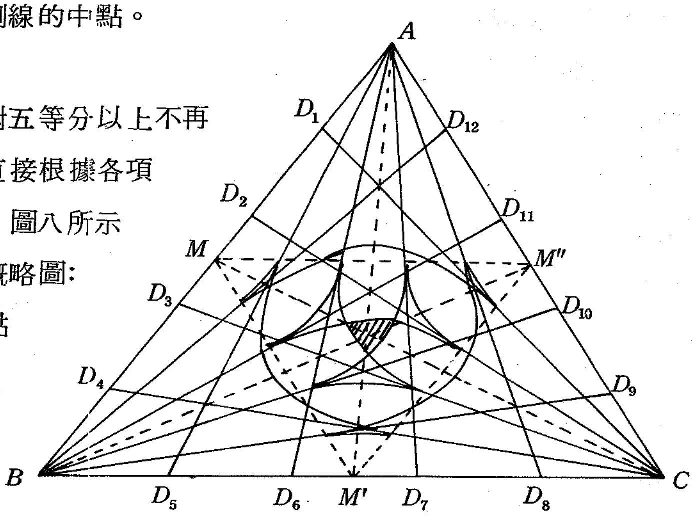
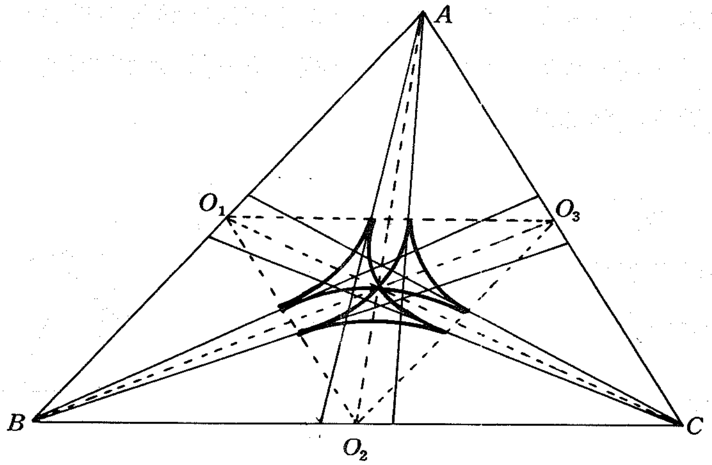


圖 八

掌握住上述各點即可開始描繪曲線；$\lambda=\dfrac{1}{5}$ 與 $1-\lambda=\dfrac{4}{5}$ 的六條是一組，$\lambda=\dfrac{2}{5}$ 與 $1-\lambda=\dfrac{3}{5}$ 則是另一組；雙曲線的對稱軸爲三內角平分線；根據上述切點、交點、及角平分線應不難把整個綱領區域概略地畫出草圖來。

圖八中央斜線部分所示是爲中空地帶，顯示相對於 $\lambda=\dfrac{2}{5}$ 値的無解區域。無解區域的演變從圖六、七及八三者之間互相對照可以隱約感受到：$\lambda=\dfrac{1}{5}$ 的無解區域比 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 者大，$\lambda=\dfrac{1}{3}$ 者更小，$\lambda=\dfrac{2}{5}$ 者又更小，到了 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 時早已交疊成圖四的“心臟地帶”了。

λ 的値爲多少時“中空地帶”恰好消失？我們的謎底是 $\dfrac{4}{9}$，參見圖九所示。中央三曲線的交點即 $\triangle ABC$ 的重心！詳細的討論且待下文㈣之㈣部分繼續分解。



$\lambda=\frac{4}{9}$　　　　$1-\lambda=\frac{5}{9}$

圖　九

觀察到此，對一般N等分線的情形已有一個相當程度的輪廓，茲試描述如下：

> 三角形的N等分線所構成的網領區域由3（$N-1$）條雙曲線的部分圖形兩兩相切於等分線的中點上而成。若N為偶數，則網領區域可分為$\frac{N}{2}$層；最外層為$\lambda=\frac{1}{N}$與$1-\lambda=\frac{N-1}{N}$的六條曲線，次一層則為$\lambda=\frac{2}{N}$及$1-\lambda=\frac{N-2}{N}$者，一直到最內層$\lambda=\frac{1}{2}$即形如圖四者。若N為奇數，則網領區域可分$\frac{N-1}{2}$層；由最外層$\lambda=\frac{1}{N}$依序往內至$\lambda=\frac{1}{2}-\frac{1}{2N}$。網領區域邊界上的每一點都是某一等分線的中點。換句話說，等分線所構成的包絡線就是這些等分線的中點形成的軌跡。若對每一內角而言，則有$N-1$條依序為$\lambda=\frac{1}{N}$、$\frac{2}{N}$、……$\frac{N-1}{N}$的曲線，它們以角平分線為共同對稱軸，以另兩頂點所引出的等分線與三邊中點連線的交點為始末端點。（參見圖八）

本文是對一般可作圖的實數λ的分割線進行探討，並不侷限於N等分。但透過對N等分的瞭解，當可據以推測一般λ值的情形。又觀察時似只注意到形內部分，很少提

及形外的情形，這是因爲任一分割線都可視爲包絡線（綱領區域的邊界）的切線的緣故。只要能弄清楚綱領區域，就可以完全掌握所有分割線！這一階段的觀察至此爲止，以下將進行解析，對上述諸多推測加以驗證。

㈣ 坐標解析

將$\triangle ABC$ 如圖十所示置於直角坐標系上，可導出（鄭再添，民76年）相對於$\angle C$ 的面積平分線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的包絡線方程式爲 $8xy-(8\cot r)y^2-ab\sin r=0$

若改成如下形式 $y(x-y\cot r)=\dfrac{ab}{8}\sin r$，即可看出兩漸近線恰爲 $\overline{AC}$（$y=0$）及 $\overline{BC}$（$x-y\cot r=0$）。

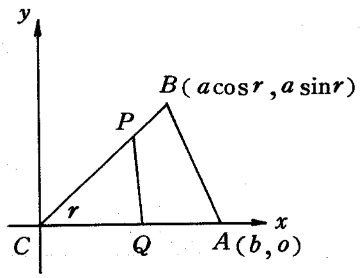


圖　十

若標準化則得 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{ab}{2}}\cos\theta}\right)^2-\left(\dfrac{y}{\sqrt{\dfrac{ab}{2}}\sin\theta}\right)^2=1$，其中 $\theta=\dfrac{r}{2}$ 。

上述結果是本文的重要經驗基礎。筆者嚐試使用斜角坐標系（參見(9), 360）處理，發現可使演算過程更趨簡明自然，在解決此類問題上比直角坐標系適性而貼切！

㈠ 斜角坐標系

由圖十一極易得知兩坐標系間之變換關係式爲

$$\begin{cases} x=\xi+\eta\cos r \\ y=\eta\sin r \end{cases}$$

或表成

$$\begin{cases} \xi=x-y\cot r \\ \eta=y\csc r \end{cases}$$

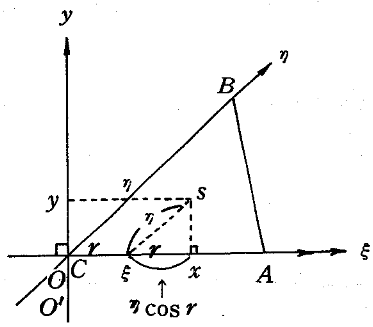


圖　十一

直角坐標系中之直線截距式求法，在斜角坐標系中仍然適用，兩點式的直線方程式求法亦依然有效。有興趣的讀者請自行驗證之。

㈡ 包絡線方程族

設 $\overleftrightarrow{PQ}$ 爲相對於 λ 值的分割線，如圖十二所示，取參數 t ，$\lambda\leq t\leq 1$ ，由截距式得 $\overleftrightarrow{PQ}$ 方程式爲

$$\frac{t\xi}{b\lambda}+\frac{\eta}{at}=1\ ,$$

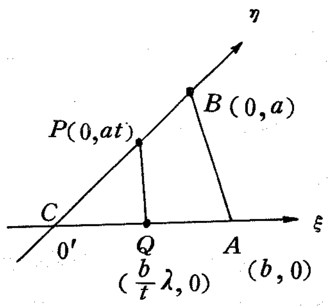


圖　十二

即　$at^2\xi+b\lambda\eta=ab\lambda t$ ………………… ①

對 t 微分得　$2at\xi=ab\lambda$ …………………… ②

則聯立①、②兩式解之，即得包絡線之參數方程式

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{b\lambda}{2t} & \cdots\cdots\cdots ③\\[2ex] \eta=\dfrac{a}{2}t & \cdots\cdots\cdots ④\end{cases}$$

這個結果驗證了“分割線所構成的包絡線就是這些分割線的中點形成的軌跡”，因爲點

$\left(\dfrac{b\lambda}{2t}、\dfrac{a}{2}t\right)$ 恰爲 $P(0,at)$ 及 $Q\left(\dfrac{b}{t}\lambda,\ 0\right)$ 的中點！

若進一步將③、④兩式相乘，即可消去參數 t 得 $\xi\eta=\dfrac{ab}{4}\lambda$，它的形式符合直角坐標系內所熟悉的雙曲線漸近方程式（參見(9)，391）。利用坐標變換則得

$$(x-y\cot r)(y\csc r)=\frac{ab}{4}\lambda$$

當 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 時，即爲前述(8)文中所獲致者！在意義上，“$\xi\eta=\dfrac{ab}{4}\lambda$”明白地告訴我們：$\angle C$ 的兩邊 $\overline{AC}$（$\eta=0$）及 BC（$\xi=0$）爲包絡線的漸近線，而角平分線（$\xi=\eta$）則爲其對稱軸。若將 λ 亦視爲參數，則它的意義即成“對應於角 C 所決定的分割線的包絡線族”！以 N 等分爲例，對 $\angle C$ 所決定的 $(N-1)$ 條包絡線的方程式就是

$$\xi\eta=\frac{ab}{4}\lambda,\qquad \lambda=\frac{1}{N}、\frac{2}{N}\cdots\cdots\frac{N-1}{N}$$

又由 t 的範圍 $\lambda\le t\le 1$ 可得起止點坐標爲 $\left(\dfrac{b}{2}、\dfrac{a}{2}\lambda\right)$ 及 $\left(\dfrac{b}{2}\lambda、\dfrac{a}{2}\right)$，這對(乙)部分之(五)中所謂曲線端點在“以另兩頂點所引出的分割線與三邊中點連線的交點上”也同時獲得印證。相對於 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的情形必然亦有相同的結論應無疑慮。使用斜角坐標系處理的便捷及統合功效著實令人振奮！

(三)　包絡線的公切線與切點

爲了驗證這些雙曲線呈兩兩相切於過三角形頂點的分割線的中點上，需要把對應於同一 λ 值而由不同內角所決定的雙曲線方程式一併求出。設 $\overline{P_1Q_1}$ 爲由 $\angle A$ 所決定的分

割線，$P_1\left(b-\frac{b}{t}\lambda,0\right)$，$Q_1(b-bt,at)$，$\lambda\leq t\leq 1$；則其包絡線方程式可仿上法算得 $\eta(a\xi+b\eta-ab)=-\frac{1}{4}a^2b\lambda$。同法對 $\angle B$ 爲之，設 $P_2(0,(1-t)a)$，$Q_2\left(\frac{b}{t}\lambda,a-\frac{a}{t}\lambda\right)$，$\lambda\leq t\leq 1$；則包絡線方程式爲 $\xi(a\xi+b\eta-ab)=-\frac{1}{4}ab^2\lambda$。若將六段曲線如圖十三所示命名，則它們的方程式分別爲

$$\alpha_1：\eta(a\xi+b\eta-ab)=-\frac{1}{4}a^2b\lambda$$

$$\alpha_2：\eta(a\xi+b\eta-ab)=-\frac{1}{4}a^2b(1-\lambda)$$

$$\beta_1：\xi(a\xi+b\eta-ab)=-\frac{1}{4}ab^2\lambda$$

$$\beta_2：\xi(a\xi+b\eta-ab)=-\frac{1}{4}ab^2(1-\lambda)$$

$$\gamma_1：\xi\eta=\frac{ab}{4}\lambda$$

$$\gamma_2：\xi\eta=\frac{ab}{4}(1-\lambda)$$

筆者以 α_1 與 β_2 爲例加以解說，其他情形類同，恕不贅述：

由 $\frac{\alpha_1}{\beta_2}$ 可得 $\frac{\eta}{\xi}=\frac{a\lambda}{b(1-\lambda)}$

以 $\xi=\frac{b(1-\lambda)}{a\lambda}\eta$ 代入 α_1 化簡，

則得 $\left(\eta-\frac{a\lambda}{2}\right)^2=0$

故
$$\begin{cases}\eta=\frac{a}{2}\lambda\\ \xi=\frac{b}{2}(1-\lambda)\end{cases}$$

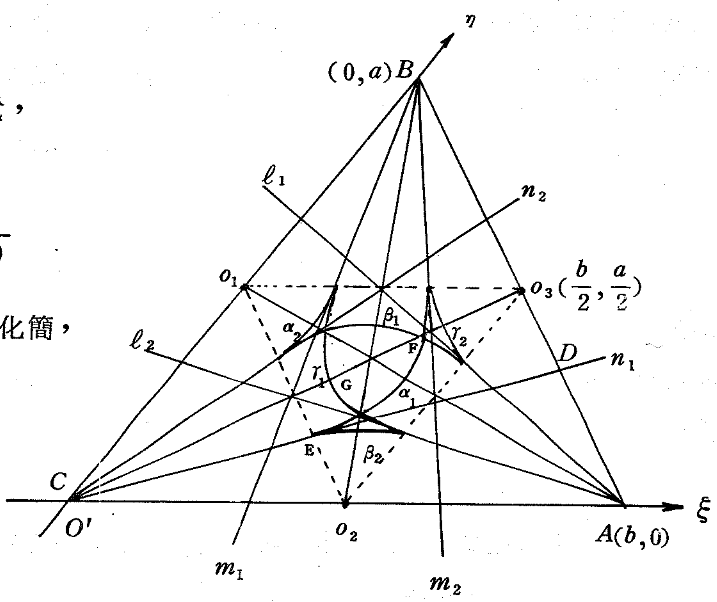


圖 十三

是爲圖十三中之E點坐標。而D點爲$(b(1-\lambda), a\lambda)$，故知E恰爲$\overline{CD}$中點。再由切線公式求α_1上過E的切線可得$a\lambda\xi=b(1-\lambda)\eta$，即分割線$n_1$的方程式。$\beta_2$在$E$點的切線方程式經計算結果亦同上式，故知$n_1$爲其公切線！

(四) 無解區域（中空地帶）

由類如圖十三中之兩曲線交點F坐標可對無解區加以探查：由$\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$可得$\dfrac{\eta}{\xi}=\dfrac{a}{b}$，

若以$\eta=\dfrac{a}{b}\xi$代入β_1化簡，則有$8\xi^2-4b\xi+b^2\lambda=0$，

故得　$\xi=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\lambda}}{4}\right)b$；由圖知$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-2\lambda}}{4}\right)b$不合所求，

故知F點坐標爲$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-2\lambda}}{4}b, \dfrac{1+\sqrt{1-2\lambda}}{4}a\right)$。

因中線$\overleftrightarrow{CO_3}$的方程式爲$a\xi=b\eta$，顯然$F$點恰在中線上！更重要的是：當$\lambda<\dfrac{4}{9}$時，$\dfrac{1+\sqrt{1-2\lambda}}{4}>\dfrac{1}{3}$，則$\overline{CF}:\overline{CO_3}$的值大於$\dfrac{2}{3}$；又若$\dfrac{4}{9}\leq\lambda\leq\dfrac{1}{2}$，則$\dfrac{1}{2}\leq(\overline{CF}:\overline{CO_3})\leq\dfrac{2}{3}$；其中$\lambda=\dfrac{4}{9}$時$F$點坐標爲$\left(\dfrac{b}{3}、\dfrac{a}{3}\right)$，即$\triangle ABC$的重心！隨著$\lambda$值的變化所衍生的綱領區域的演化情形可以如圖十四概略表示：

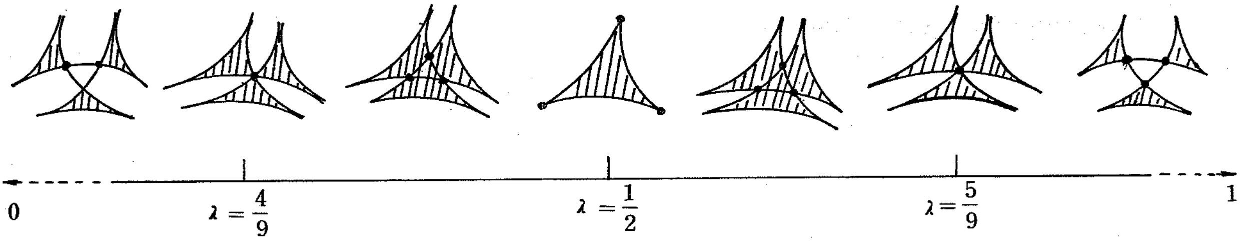


圖　十四

我們的結論顯然是：當$\dfrac{4}{9}\leq\lambda\leq\dfrac{5}{9}$時中空地帶不存在！

(五) 雙曲線的頂點位置

如圖十五所示，$\overleftrightarrow{CK}$爲$\angle C$的平分綫，其方程式爲$\xi=\eta$；由角平分線性質

$\overline{AK}:\overline{BK}=\overline{AC}:\overline{BC}$，知$K$點坐標爲$\left(\dfrac{ab}{a+b}、\dfrac{ab}{a+b}\right)$。

解聯立方程式 $\begin{cases} \xi=\eta \\ \xi\eta=\dfrac{ab}{4}\lambda \end{cases}$

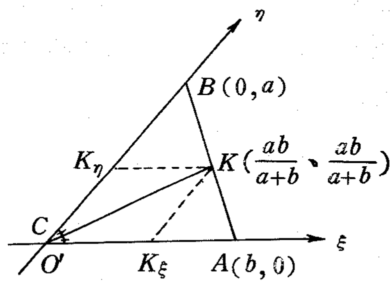


圖 十五

即得雙曲線 γ_1 的頂點坐標

$$J\left(\frac{\sqrt{ab\lambda}}{2},\ \frac{\sqrt{ab\lambda}}{2}\right)。$$

若進一步求 $\dfrac{\overline{CJ}}{\overline{CK}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{ab\lambda}}{2}}{\dfrac{ab}{a+b}}=\dfrac{(a+b)/2}{\sqrt{ab}}\sqrt{\lambda}$

它告訴我們：雙曲線頂點到曲線中心（角頂點）的距離與角平分線長的比值爲兩夾邊長的算術平均及幾何平均數的比值的 $\sqrt{\lambda}$ 倍！這裡面爲何同時看得到算術、幾何及調和平均的影子？當中隱含的幾何意義是什麼？值得進一步探討。

(丁) 解答個數

在討論作圖之前，有必要對解答個數做進一步釐清。由於面積分割線可視爲其包絡線的切線，承(乙)之(二)已提及平分線個數的部分申論，如圖十六所示，α、β、γ 分別表由 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所決定的曲線，各區域內標示者即區域之 P 點可對其引切線的曲線。至於 P 點對該曲線應有的切線數則根據下列原則作判斷：參見圖十七，P_1，P_2 是爲曲線的起止點，L_1 及 L_2 表由頂點引出的分割線，則平面上的點應對該段曲線引切線的個數即如圖內所標示者。詳細討論敬請參閱(8)文內容。

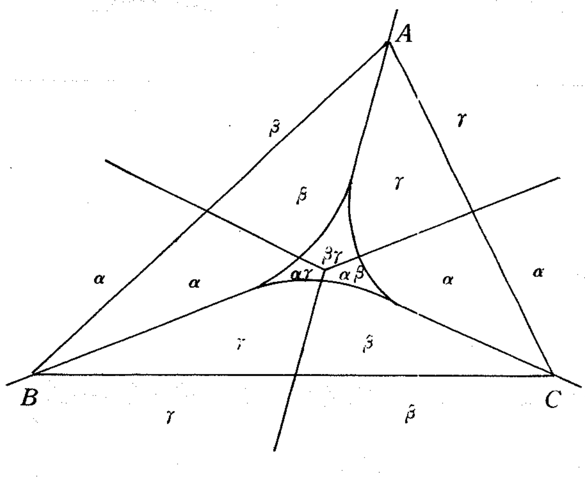


圖 十六

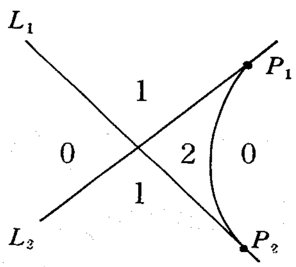


圖 十七

相對於一般 λ 值的分割線數可延伸上述方式進行標示。圖十八所示即仿圖十六情形將各區域標示出來，其中之右上標註碼表可對其作一條以上的切線數。綱領區域內進一步以圖十九為例局部放大以便標示，餘類推。

由上可以發現，綱領區域內部的點有四條分割線，區域外的形內點有兩條。而據圖五的經驗得知，邊界上的點會少一條，公切點本身再少一條！為了清楚起見，特將形內點的解答個數以圖二十表出：

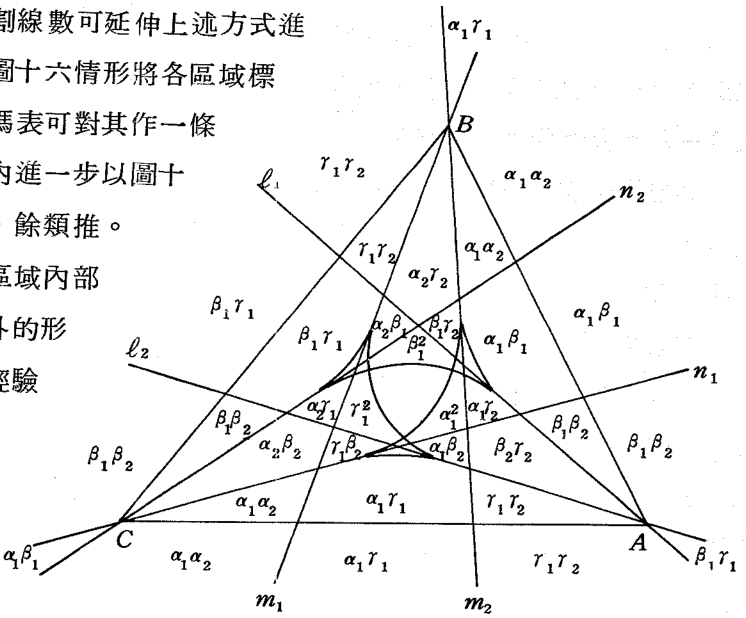


圖　十八

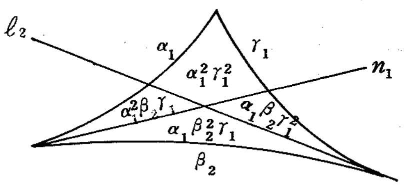


圖　十九

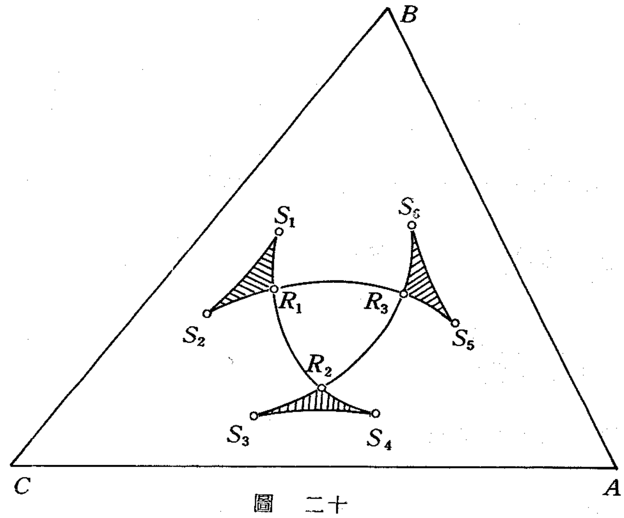


圖　二十

(1)　中空地帶內部的點無解；

(2)　中空地帶邊界上的點除 R_1, R_2, R_3 三點外恰有一解；

(3)　R_1, R_2, R_3 及 S_1, S_2, ……, S_6 等九點和綱領區域外的所有形內點有二解；

(4)　綱領區域中網狀部分的邊界點（不含上述九點）有三解；

(5)　標示斜線部分內的點有四解。

至於形上點及形外點方面，顯然的對於 λ 及 $1-\lambda$ 值都恰有一解，一如圖十八所示。只是N等分時在問題界定上有㈎中所述可能和形內點情形不同者。（形外點在N等分中 λ 與 $1-\lambda$ 者合併視同一組解）

其他因中空地帶的演化所衍生的不同狀況限於篇幅不作一一贅述，其判別原則如同上述。

㈢ 尺規作圖

利用尺規將解答明確呈現是問題的原始動機，也是最後目標。面積分割線可視爲其包絡線——雙曲線部分圖形的切線。對任意點P而言，如何使用尺規由P對雙曲線作切線是問題的主要癥結所在。

筆者引用雙曲線的相關性質（鄭再添，民76年）成功地經由主圓作圖，即可在未作出雙曲線圖形亦未求出切點的情況下直接畫出切線來！作法中須要確定的是：曲線中心、頂點及焦點三者的正確位置。

爲了確定雙曲線的頂點及焦點位置，我們需利用㈬之㈤部分所得結果。但因當時採斜角坐標系統行之，且對結果仍有未臻明瞭處，因此改以㈬之㈡中所得直角坐標系方程式 $(x-y\cot\gamma)(y\csc\gamma)=\dfrac{ab}{4}\lambda$ 進行標準化。即利用 $x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi$ 及 $y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi$ 將之旋轉到 (O, X, Y) 系統上，參見圖二十一所示，其中 $\varphi=\dfrac{\gamma}{2}$。則得

$$\left(\frac{X}{\sqrt{ab\lambda}\cos\varphi}\right)^2-\left(\frac{Y}{\sqrt{ab\lambda}\sin\varphi}\right)^2=1$$

由此可知，其貫軸長之半爲 $\sqrt{ab\lambda}\cos\varphi$，而焦點則在距曲線中心長

$\sqrt{(\sqrt{ab\lambda}\cos\varphi)^2+(\sqrt{ab\lambda}\sin\varphi)^2}=\sqrt{ab\lambda}$ 的地方。

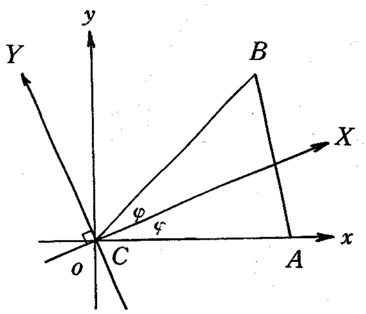


圖 二十一

根據上述結果，已可順利推廣平分線的尺規作法如下：

《作法》 參見圖二十二所示

1. 作 $\angle C$ 的平分線 $\overleftrightarrow{CD}$；
2. 延長 $\overline{AC}$，取E點使得 $\overline{CE}=\lambda\,\overline{BC}$，再以 $\overline{AE}$ 爲直徑作半圓，並過C作 $\overline{CF}\perp\overline{AE}$，$F$爲與圓弧的交點；（$\overline{CF}=\sqrt{ab\lambda}$）

3. 以 C 為圓心，$\overline{CF}$ 為半徑畫弧，與 $\overline{BC}$、$\overline{DC}$ 分別交於 G、H；
4. 過 G 作 $\overline{GI}\perp\overline{CD}$，$I$ 為其垂足；
5. 以 C 為圓心，$\overline{CI}$ 為半徑畫圓，再以 $\overline{PH}$ 為直徑畫圓，設兩圓交點為 Q；
6. 連 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 分割 $\triangle ABC$ 成面積比為 $\lambda:(1-\lambda)$ 的兩部分。

【討論】

1. 本作法對任意可作圖的實數 λ 皆能適用。
2. 步驟五中兩圓可有兩交點 Q 及 Q'，但 $\overleftrightarrow{PQ'}$ 顯然不符所求應不難判定。
3. 若上述兩圓不相交，則表示過 P 點無法對該段雙曲線作切線。當 P 在邊界附近(參見圖十八)時，不易準確判定對何曲線作切線而可能發生。此時可換對其他曲線再試，並不致因此而得到錯誤的解。

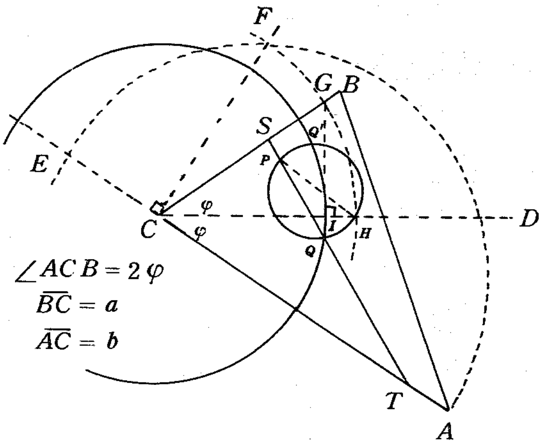


圖　二十二

三、結　　語

在平分線的探討階段裡，筆者運用相關的雙曲線性質解決了作圖問題，體驗到一股“學以致用”的感受，是該階段最大的收獲與慰藉。本文在推廣過程中嚐試採用斜角坐標系進行解析，得以迅速而確實地呈現問題，一舉獲得統整性的包絡線方程組。如此提綱挈領式地掌握解題原則，讓筆者領略到“庖丁解牛”般的悠然與自在，是另一種“以簡馭繁”的數學精神的體驗。學習運用解析幾何的魔力在綺幻的幾何世界裡探險，是中學教師在教學中可以嚐試的引導方向。

斜交坐標系尚有助於解決那些相關問題？如何由三角形推廣到一般多邊形的分割線上探討？仍待繼續努力。

四、參考資料

(1) 陳鴻鑫、陳思遠（民71年）：多邊形面積平分研究。第廿二屆中小學科展優勝作

品專輯（高中組），177～194。
(2) 洪芙萌等（民75年）：三角形的等分割。基隆市第廿六屆科展作品說明書（國中組佳作）。
(3) 陳惠文、黃國鈞（民75年）：面積分割——過定點任意等分三角形。第廿六屆全國科展作品說明書（國中組佳作）。
(4) 任宗浩等（民75年）：等分多邊形之面積與周長的最短路徑。第廿六屆中小學科展優勝作品專輯（高中組），127～137。
(5) 陳旻宏等（民76年）：*N*等分三角形面積研究。第廿七屆中小學科展優勝作品專輯（國中組），127～137。
(6) 陳旻宏（民79年）：三角形分割線形成的包絡線。第卅屆中小學科展優勝作品專輯（高中組），98～108。
(7) 王秋富、林凱揚（民80年）：多邊形形上點面積等分線探討。第卅一屆中小學科展優勝作品專輯（國中組）127～137。
(8) 鄭再添（民76年）：三角形面積平分線探討。數學傳播季刊，第 44 期，73～83。
(9) 洪萬生等譯（民74年）：簡明數學百科全書。九章出版社，學英文化事業有限公司出版。

（上承第28頁）

參考資料：

註一：Mary Jo Hall, 1992, Using a Laser Particle Counter to Enhance Sedimentology Laboratory Exercises: Jour. Geol. Education, V.40, no.2.

註二：國立臺灣師範大學科學教育中心，高級中學基礎地球科學及實驗手冊，民國八十年，八版。

註三：國立編譯館，國民中學地球科學，八十年版。
