國際物理奧林匹亞試題與解答(二)

傅祖怡　沈青嵩
國立臺灣師範大學物理系

第3屆(1969年於捷克斯洛伐克布爾諾)

1. 圖3.1的力學系統由三輛車組成，質量分別爲 $m_A=0.3\ kg$、$m_B=0.2\ kg$、$m_C=1.5\ kg$。

(a) 沿水平方向作用於C車的力F很大。使A、B兩車相對，C車保持靜止。求力F及繩的張力。

(b) C車靜止，求A、B的加速度及繩的張力。

忽略阻力和摩擦力，忽略滑輪和車輪的轉動慣量。

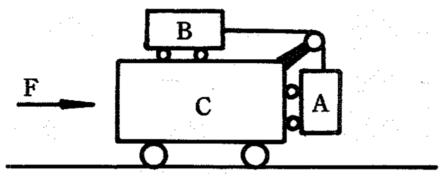
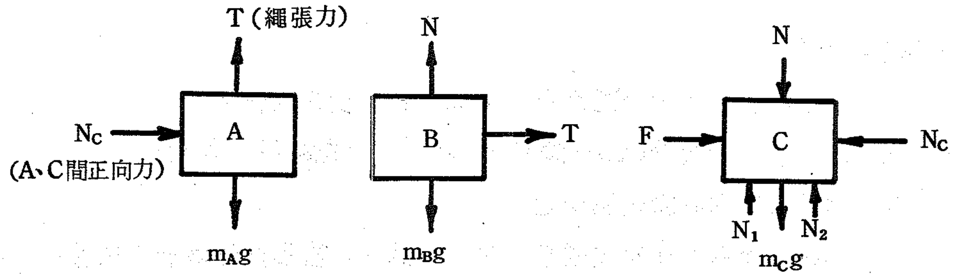


圖 3.1

解:(a) 以分離物體法分別分析 m_A、m_B、m_C 的受力情形:



因A、B相對C保持靜止，故A、B、C均僅以加速度 a 向右運動，得方程式:

$$\begin{cases} T=m_Ag \\ N_C=m_Aa \end{cases}\text{考慮A} \qquad \begin{cases} N=m_Bg \\ T=m_Ba \end{cases}\text{考慮B} \qquad F-N_C=(N+m_Cg)a\ \cdots\text{考慮C}$$

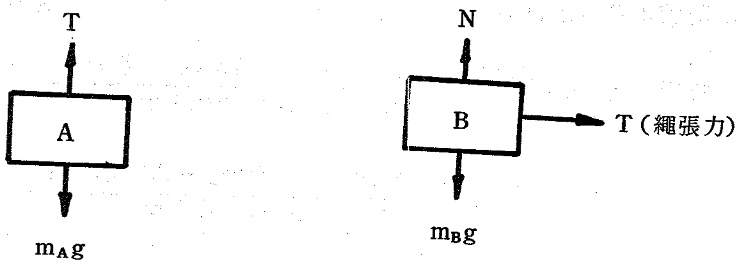
代入數據

$$\begin{cases} T=0.3\times9.8=2.94 \\ N_C=0.3\,a=4.41 \\ N=0.2\times9.8=1.96 \\ T=0.2\,a\Rightarrow a=14.7\,m/s^2 \\ F-N_C=\left(\frac{N}{g}+m_C\right)a \end{cases}$$

解得　$T = 2.94$（牛頓）…………………………………Ans　繩的張力

$F = N_C + (0.2 + 1.5)a = 29.4$（牛頓）……Ans　力F

(b)　同法，繪出力圖。但此時C車靜止，表不受力F



設A、B的加速度爲a，得方程式

$$\begin{cases} m_A g - T = m_A a \\ T = m_B a \end{cases} \qquad \text{代入數據} \begin{cases} 0.3 \times 9.8 - T = 0.3a \\ T = 0.2a \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 5.88\ (m/s^2) \\ T = 1.176\ (N) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ans}$$

2. 在質量爲 m_1 的銅量熱器中裝有質量爲 m_2 的水，共同的溫度爲 t_{12}；一塊質量爲 m_3、溫度爲 t_3 的冰投入量熱器中（圖3.2）。試求出在各種可能情形下的最終溫度。計算中 t_3 應取負值。銅的比熱 $C_1 = 0.1$ Kcal/kg・℃，水的比熱 $C_2 = 1$ Kcal/kg・℃，冰的比熱 $C_3 = 0.5$ Kcal/kg・℃，冰的熔解熱 $L = 80$ Kcal/kg。

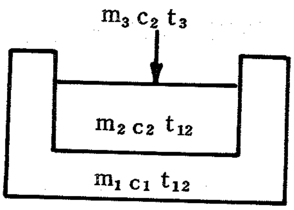


圖 3.2

解：可能存在三種不同的終態：(a)只有水，(b)只有冰，(c)冰、水共存。

(a)　在此情況下最終溫度 $t_a > 0$，

冰溫度升高，熔解爲水，溫度再升高所吸收的熱量＝水與量熱器放熱

$$m_3C_3(0 - t_3) + m_3L + m_3C_2(t_a - 0) = m_1C_1(t_{12} - t_a) + m_2C_2(t_{12} - t_a)$$

代入數值：$-0.5m_3t_3 + 80m_3 + m_3t_a = 0.1m_1(t_{12} - t_a) + m_2(t_{12} - t_a)$

$$\text{解得} \quad t_a = \frac{0.1m_1t_{12} + m_2t_{12} + 0.5m_3t_3 - 80m_3}{0.1m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{0.1m_1t_{12} + m_2t_{12} - 0.5m_3|t_3| - 80m_3}{0.1m_1 + m_2 + m_3}$$

(b) 在此情況下最終溫度 $t_b < 0$，

冰溫升高吸熱＝量熱器降溫放熱＋水降溫凝固再降溫放熱

$m_3C_3(t_b-t_3)=m_1C_1(t_{12}-t_b)+m_2C_2(t_{12}-0)+m_2L+m_2C_3(0-t_b)$

代入數值：$0.5m_3(t_b-t_3)=0.1m_1(t_{12}-t_b)+m_2t_{12}+80m_2-0.5m_2t_b$

解得 $$t_b=\frac{0.1m_1t_{12}+m_2t_{12}+0.5m_3t_3+80m_2}{0.5m_3+0.5m_2+0.1m_1}$$

$$=\frac{0.1m_1t_{12}+m_2t_{12}+80m_2-0.5m_3|t_3|}{0.5m_3+0.5m_2+0.1m_1}$$

(c) 在此情況下最終溫度 $t_c=0$

註：各種情況發生的條件為：

(a) 由 $t_a>0 \Rightarrow (0.1m_1+m_2)t_{12}>80m_3+0.5m_3|t_3|$

(b) 由 $t_b<0 \Rightarrow (0.1m_1+m_2)t_{12}<-80m_2+0.5m_3|t_3|$

(c) 由上述兩條件得 $80m_3+0.5m_3|t_3|<(0.1m_1+m_2)t_{12}<-80m_2+0.5m_3|t_3|$ 時發生冰、水共存。

即當 m_1，m_2，t_{12} 愈大則終態愈可能為水，反之則愈可能為冰，其臨界條件則為冰、水共存。

3. 在鉛垂面上有半徑 R＝5 cm 的線圈（見圖3.3）。質量 m＝1 g 的小球繫在長度為 ℓ 的絕緣輕繩上，以線圈的最高點懸掛者。當線圈和小球二者都帶有 $Q=9\times10^{-8}$ C 的相同電量時，發現小球在垂直線圈平面的稱軸上處於平衡。求繩的長度。

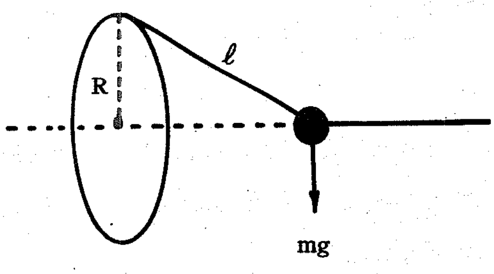
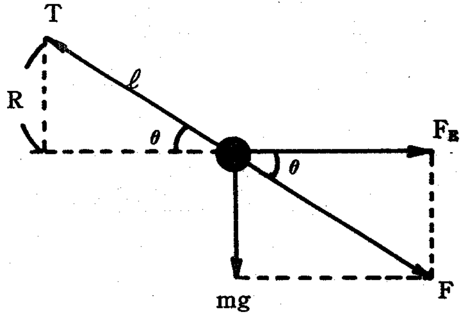


圖 3.3

解：小球受靜電力、重力、繩張力而達力平衡如右圖：

可見 F_E 與 mg 的合力應與張力 T 大小相等、方向相反。



其中靜電力 $F_E=\frac{kQQ}{\ell^2}\cos\theta=\frac{9\times10^9\times(9\times10^{-8})^2}{\ell^2}\cos\theta$

重力 $mg=10^{-3}\times9.8\,(N)$

所以 $\sin\theta=\frac{R}{\ell}=\frac{mg}{T}=\frac{mg}{F_E\sec\theta}=\frac{9.8\times10^{-3}}{\frac{7.29\times10^{-5}}{\ell^2}}=\frac{5\times10^{-2}}{\ell}$

由此可求得 $\ell^3=\frac{5\times10^{-2}\times7.29\times10^{-5}}{9.8\times10^{-3}}=3.7\times10^{-4}$

$\ell=0.072\,(m)=7.2\,(cm)$…………Ans 繩長

4. 一塊玻璃平板放置在邊長 2 cm 的玻璃立方體上，二者之間有一層平行的薄空氣隙。波長在 0.4 μm 到 1.15 μm 之間的電磁波垂直入射到平板上，經空氣隙兩邊表面反射而發生干涉。在此波段中只有兩種波長獲得極大增強，其一是 $\lambda_1=0.4\,\mu m$。求空氣隙的厚度。

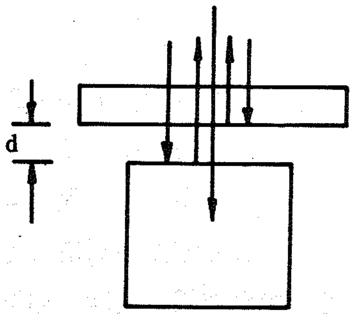


圖 3.4

解：設空氣柱厚度 d，電磁波經空氣隙後被玻璃反射較未經空氣隙反射路程差為 2d，且空氣為光疏介質而玻璃為光密介質，故經空氣隙被玻璃反射會產生 180° 的相位改變。因此，此二反射波發生建設性干涉的條件為：

$$2d=n\lambda+\frac{\lambda}{2}\qquad(n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

由二種可得極大增強的波長 λ_1, λ_2, 可得

$$\begin{cases}2d=n_1\lambda_1+\frac{\lambda_1}{2} & (n_1=0,1,2,\cdots\cdots)\\ 2d=n_2\lambda_2+\frac{\lambda_2}{2} & (n_2=0,1,2,\cdots\cdots)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2n_1+1}{2n_2+1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

根據題意波長範圍 $0.4\,\mu m < \lambda < 1.15\,\mu m$，及已知 $\lambda_1 = 0.4\,\mu m$

可得 $1 < \dfrac{2n_1+1}{2n_2+1} < 2.875$ ……………(1)

對不同的 n_1 和 n_2 求出 $\dfrac{2n_1+1}{2n_2+1}$ 值，列如下表：

表中已圈出合於(1)式條件者但只有兩種波長增強，表只有一對 n_1, n_2 是允許的，故選擇 $n_1 = 2$，$n_2 = 1$

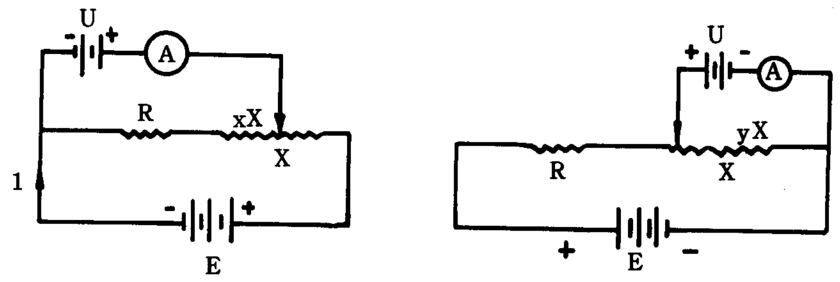
n_2 \ n_1	0	1	2	3	4
0	1	3	5	7	9
1	0.33	1	1.67	2.33	3
2	0.2	0.6	1	1.4	1.8
3	0.14	0.43	0.71	1	1.29
4	0.11	0.33	0.56	0.78	1

由此解得 $d = \dfrac{n_1}{2}\lambda_1 + \dfrac{\lambda_1}{4}$

$= 1 \times 0.4 + \dfrac{0.4}{4} = 0.5\,(\mu m)$ ………Ans

［實驗題］ 給定一閉合電路，它是由已知電阻R、未知電阻X以及內阻可忽略的電源組成的。電阻X是可調電阻器，由引線、毫米標尺、滑動接觸塊組成。另一電路由乾電池和零點在中心的電流計組成，它與主電路的聯接方式使得沒有電流通過電流計。試測定電阻X和端電壓之比。

解：可聯接兩種補償電路，如下圖(a)、(b)，U、E為乾電池，Ⓐ為安培計



(a)　　　　(b)

移動可調電阻器的滑動接觸塊使電流計Ⓐ讀數為零。此時兩電源電壓之比等於其分別跨接電阻之比。以毫米標尺測量可調電阻全長及滑動電阻塊所截電阻長度，可得電阻分率 x、y

$$\text{由}\begin{cases} \dfrac{U}{E}=\dfrac{R+xX}{X+R} & \because\ U=E-I\,(X-xX)=E-\dfrac{E}{R+X}(X-xX) \\ & \qquad =\dfrac{E}{R+X}(R+X-X+xX) \\ \dfrac{U}{E}=\dfrac{yX}{X+R} & \because\ U=E-I\,(R+X-yX)=E-\dfrac{E}{R+X}(R+X-yX) \\ & \qquad =\dfrac{E}{R+X}(R+X-R-X+yX) \end{cases}$$

得 $R+xX=yX \Rightarrow X=\dfrac{R}{y-x}$ ………………………… Ans 電阻 X

代圖得 $\dfrac{U}{E}=\dfrac{yX}{X+R}=\dfrac{y\dfrac{R}{y-x}}{\dfrac{R}{y-x}+R}=\dfrac{y}{1+y-x}$ …… Ans 端電壓之比

第 4 屆（1970 年於蘇聯莫斯科）

1. 如圖 4.1 (a)、(b)，在質量 $M=1$ kg 的木板上有質量 $m=0.1$ kg 的小雪橇。雪橇上的馬達牽引一根繩子，使雪橇具有速度 $v_0=0.1$ m/s。忽略桌面與木板間的摩擦。木板與雪橇之間的摩擦係數 $\mu=0.02$。把住木板、起動馬達，當雪橇達速度 v_0 時，放開木板。在此瞬間，雪橇與木板右端的距離 $L=0.5$ m。繩子拴在(a)遠處的柱子，(b)木板的右端上。試描述兩種情形下木板與雪橇的運動。雪橇何時到達木板端面？

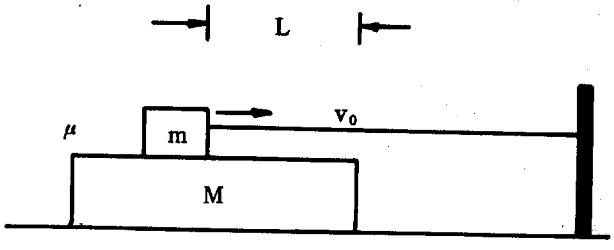


圖 4.1 (a)

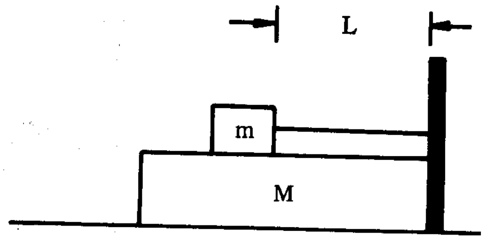
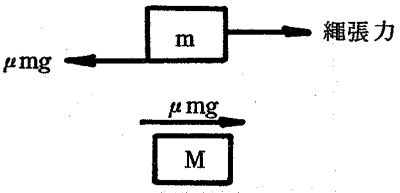


圖 4.1 (b)

解：(a) 在此情況下，m、M受力情形為：

m在受合力為零的情況下，以等速 v_0 運動。

M受力 μmg 向右由零加速至 v_0



由 $v_0 = at$ ，$a = \dfrac{\mu mg}{M}$

得加速時間 $t = \dfrac{0.1}{\dfrac{0.02 \times 0.1 \times 9.8}{1}} = 5.1(s)$

在這段時間，雪橇向右移動 $v_0 t = 0.1 \times 5.1 = 0.51\,(m)$， 木板向右移動

$S = \dfrac{1}{2} a t^2 = \dfrac{1}{2} \times 0.02 \times 0.1 \times 9.8 \times 0.51^2 = 0.255\,(m)$ 之後，M不再受力，和m一起以等速 v_0 運動，不再有相對位移，故雪橇最後距木塊端點 $0.50 - 0.255 = 0.245\,(m)$，永不能到達木塊端面。

(b) 在此情況下，m和M系統不受外力作用，可應用動量守恆定律 $mv_0 = Mv_2 + m(v_0 + v_2)$，$v_2$ 為釋放後M的運動速度。由上式可得 $v_2 = 0$，表M保持靜止，m維持 v_0 等速運動，於 $t' = \dfrac{0.5}{0.1} = 5\,(s)$ 後雪橇到達木塊端面。

2. NaCl 的晶體點陣由邊長為 5.6×10^{-8} cm 的立方晶胞組成，它是面心立方點陣。鈉原子量約為 23，氯原子量為 35.5 ，NaCl 密度為 $2.22\,g/cm^3$ 。試計算氯原子的質量(圖 4.2)。

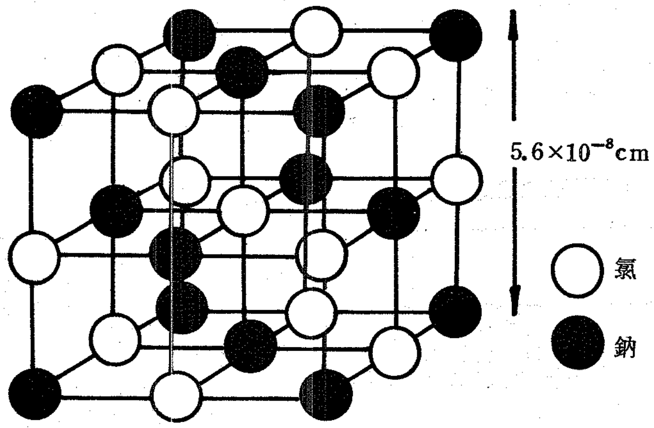


圖 4.2

解：每個晶胞中含鈉及氯離子的個數分別爲

$$\frac{1}{8}\times 8+\frac{1}{2}\times 6=4\ (個)$$

由密度$=\dfrac{質量}{體積}$，設每個氫原子質量爲 m(g)

得 $$2.2=\frac{4\times 23\,m+4\times 35.5\,m}{(5.6\times 10^{-8})^3}$$

可求得氫原子質量爲 $m=1.66\times 10^{-24}\ g=1.66\times 10^{-27}\ kg$ ……… Ans

3. 半徑 $r_0=10$ cm 的金屬球置於半徑 R＝20 cm 的薄金屬空心球內，兩球同心。內球靠一根長導線經過外球的開孔接地。若外球帶電量 $Q=10^{-8}$ C，求外球電位（圖 4.3）。

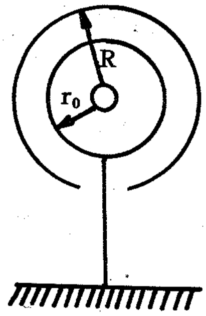


圖 4.3

解：外球帶電荷Q，將使內球感應產生電荷 Q′，Q 在球與球殼間區域（$r_0\le r\le R$）造成一定電位 $V_Q=\dfrac{kQ}{R}$，Q′ 在此區域造成之電位 $V_Q{}'=\dfrac{kQ'}{r}$（$r_0\le r\le R$），但半徑爲 r_0 的球上因接地故電位爲零，即 $\dfrac{kQ}{R}+\dfrac{kQ'}{r_0}=0\Rightarrow Q'=\dfrac{r_0Q}{R}$

故外球電位（即在距球心R處）

$$V(R)=\frac{kQ}{R}+\frac{kQ'}{R}=\frac{kQ}{R}\left(1-\frac{r_0}{R}\right)=\frac{9\times 10^9\times 10^{-8}}{0.2}\left(1-\frac{0.1}{0.2}\right)$$

$=225\ (V)$ ………………………… Ans

4. 在半徑 R＝2 m、孔徑 d＝0.5 m 的凹面鏡的焦點位置上放一塊圓形屏幕，使平行於軸的所有入射光線經凹面鏡反射後都能到達該圓形屏幕。試求圓形屏幕直徑。如果在上述條件下圓形屏幕的直徑減少到僅有原來的 1/8，問有多少部分的光能到達在同樣位置的屏幕上？

解：設孔徑半長爲 h（$h=\dfrac{d}{2}$），像差最大半徑 x，O爲球心，圖中F爲理論焦點，

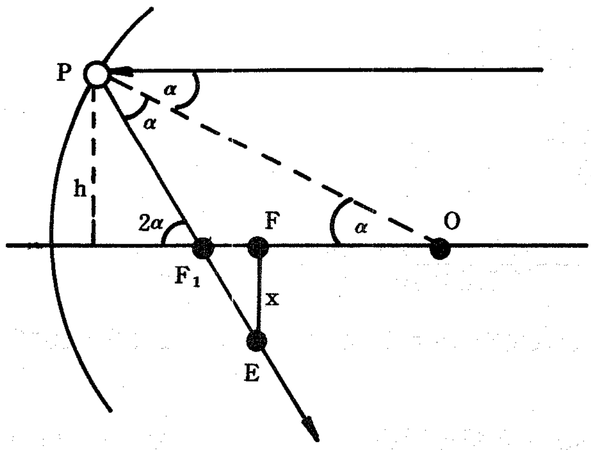


圖 4.4

F_1 爲實際焦點，由幾何 OPF′ 是等腰三角形，$OF_1=\frac{R}{2}\sec\alpha$，

$FF_1=OF_1-OF=\frac{R}{2}(\sec\alpha-1)$，在直角三角形 EFF_1 中，應用通常的小角

近似，得 $x=F_1F\tan 2\alpha\simeq F_1F\sin 2\alpha=\frac{R}{2}(\sec\alpha-1)\frac{h}{\frac{R}{2}}$

而 $\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}\approx 1+\frac{\alpha^2}{2}$， $\alpha\approx\frac{h}{R}$ （小角近似）

代入數值 $h=\frac{d}{2}=0.25\,m$ ， $R=2\,m$

得 $x=(\sec\alpha-1)h=\frac{\alpha^2}{2}h=\frac{1}{2}\frac{h^3}{R^2}=\frac{1}{2}\cdot(0.25)^3/2^2=1.95\times10^{-3}$ (m)

故所求圓形屏幕的直徑爲 $1.95\times2=3.9$ (mm)……………… Ans

由 $x=\frac{1}{2}\frac{h^3}{R^2}$ 知當 x 變爲原來的 $\frac{1}{8}$ 時，能反射光的半徑 h 變爲原來的 $\frac{1}{2}$，而入

射光量正比於 h^2，故落在圓形屏上的光量將是前者的 $\frac{1}{4}$……… Ans

[實驗題] 桌上有三個裝在支架上的透鏡，一塊有幾何圖形的屏、一支竿和一把卷尺，僅用給定的工具，以不同方法測定透鏡的焦距。

法1：利用凸透鏡成像時，若物放在焦點內成虛像，放在焦點外成實像的原理。以目視觀察虛像的消失，並測定透鏡的距離。

法2：利用造鏡者公式 $\frac{1}{f}=\frac{1}{P}+\frac{1}{g}$

我們注視著實像，借助於視差，把竿放在實像的位置上，測量物距和像距，從而計算出焦距。

另：若欲測爲凹透鏡，可把凹透鏡與一強會聚凸透鏡密接在一起，並用上述方法之一測系統焦距，再算出凹透鏡的焦距。

第5屆（1971年於保加利亞索菲亞）

1. 質量爲 m_1 和 m_2 的物體掛在繩的兩端，繩跨在雙斜面的頂部（圖5.1）。斜面質量爲 m，與水平面的夾角爲 α_1 和 α_2。整個系統起初靜止。求放開後斜面的加速度和物體的加速度。斜面保持靜止的條件是什麼？摩擦可忽略。

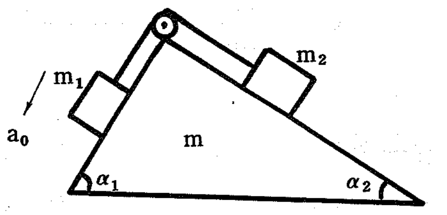
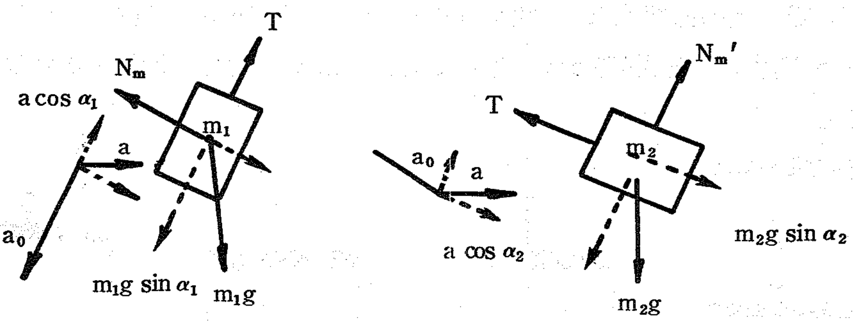


圖 5.1

解：設m向右加速度a，m_1、m_2 沿斜面加速度 a_0，分析 m_1、m_2 就實驗室座標所受力及運動情形如下：



得方程式：

$$\begin{cases} m_1 g \sin\alpha_1 - T = m_1 (a_0 - a\cos\alpha_1) \\ T - m_2 g \sin\alpha_2 = m_2 (a_0 - a\cos\alpha_2) \end{cases}$$

兩式相加得 $m_1 g \sin\alpha_1 - m_2 g \sin\alpha_2$

$$= m_1(a_0 - a\cos\alpha_1) + m_2(a_0 - a\cos\alpha_2) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

再利用動量守恆原理（因系統不受外力）

得 $mv = m_1(v_0\cos\alpha_1 - v) + m_2(v_0\cos\alpha_2 - v)$

但由靜止起動加速 $v = at$ 即 v 正比於 a，上式中 v 可改爲 a，

得 $ma = m_1(a_0\cos\alpha_1 - a) + m_2(a_0\cos\alpha_2 - a) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

整理(1)、(2)式得：

$$a(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2) = a_0(m_1 + m_2) - m_1 g\sin\alpha_1 + m_2 g\sin\alpha_2 \cdots (3)$$

$$a(m + m_1 + m_2) = a_0(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

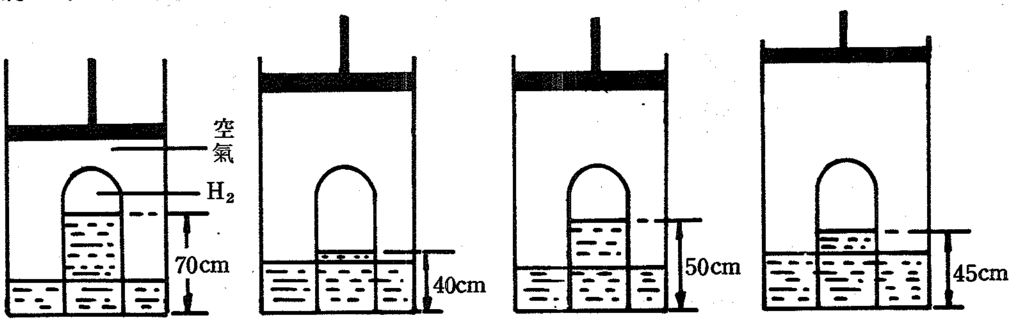
$$a = \frac{m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2}{m + m_1 + m_2} a_0$$ 代入(3)

得 $$a_0 = \frac{(m + m_1 + m_2)(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)}{(m_1 + m_2)(m + m_1 + m_2) - (m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)^2} g \cdots\cdots \text{Ans}$$

$$a = \frac{(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)}{(m_1 + m_2)(m + m_1 + m_2) - (m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)^2} g \cdots\cdots \text{Ans}$$

2. 在一個帶活塞的圓筒內裝配著著名的托里切利裝置。在水銀上方有氫氣，在圓筒內有空氣。第一步，水銀高度 70 cm，空氣壓強 $Pa_1 = 1.314$ atm $= 133.4$ KPa $= 100$ cm Hg，溫度爲 0°C = 273 K。第二步，向上提升活塞，直至水銀高度降爲 40 cm，這時空氣壓強爲 $Pa_2 = 0.79$ atm $= 80$ KPa $= 60$ cm Hg。第三步，保持體積不變，提高溫度到 T_3，此時水銀柱的高度爲 50 cm，最後，第四步，溫度爲 T_4，水銀柱的高度爲 45 cm，空氣壓力沒有改變。求出最後一步中氫氣的溫度和壓力。

解：將空氣、氫氣各步數據列表如下：



1.　2.　3.　4.

氫氣壓強	$Ph_1=30$ cmHg	$Ph_2=20$ cmHg	$Ph_3=Pa_{34}-50$	$Ph_4=?\ (=Pa_{34}-45)$
氫氣體積	Vh_1	Vh_2	Vh_3	Vh_4
空氣壓力	100 cmHg	60 cmHg	Pa_{34} $=$	Pa_{34}
空氣體積	Va_1	Va_{23} $=$	Va_{23}	Va_4
溫　　度	273 K	273 K	T_3	$T_4=?$

由 $1\to2$ 等溫利用 $P_1V_1=P_2V_2$（對氫氣）　設托里切利管長 L

$$(100-70)(L-70)=(60-40)(L-40)\Rightarrow L=130\ (\text{cm})$$

推得氫氣在 1～4 步中體積分別爲：60, 90, 80, 85（爲簡便以氣管長表體積）

由 $2\to3$ 氫氣的狀態方程式　$PV=nRT$（nR 爲定值）

得 $\dfrac{(60-40)\times90}{273}=\dfrac{(Pa_3-50)\times80}{T_3}$

而 $2\to3$ 對空氣定容　得 $\dfrac{Pa_3}{T_3}=\dfrac{60}{273}$

解得 $Pa_3=80\ (\text{cmHg})$，$T_3=364\ (\text{K})$

由 $3\to4$ 氫氣的狀態方程式　$PV=nRT$（nR 爲定值）

得 $\dfrac{(80-50)\times80}{364}=\dfrac{(80-45)\times85}{T_4}$　解得　$T_4=451\ (\text{K})$ …… Ans

而最後一步氫氣壓強　$Ph_4=80-45=35\ (\text{cmHg})$ …………………… Ans

3. 四個等值電阻 R，四個 1 μF 的電容器以及四個電池分別在立方體的各邊接連起來，如圖 5.2 所示。各電池的電壓爲 $U_1=4$ V、$U_2=8$ V、$U_3=12$ V、$U_4=16$ V，它們的內阻可忽略。

(a) 求每個電容器的電壓和電量。

(b) 若 H 點與 B 點短路，求電容器 C_2 的電量。

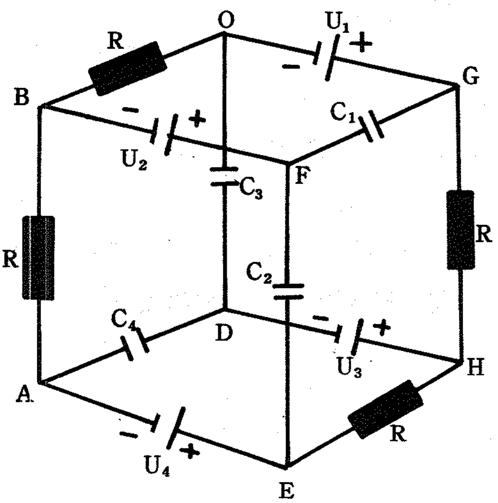
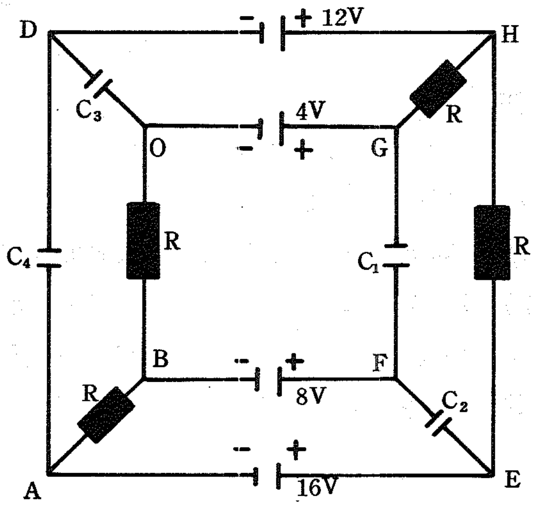
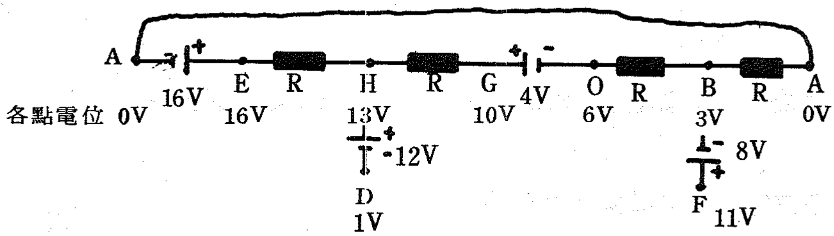


圖 5.2



解：(a) 以A爲電位零參考點且電容無直流電流通過，可再畫電路如下：得迴路電流

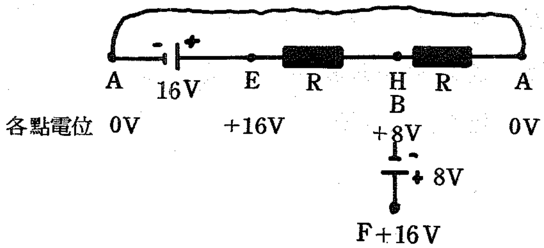
$$I_1=\frac{V}{R_t}=\frac{12}{4R}=\frac{3}{R}$$



故 C_1 跨 G, F $V_1=11-10=1\,(V)$， $Q=C_1V_1=1\times10^{-6}\,(C)$
C_2 跨 F, E $V_2=16-11=5\,(V)$， $Q=C_2V_2=5\times10^{-6}\,(C)$
C_3 跨 O, D $V_3=6-1=5\,(V)$， $Q=C_3V_3=5\times10^{-6}\,(C)$
C_4 跨 D, A $V_4=1-0=1\,(V)$， $Q=C_4V_4=1\times10^{-6}\,(C)$ …Ans

(b) H、B短路，電路如下：

$$I_2=\frac{V}{R}=\frac{16}{2R}=\frac{8}{R}$$



C_2 跨 F, E $V_2'=16-16=0\,(V)$， C_2 上無電量…………Ans

4. 在直立的平面鏡前放置一個半徑爲R的球形玻璃魚缸，缸壁很薄，其中心距離鏡面3尺，缸中充滿水。遠處一觀察者通過球心與鏡面垂直的方向注視魚缸。一條小魚在離鏡面最近處以速度正沿缸壁游動。求觀察者看到的魚的兩個像的相對速度。水的折射率 $n=4/3$ 。見圖 5.3 (a)、5.3 (b)。

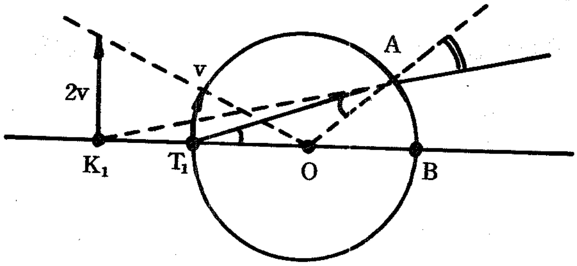


圖 5.3 (a)

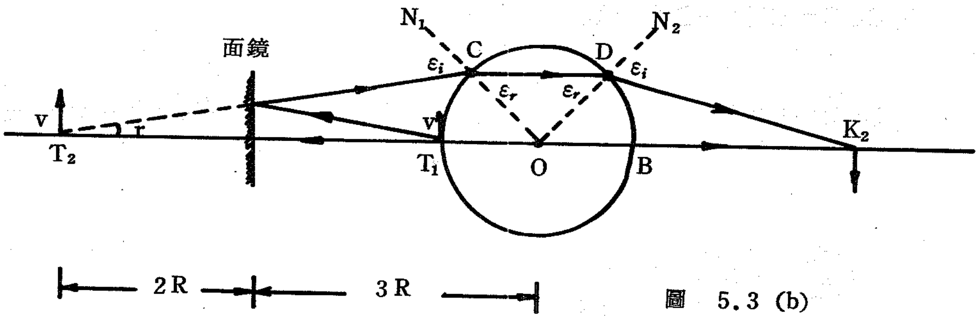


圖 5.3 (b)

解：一像爲直接看到 T_1 處游魚經一次折射成像在 K_1，如圖(a)。另一像爲看到面鏡後 T_2 處游魚的虛像經二次折射成像在 K_2，如圖(b)。此題中因觀察者在遠處，故只考慮近軸光線和小角度。

圖(a)中 $\angle AT_1O=\theta_i=\angle OAT_1$ 用司乃耳定律：$\frac{4}{3}\sin\theta_i=1\times\sin\theta_r$

得 $\theta_r=\frac{4}{3}\theta_i$（小角近似），$\angle K_1AT_1=\theta_r-\theta_i=\frac{1}{3}\theta_i$

在 $\triangle K_1T_1A$ 中利用正弦定理得：

$$\frac{K_1A_1}{K_1A}=\frac{\sin(\frac{1}{3}\theta_i)}{\sin(180^\circ-\theta_i)}\simeq\frac{\frac{1}{3}\theta_i}{\theta_i}=\frac{1}{3}$$

又 $K_1A \simeq K_1O + R$， $K_1T_1 = K_1O - R$

$$\therefore \quad \frac{K_1O - R}{K_1O + R} = \frac{1}{3} \Rightarrow K_1O = 2R$$

$$\text{由放大率} = \frac{\text{像距}}{\text{物距}} = \frac{K_1O}{R} = 2 \Rightarrow K_1 \text{ 處像速 } 2v$$

圖(b)中，物距 $T_2O = 5R$，且令 $\angle CT_2O = r$，而光線在C點入射角 ε_i。

$$\text{在} \triangle T_2OC \text{ 中，} \frac{T_2O}{CO} = \frac{\varepsilon_i}{r} = \frac{5R}{R} \Rightarrow \varepsilon_i = 5r$$

$$\text{用司乃耳定律} \quad 1 \times \varepsilon_i = \frac{4}{3}\varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{15}{4}r$$

$$\angle COT_1 = \varepsilon_i - r = 4r$$

$$\angle DOC = 180° - 2\varepsilon_r = 180° - \frac{15}{2}r$$

$$\angle DOB = 180° - \angle COT_1 - \angle DOC = 180° - (180° - \frac{15}{2}r) - 4r = \frac{7}{2}r$$

在 $\triangle DOK_2$ 中

$$\frac{OK_2}{DK_2} = \frac{\varepsilon_i}{\frac{7}{2}r} = \frac{5r}{\frac{7}{2}r} = \frac{10}{7}$$

又 $DK_2 \simeq OK_2 - R$

$$\text{故} \quad \frac{OK_2}{OK_2 - R} = \frac{10}{7} \Rightarrow OK_2 = \frac{10R}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{像距}$$

$$\text{放大率} = \frac{\text{像距}}{\text{物距}} = \frac{\frac{10}{3}R}{5R} = \frac{2}{3} \Rightarrow K_2 \text{ 處像速 } \frac{2}{3}v$$

又 K_1 處爲正立虛像，和魚同向運動，K_2 處爲倒立實像，和魚反向運動，故兩像

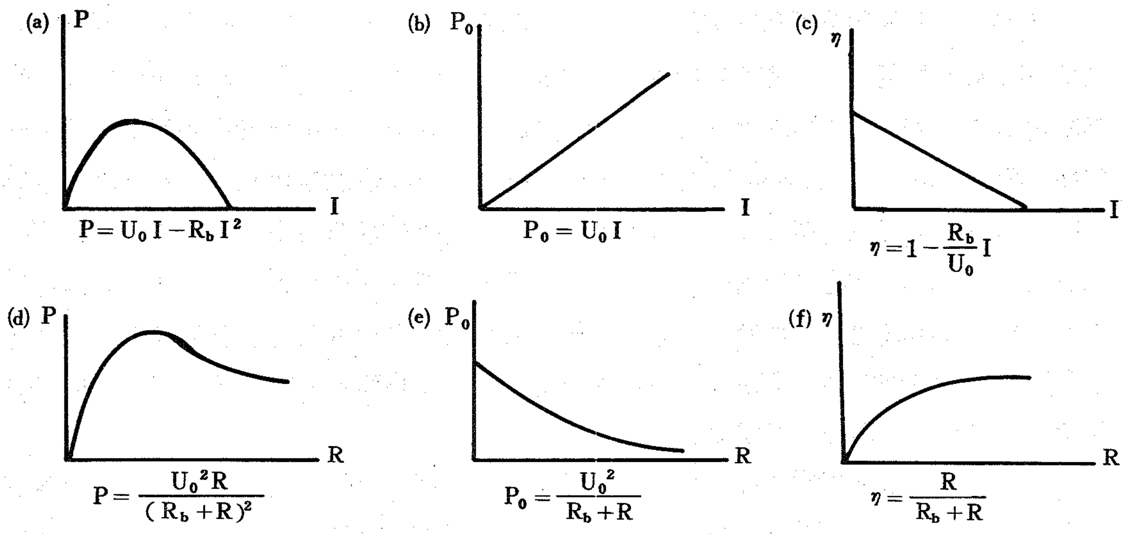
的相對速度爲 $2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v$ ………………… Ans

[實驗題] 測量作爲電流函數的給定電源的有用功率。決定電源的內阻 R_b 和電動勢 U_0，畫出作爲外電阻 R 及電流 I 函數的有用功率、總功率以及效率 η 的曲線。（註：電源、三用電表、可變電阻應有提供使用。）

作法：端電壓爲 $U=\frac{U_0R}{R+R_b}$，電流 $I=\frac{U}{R}=\frac{U_0}{R+R_b}$， I、U 值可直接測得並由之求出 U_0、R_b。

因此可推算總功率 $P_0=U_0I$，有用功率爲 $P=UI$，效率 $\eta=\frac{P}{P_0}$

依此，得到要求的六個函數：



（上承第 35 頁）

參考資料

1. 易希陶，昆蟲分類學，國立編譯館出版。
2. 貢穀紳，昆蟲學（中册），國立中興大學農學院出版委員會出版。
3. 張保信，台灣蛾類圖說(一)，台灣省立博物館印行。
4. 陳維壽，台灣產蛾類，台灣省政府教育廳出版。
5. H. E. Jaques, How to know the insect, WM. C. Brown Company.