由電腦與數學的相互應用
—談「拈」遊戲的必勝策略

曾政清
國立華僑實驗高級中學

甲、前　言

「拈」是中國民間一種流行很廣的民俗遊戲，甚至在歐美地區亦曾廣為風行。由於「拈」這個遊戲本身具有數學理論，因此想嘗試藉由嚴密邏輯的數學推演結合電腦本身快速分析驗證的特性，研究出其必勝策略。並將「拈」的傳統玩法加以推廣，確立「拈」遊戲的必勝型態，以便藉此了解我們老祖宗們是如何神算。

乙、研究內容

(一) 拈基本型玩法

1. 「拈」的基本型玩法，是「拈」遊戲玩法中最常見的。即「撿好若干堆石頭，每堆數目不拘，甲乙兩人輪流自其中一堆拿取石頭，拿多少隨意（至少要拿一個），但不得同時自兩堆拿取，最後拿光石子的人贏。」

2. 有關「拈」基本型玩法的數學理論架構早在本世紀初哈佛大學數學系教授巴頓（Charles Bouton）便已利用二進位表示法，提出詳盡的分析與證明，國內亦有許多書籍專文加以介紹，可參看本文之參考書籍。

巴頓的方法雖十分簡單，但相當巧妙，首先將各堆數目轉換成二進位相加，但不進位，如此便可利用其和的性質將「拈」遊戲的所有型態區分為二大類：

(1) 偶性型態：和的每一位數都是偶數。

(2) 奇性型態：和的每一位數不全為偶數。

現在假定共有N堆石頭，分別為 k_1, k_2, k_3, …… k_n 個，如果你想贏，那麼先把 k_1, k_2, …… k_n 等數化成二進位：

$$
\begin{aligned}
k_1 &= a_s^1 \cdot 2^s + a_{s-1}^1 \cdot 2^{s-1} + \cdots + a_1^1 2 + a_0^1 \\
k_2 &= a_s^2 \cdot 2^s + a_{s-1}^2 \cdot 2^{s-1} + \cdots + a_1^2 2 + a_0^2 \\
k_3 &= a_s^3 \cdot 2^s + a_{s-1}^3 \cdot 2^{s-1} + \cdots + a_1^3 2 + a_0^3 \\
&\vdots \\
k_n &= a_s^n \cdot 2^s + a_{s-1}^n \cdot 2^{s-1} + \cdots + a_1^n 2 + a_0^n
\end{aligned}
$$

值得注意的是：上面二進位表示法中，雖然都爲 $s+1$ 項，但其中可能有些 a_s^i 之值爲0，而你現在必須觀察每一位係數之和，即對每個 $j=0,1,2,\cdots s$, 計算 $a_j^1+a_j^2+\cdots+a_j^n$ 之值，若對每個 j 值 $a_j^1+a_j^2+\cdots+a_j^n$ 皆爲偶數時即爲偶性型態，否則即爲奇性型態。

3. 遊戲的最後結果爲拿光者贏，即需把石頭數 $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n$，變成 0,0,0,…0，而0,0,0,…0等數換成二進位表示法時，因各項係數和爲 0（都是偶數），故拈遊戲的必勝策略爲：每次取走石頭後，都要使得每一位係數之和都爲偶數，如此當你佔有（即拿完之後）偶性必勝型態，而再輪由對手取石頭時，則對方必破壞偶性型態而使石頭數目成爲奇性型態。此時，可按一定的邏輯拿法，將石頭數目恢復成偶性型態，這樣子你必然可一直佔有偶性型態，直到［0,0,0,…0］的情況，即所有石頭均拿光，宣告勝利爲止。

在這裏要特別說明的是，若原來各堆石頭數目呈偶性型態，則任何的拿法均將破壞其偶性型態而使石頭數呈奇性型態。例如：若由左第一個發生改變的是 2^n 位數，這個改變必定是由1變到0，則各數中相對此行的係數和，必然也跟著改變成奇數了。例如［5,13,8］從第2堆拿走3個石頭，石頭數變爲［5,10,8］：

$$
\begin{array}{rcr}
5 \rightarrow & 101 \\
13 \rightarrow & 1101 \\
8 \rightarrow & 1000\ (+ \\
\hline
& 2202 & \Leftarrow \text{偶性型態}
\end{array}
\xrightarrow{\text{第2堆取走3個}}
\begin{array}{rcr}
5 \rightarrow & 101 \\
10 \rightarrow & 1010 \\
8 \rightarrow & 1000\ (+ \\
\hline
& 2111 & \Leftarrow \text{奇性型態}
\end{array}
$$

而當各堆石頭數目在奇性型態下，必可按一定的邏輯拿法將石頭數再變成偶性型態，因爲奇性型態含有奇數的和，可先找出最左邊的一個，在直式而且相對應的行中，將含有1的那列中（即那堆石頭）取走數目（石子），取後1即變爲0，並且使此列中相對應的數字產生改變，而恢復成偶性型態。例如［5,10,8］

(1)

```
                  第 1 堆中取走 3 個
 5 →  101        ═══════════════⇒      2 →   10
10 → 1010                             10 → 1010
 8 → 1000(+                            8 → 1000(+
─────────────                         ─────────────
     2111 ⇐ 奇性型態                       2020 ⇐ 偶性型態
      ⇓
     最左（故從第一堆那列中拿走 3 個）
```

以下是拈基本型電腦程式遊戲過程：

```
──────────────拈 的 基 本 型 玩 法──────────────
  請輸入堆數( 2 ～10)====>3
請輸入第 1 堆的石頭個數(0～30000)====>4
請輸入第 2 堆的石頭個數(0～30000)====>3
請輸入第 3 堆的石頭個數(0～30000)====>2
────────────────────────────────────────────
您要先玩嗎 ? (y/n)N
    {    4,    3,    2}
... 電腦從第 1 堆拿 3 個 ...

    {    1,    3,    2}
您要拿那一堆?(請輸入阿拉伯數字代號)====>2
      您要拿幾個石頭?====>3

    {    1,    0,    2}
... 電腦從第 3 堆拿 1 個 ...

    {    1,    0,    1}
您要拿那一堆?(請輸入阿拉伯數字代號)====>1
      您要拿幾個石頭?====>1

    {    0,    0,    1}
... 電腦從第 3 堆拿 1 個 ...

    {    0,    0,    0}

  好遺憾，您輸了!!!!

別難過! 我唱一首歌給您聽! (按 [Esc] 停)
────────────────────────────────────────────
     【英數】【半形】                              倚天
```

有關「拈基本型」玩法必勝策略證明：有興趣的讀者可參考附錄中參考書籍一～三，有較完整的說明，在此並不多加討論。

㈡ 拈推廣型玩法

1. 如果將拈基本型玩法加上一個條件，即限制每次所拿的石頭個數，如此遊戲的規則變成「撿好幾堆石頭，各堆數目不拘，甲、乙兩人輪流自其中一堆拿取石頭，並且

對每次所拿的個數做上、下限制（必須大於1個），且不得同時自兩堆中拿取，拿光者贏。」

2. 由於遊戲的規則增加，使得遊戲過程增加了許多變因，故必勝策略必須重新加以尋找，由於此部份欠缺完整的理論架構及參考資料，所以只好回過頭研究「拈推廣型玩法」中的數學理論。

3. 許多的數學問題，如果在極端化的狀況下加以考慮，問題常會變得比較簡單，因此首先研究只有一堆石頭（ $n=1$ ，n 表堆數）限制拿取個數最多爲2（$m=2$ 表限制個數）的玩法，經過數學運算式的推廣和必勝規則的尋求，我們發現誰先將石頭個數拿剩下 $3k$（$K\in N$）個給對手，誰便能主宰這場比賽的勝負，理由是對手每一次最多只能取走2個石頭，如此我們和對手可在每一回合（兩人各拿一次稱一回合）拿走石頭總數爲3個，即當對手拿走2個，我們拿1個，而當對手只拿走1個石頭時，則我們拿走2個。如此經過 $k-1$ 個回合後，則石頭總數便只剩下3個，即 $[3k-3(k-1)=3]$，此時再輪由對手取走1或2個石頭，當然我們必可把剩下的石頭全數取光而贏得比賽。

4. 換句話說：石頭總數爲 $3k+1$ 與 $3k+2$（$K\in N$）型態時爲必勝型態，因爲先手的人可拿走1或2個而留下 $3k$ 個石頭給對手，而再按照一定的邏輯拿法成爲贏家。同理當限制每次所拿個數最多爲3時，可以很容易發現 $4k$ 爲必敗型態而 $4k+1$，$4k+2$ 與 $4k+3$ 爲必勝型態。由數學歸納法我們可以推得，當僅有一堆石頭，而限制個數爲 m 時，石頭總數爲 $(m+1)k+r$，$0<r<m+1$（$K\in N$）爲必勝型態，相對 $(m+1)k$ 則爲必敗型態。

5. 接下來把目標放在兩堆石頭（$n=2$）限制個數的玩法，由於一堆石頭（$n=1$）是兩堆石頭（$n=2$）的特殊化結果，即二堆石頭中有一堆石頭爲0。猜想其中必有種對應關係存在，因此想利用「拈」非必勝殘型即爲非「必敗殘型」的特色，利用電腦模擬搜尋兩堆石子限制個數的玩法。故首先取 $m=2$（每次最多拿2個），而將各種必勝狀況列印在事先設計的 (x, y) 座標平面上，其中 x，y 分別表兩堆石子的個數：

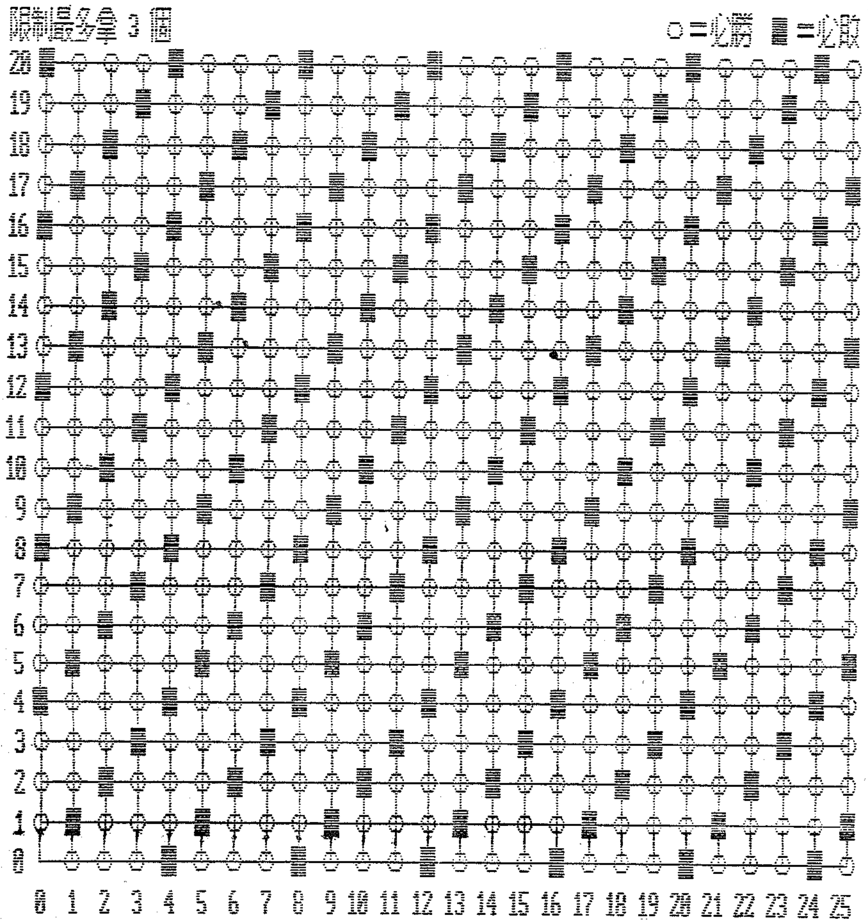
(1) 考慮 $x=0$ 或 $y=0$ 即圖形在 x 軸或 y 軸上，其必勝狀況必須和前面所提「一堆石頭的必勝狀況」相吻合。

(2) 序對 (x, y) 本身並無所謂的次序關係，如此圖形必對稱於直線 $x=y$。

(3) 當限制個數 m 大於每一堆石子數時，如此拈推廣型玩法又變成拈的基本型玩法。

透過上述三種狀況的考慮，再藉由電腦的各種模擬分析和快速驗證，我們便可由

$m=2$ 一步步推展到 $m=3$，$m=4$ 及其他情況：



6. 仔細觀察分析必勝圖形的列印，可以發現 $m=2$ 時，必勝型態和3的倍數有關，而 $m=3$ 時其必勝型態和4的倍數有關…因此可以推測當 $m=t$ 時必勝型態和 $(t+1)$ 的倍數有關，透過電腦檢驗其中某些狀況，可以將結果和先前的假設相驗證。

由於 $n=3$（3堆石子）的圖形，較難列印且不易觀察必勝型態相互關係，乃希望藉由數學方法歸納出 $n\geq 3$ 以上的情況，當然所有的運算基礎必須建立在2堆必勝型態上並藉由電腦作模擬搜尋的工作，再逐一分析討論而得的，值得說明的是，由於2堆狀況的解決，帶動了3堆以上必勝策略的猜測。

7. 底下便要使用中國剩餘定理來說明拈推廣型玩法的必勝策略：

設有 n 堆石子，每堆個數爲 k_1，k_2，k_3，… k_i，… k_n 個，每次限制個數至多拿 m 個，

則我們可先將各堆石頭區分成兩大部份，即A部份為（$m+1$）之倍數，B部份為各堆石子數被（$m+1$）除所得之餘數r_i，$0\leq r_i<m+1$，$1\leq i\leq n$ 。

$$\text{即}\quad \begin{array}{rcccc}
k_1 = & (m+1)P_1 & + & r_1 \\
k_2 = & (m+1)P_2 & + & r_2 \\
k_3 = & (m+1)P_3 & + & r_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
k_i = & (m+1)P_i & + & r_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
k_{n-1} = & (m+1)P_{n-1} & + & r_{n-1} \\
k_n = & (m+1)P_n & + & r_n \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & \text{A 部份} & & \text{B 部份}
\end{array}$$

(1) 當甲、乙兩人比賽時，如果甲先手而乙後手，則遊戲過程時，在A部份中，可以容易瞭解甲若從第i堆（$1\leq i\leq n$）中先拿q個（$1\leq q\leq m$），那麼後手的乙便可以在同一堆中拿取（$m+1-q$）個。那如此一來，第i堆的A部份就變成（$m+1$）×（P_i-1）的型態，即第i堆石頭數目就變為k_i'個。

而$k_i'=(m+1)P_i'+r_i$ 其中 $P_i'=P_i-1$，即每一回合後。由上述的式子我們發現A部份的基本狀況仍維持相同，只不過是數目減少了$m+1$ 個罷了。（餘數仍保持相同。）

(2) 就整個遊戲過程而言，我們雖然無法控制遊戲的進行，但是當甲拿A部份時，乙可跟著拿A部份（同一堆），如此，每一回合，甲、乙兩人共拿走了$m+1$ 個石子，即在遊戲中A部份只要經歷（$P_1+P_2+\cdots+P_n$）回合後可全部被拿完（即在全部遊戲過程中的所有回合裏，可先截取拿A部份的回合數，視作先拿）。換句話說，如果透過「有系統」的拿取方法，則整個A部份對遊戲的勝負便毫無影響，相對的當整個遊戲的勝負關鍵，必和B部份有關。

(3) 在各堆石頭中的B部份，石頭數為$r_1,r_2,\cdots,r_n$ ，均比限制個數m來得小或相等，因此一次均可拿光一堆，如此拈推廣型玩法在此部份變成了拈基本型的玩法。

(4) 所以拈推廣型玩法的必勝策略為：先將各堆石頭數除上（$m+1$），其中m為

限制個數，則將所得之各堆餘數，視爲拈基本型玩法，即先將其化成二進位，再分辨其偶性型態或奇性型態，再依拈基本型玩法之必勝策略，先行佔取B部份之偶性型態，如此便可在B部份取得絕對優勢，而占有偶性型態到底，至於A部份只要配合對方取石頭即可。

(5) 在此必須要說明的是，當遊戲一開始時，如果先在B部份占有偶性型態，而當遊戲進行中，各堆石子的A部份，便可視爲先行取出，如此A部份被取光後，輪由對方取石頭時，必會破壞該堆石子的餘數型態，而整體B部份的偶性型態便會成爲奇性型態，此時你須立刻從某一堆的餘數（即B部份）拿走一些石頭，使得整體B部份的偶性型態能再恢復，換句話說，只要按照如此的邏輯拿法，最後的贏家便非你莫屬了。

(三) 拈其它型玩法

1. 將上述拈推廣型玩法稍加修改即改成拿光者輸，「撿好幾堆石頭，各堆數目不拘，甲、乙兩人輪流自其中一堆拿取石頭，並且限制每次所拿之石頭個數（必須大於1個）並不得同時自兩堆拿取，拿光者輸。則將拈推廣型玩法之必勝策略稍加修改，即可得拈其它型玩法之必勝策略。

2. 必勝策略說明如下：

設有 n 堆石頭分別有 $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_n$ 個石頭

限制每次最多所拿的石頭個數爲 m

則先將各堆石頭數目除上 $(m+1)$

即

$$
\begin{aligned}
k_1 &= (m+1)P_1 + r_1 \\
k_2 &= (m+1)P_2 + r_2 \\
\vdots \quad & \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\
k_n &= (m+1)P_n + r_n
\end{aligned}
$$

其中 $0 \leq r_i < m+1 \quad 1 \leq i \leq n$

首先必須了解的是，各堆石頭數中，被整除的部份就如同拈推廣型玩法必勝策略一樣，並不會影響整個遊戲的結果，在雙方經過 $(P_1 + P_2 + \cdots + P_n)$ 個回合後，此部份即會被全數拿光（當然每一回合雙方必須共拿走 $m+1$ 個）。

其次有關餘數部份可先兩兩扣除餘數爲1的情況，因偶數堆餘數爲1時則雙方一次

只能取走一個（堆），相互取走也不會影響遊戲的勝負（即一人各拿走一堆，每一回合共拿走偶數堆），因此剩下的餘數狀況如下：

狀況一　只剩一堆餘數爲1，另一堆餘數超過1，則必勝策略爲：將另一堆餘數超過1之石頭全數取光。

狀況二　僅剩下一堆餘數r_i且超過1，則必勝策略爲：拿剩下一個石頭給對方，即自該堆中拿r_i-1個石頭。

狀況三　其他狀況則是將各堆餘數狀況轉換成2進位型態，並先行去佔有偶性型態到（2，2）爲止（和拈推廣型相同），而當石頭數爲（2，2）時，即只剩下二堆石頭數，餘數狀況皆爲二個，其他餘數皆爲0，如此對方拿取石頭時，必破壞（2，2）偶性型態而形成如下之情況：如果對方從一堆中拿走2個石頭則，我們就從另一堆中拿走一個石頭，而留下一個石頭給對方(如狀況二)。若對方只取走一個石頭，則我們把另一堆餘數石頭全取光（如狀況一）。

例如：拈其它型玩法，三堆石頭{1，2，6}限制個數3，則6÷（3+1）=1…餘2。其三堆餘數狀況分別爲1，2，2。化成偶性型態後判斷，必須先將第一堆拿走一個石頭，而石頭狀況形成{0，2，6}，則以下是對手再拿取的各種情況：

(1)　$\{0,2,6\}\xrightarrow[\text{從第2堆拿2個}]{\text{對　手}}\{0,0,6\}\xrightarrow[\text{從第3堆拿1個}]{\text{你}}$

$\{0,0,5\}\xrightarrow[\text{從第3堆拿1個}]{\text{對　手}}\{0,0,4\}\xrightarrow[\text{從第3堆拿3個}]{\text{你}}$

$\{0,0,1\}\Rightarrow$ 你 贏

(2)　$\{0,2,6\}\xrightarrow[\text{從第2堆拿1個}]{\text{對　手}}\{0,1,6\}\xrightarrow[\text{從第3堆拿2個}]{\text{你}}$

$\{0,1,4\}\xrightarrow[\text{從第3堆拿2個}]{\text{對　手}}\{0,1,2\}\xrightarrow[\text{從第3堆拿2個}]{\text{你}}$

$\{0,1,0\}\Rightarrow$ 你 贏

(3) $\{0,2,6\} \xrightarrow[\text{從第3堆拿1個}]{\text{對手}} \{0,2,5\} \xrightarrow[\text{從第3堆拿3個}]{\text{你}}$

$\{0,2,2\} \Rightarrow$ 你 贏

(4) $\{0,2,6\} \xrightarrow[\text{從第3堆拿2個}]{\text{對手}} \{0,2,4\} \xrightarrow[\text{從第3堆拿2個}]{\text{你}}$

$\{0,2,2\} \Rightarrow$ 你 贏

(5) $\{0,2,6\} \xrightarrow[\text{從第3堆拿3個}]{\text{對手}} \{0,2,3\} \xrightarrow[\text{從第3堆拿1個}]{\text{你}}$

$\{0,2,2\} \Rightarrow$ 你 贏

丙、討 論

1. 由於拈的玩法本身牽涉到拿的先後次序、堆數、各堆石子數及遊戲的規則，因此所設計出的電腦程式，乃是將各種玩法的必勝策略轉化成電腦思考流程，並應用電腦快速計算的特性，先行佔取必勝型態而處於絕對優勢罷了，並不可能百戰百勝。特別是對於一些深通「拈」道之士，死記某些遊戲本身的必勝型態，仍可將電腦擊敗。例如：對手先占到了「必勝型態」且熟知邏輯拿法，則電腦頂多採拖延戰術，期待對手失誤，才能反敗爲勝，否則終究也是會輸。

2. 如果數目較大，堆數較多，再加上時間限制與拿取個數限制等因素（如每十秒拿一次）、（每次最多拿二十個）。除非是心算高手，否則縱使是選定先拿（先拿贏的機率較大），而電腦幾乎可說是最後的贏家了。

3. 對於拈遊戲的許多玩法，其必勝策略幾乎可說是如何取得偶性必勝型態，然而一旦占有偶性型態後，當對方破壞偶性型態而形成奇性型態時，我們恢復偶性型態的方式並不唯一，即或許其必勝策略相同，但遊戲的過程却不盡相同。例如 {17，21，29} 其鑑別數爲 31203 爲奇性型態，可從第一堆取走 9 個，或從第二堆取走 9 個，亦或是從第三堆中取走 25 個石頭皆可將石頭型態再恢復成偶性型態，讀者可自行驗證。

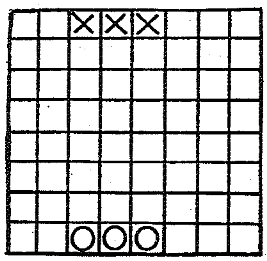
4. 有關拈遊戲中，比較特別有趣的是，不管遊戲是拿光者贏或拿光者輸，其偶性型態皆爲必勝型態，例如（2，2），（1，2，3）皆爲偶性型態，因此不論是拿光者贏或拿

光者輸，先手的人一定會成爲敗家。當然讀者可以從圖形一觀察出二堆時這樣的結果，而藉由電腦的幫助，「拈其它型」的必勝理論便很快的由拈推廣型的必勝理論推衍而得到了。

丁、結　論

1. 電腦與數學相結合可以發揮很大的作用，而將拈的傳統玩法作一完整的分析。透過電腦的協助搜尋，我們可將拈的一些創新玩法（推廣型）加以研究，找出其必勝策略來，再經由數學式子的推廣及證明，我們可以建立一套致勝的理論。甚至程式只要經部份修改，便可將拈的基本、推廣兩型的特殊變形玩法解決，諸如：

型一：這種變形遊戲是在西洋棋盤上玩的，其法如下：在西洋棋盤上選定3行，雙方在底線上擺設不同色的棋子（以○及×代表），如右圖所示的棋子只能在該行上下移動，最後無法動自己的棋子者爲敗家。（拈基本型變形）



由此不難看到，這種變形等於「拈」基本型中{6，6，6}的型態。先手者只要一棋子走到底，使得對手那行的棋子不能動；即佔有了{0，6，6}的必勝殘型。其後一直保持{0，n，n}的型態，即可致勝。

型二：辨士遊戲（又稱讓梨遊戲）

將十二個銅板（或梨子）分三列排成「三、四、五」的遊戲，如右圖。

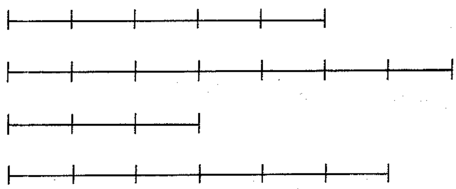
遊戲的規則很簡單，兩人輪流取銅板（梨子），每次每人需在某一列取走一個或一個以上的銅板（梨子），但不得自兩列同時拿取，遊戲的勝負可定爲拿光者贏，或拿光者輸。（拈基本型玩法之變形）

第一列　○　○　○
第二列　○　○　○　○
第三列　○　○　○　○　○

型三　擦線遊戲

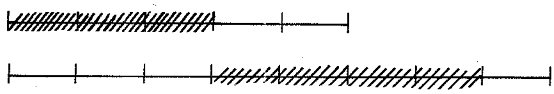
玩的時候先用鉛筆在紙上作出任意線段數條，每一條線是要先分作若干段的。

遊戲時，二人輪流使用擦膠，擦去若干相連的小段，但只能選出其中一條線來擦去，擦去的段可以是由兩端（不論左或右）開始，亦可從兩端之間的任何「相連」的一段擦去。



例如　甲擦去

乙擦去



如此輪流擦線，至最後一個擦線而無線段留下便是最後勝利者，當然玩這個遊戲，它的必勝之道也和拈基本型玩法是相同的。

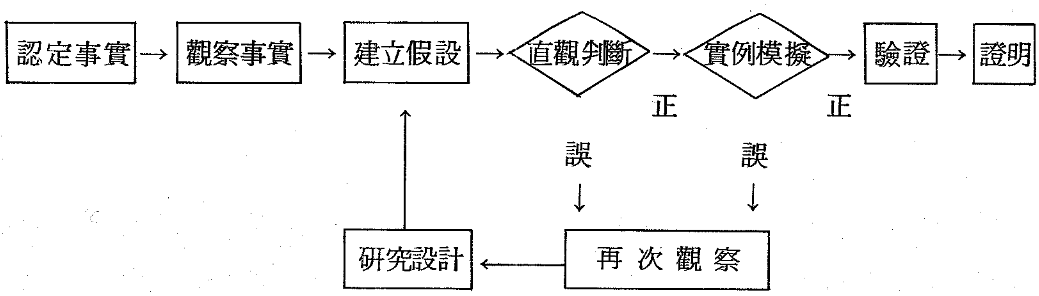
型四：火柴遊戲

一個最普通的火柴遊戲，就是兩人同玩，先取一定數量的火柴放在桌上，二人輪流取火柴，每次所取的數目最少 1 支且不得超過預先限制最多拿取的個數，遊戲的勝負爲最後取去火柴者爲贏家。（拈推廣型玩法之變形）

型五：數字遊戲

兩個人輪流選定 1 ～ 10 之中的數，而遊戲時選定一方開始，將兩人所選定的數相加，誰先加到100誰便贏。（拈推廣型玩法之變形）

2. 由「必勝規律」尋求的研究過程中，我們可以使用一套策略推理思考流程：



而藉助電腦高效率的運算分析與模擬，使我們在理論推測的驗證及判斷的周全性，提供很大的幫助。

電腦與數學相互應用的思考方式，相信可供日後研究發展使用。

3. 此次的研究過程中的重要特性之一，便是利用電腦模擬與搜尋的方式，建立拈遊戲玩法的各種必勝型態，並將所得的數據資料加以處理分析，以協助建立拈遊戲的必勝策略，而電腦模擬搜尋的流程十分簡單，首先根據遊戲規則先行找出最小的必勝數值，將其輸入程式中，如此電腦程式便會依照遊戲規則去尋找最接近此必勝型的必勝數值，當然這個過程需一個一個數值慢慢的比較測試，看看這些數值有沒有辦法在遊戲規則限制下去拿成此最小的必勝型態，即如果不行，那麼便將其資料儲存，甚至爲了「萬無一失」起見，每個數值都需要和資料庫中已儲存的所有必勝型態相比較，這樣子我們便可

（下轉第 40 頁）

(二) 兩者軸向不同，鶯歌石的軸向是東北偏北；萊萊的軸向是西北偏西。

(三) 鶯歌石傾沒背斜傾斜軸的傾斜度比萊萊傾沒向斜的傾斜度大。

(四) 兩者所顯示出的新月形圖案形狀恰恰相反，鶯歌石外凸內凹，萊萊外凹內凸。

(五) 本研究除了調查台灣地區一些特殊的地質構造範例之外，尚強調如何利用圖形去解釋判斷發生在地表各種褶皺構造的複雜性和趣味性。

四、參考資料

1. 陳培源、李春生（1987）/ 地質野外考察實習在地球科學教育上的功能。（中等教育雙月刊第 38 卷第一期）
2. 陳培源（1975）/ 野外及礦業地質學。
3. Marland P. Billings 著；唐山 譯（1977）/ STRUCTURAL GEOLOGY 構造地質學。
4. BRUCE E. Hobbs、Winthrop D. Means、Paul F. Williams 原著；吳柏裕 譯（1983）/ An Outline of Structural Geology. 構造地質學。
5. 林啓文、楊昭南（1991）/ 簡介褶皺形成的理論（地質季刊）11 卷，1 期。
6. 花井重次郎原著，諶亞達 譯（1975），地形學，台灣商務印書館出版。

（上承第 29 頁）

逐一的模擬搜尋我們想要的數值了，然而必勝數值的資料愈來愈多，所需比對模擬的時間相對的愈長，而可喜的是由於科技的進步，電腦的執行速度日新月異，已可以克服這個工作上的困難度。

4. 有關拈的其他變形遊戲，諸如威氏遊戲（Wythoff's game）、單堆奇偶型遊戲（The Even-odd game）、單堆雙倍遊戲（The Double game）、單堆 n 倍遊戲…等，相信亦可藉助電腦加以整理分析，以建立其必勝策略，而將拈問題做一個完整的討論與研究。

戊、參考書籍及資料

1. 數學世界的萬花筒　黃敏晃著　牛頓出版社　p.210～p.230
2. 寓數學於遊戲第二輯　趙文敏著　力章出版社　p.78～p.81
3. 數學傳播第三卷第二期（民67年）　拈及其各種變形遊戲　張鎮華　p.6～p.11
4. 智慧遊戲　鄭肇楨編著　華聯出版社　p.8～p.21
5. Guy Richard K (1991) Combinatorial Games (ed.) American Mathematical Society Providence Rhode Island.
6. 師生一起「玩數學」　林福來　科學月刊第十九卷第三期　p.222～229