基礎解題策略—以簡單的數學爲例

李嘉淦
國立臺灣師範大學數學系

今日世界之文明，端賴於人類之追求生存，適應環境，征服自然，是以人類的歷史歷程之演變，繫之於教學來相互配合，即

簡單生活 ⟶ 進步生活 ⟶ 發展生活 ⟶ 複雜生活

來發展與改進，而教學之原則歷程是由

簡單 ⟶ 複雜
零碎 ⟶ 整體
散漫 ⟶ 系統
無意 ⟶ 通則
紊亂 ⟶ 效率

而演變而來的，所以對於學生的智能展現，更要進一步的探討，參以比奈(Binet) 及皮亞傑(J. Piaget)的研究，及布洛克斯(Brooks)的認定。

(1) 量的方面：依生長的層次，逐漸增長，前者以12歲、13歲爲高峯，而後者以14歲、15歲爲最高峯，過後即逐年遞減，智力方面約在20歲左右即行停止。

(2) 質的方面：依生長的層次，思想也就漸漸地符合邏輯原則，行爲則由主觀逐漸步向客觀，至於情意之展示，由具體之操作直觀趨向於抽象概念。

(3) 功能方面：自胎教開始，記憶力逐漸增強，至20歲以後趨於緩弱而消退，且以女性顯著展現；而推理、決策的能力，更顯著的增強，尤以男性爲甚；至於一般之閱讀能力，發表的能力，呈現着急劇的增長，尤以注意力、判斷力、分析辨證，更能持久性的現示。唯對數學，自然科學及文學等之特殊能力，約在14歲至17歲，漸能發揮成長。

基於智能呈現的研究理論，學生所必具備之學習歷程，自需適當配備，玆分類圖示於下：

1. 知動的學習

認識 → 接受 → 模仿 → 批評 → 修正 → 熟練

2. 知覺的學習

經驗 → 聯想 → 保持 → 認識 → 理解 → 領悟

3. 概念的學習

經驗 → 回憶 → 思考 → 分化 → 概括 → 概念

4. 思想的學習

準備 → 潛伏 → 領悟 → 修正 → 發表 → 創作

5. 情意的學習

暗示 → 模仿 → 涵蘊 → 欣賞 → 履行 → 發展

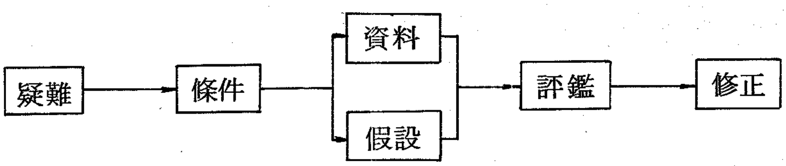
在學習的各類圖示中，各種學習的活動，必然要有達到高度的興趣才行，而興趣的歷程為：

啓示興趣 → 維護興趣 → 發展興趣 → 希望學習 → 經驗融通

培養興趣 → 拓展興趣 → 強化效率

是以富有彈性教材的編選，俾能適應學生之個別差異、社會需要、學習興趣、智能展現、生活價值，以發展學生之思考能力，增進知能，更能表達其各有關之知識、思想、情感、技能，以發展其創造之興趣與才能；又需心領神會、培養其審美能力與高尚情操、養成民主之風度及合作之精神。

是以杜威圖示了解題策略，茲列於下：



為了配合策略之實施，略舉數例於下，並請自行思考配合。

一、手指與數學

十 進 法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
五 進 法	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22
八 進 法	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14
十二進法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t	e	10
二 進 法	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100

利用一隻手的五個手指，便採用五進法，羅馬數字就是，如

Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，X，L，C，D，M，$\overline{X}$，$\overline{M}$

1，2，3，4，5，10，50，100，500，1000，10000，100000

利用兩手兩脚的指頭，採用二十進法，美洲印第安數字

附 1：英制貨幣　　　　重量　　　　容量

1 英磅＝20 先令　　1 磅＝16 噸　　1 加侖＝8 品脫

1 先令＝12 辨士　　1 担＝14 磅

附 2：火星人有多少觸手（手指）？　18＋9＝22

附 3：12 twelve 代表：：：：twoteen

二、負　數

5、4、3、2、1、0！

美國甘廼第角的火箭載送人造衞星升空時的倒數方法，即表示某個叫做零時的固定時間前的一些相等的時間區間；零時後的時間叫做升空加 1，升空加 2 等等。

記錄年代以公元 1500 年，（A.D.1500）即耶穌基督降生後 1500 年，而公元前 1500 年，（1500 B.C.）即降生前 1500 年，零時的固定時間為耶穌基督降生時。

水在 0°C 結冰，零下 40 度是低於 0°C 的溫度，比攝氏零度低 40 度的溫度，叫做攝氏零下 40 度。

某甲站定後向前（東）走 3 步，向後（西）走 4 步，以站定為零的固定位置。

班上某甲與某乙的年紀相差 5 個月，表示不出來誰的年紀比較大，必需定出以零的

固定年紀的月數才可以。

如上所說，負數的教學必須隨時規定出零時的固定位置，其運算就可以平移、對稱等來處理了。

三、乘　方

公元1590年	a，a的平方，a的立方，a的四方，……			
公元1631年	a	aa	aaa	aaaa
公元1634年	a	a2	a3	a4
公元1637年	a	aa	a^3	a^4

笛卡兒的指數記法，他已知道用 a^3 代替 aaa，為甚麼不用 a^2 代替 aa 呢？難怪牛頓分別挖了一大一小的貓洞，讓他養的一大一小的貓進出，朋友告訴他只要一個大洞就夠了，他卻理直氣壯地說：「不行，大貓怎能從小洞進出」。他卻沒想到小貓也可由大洞進出呢。

附1：來布尼茲（1646 BC ～ 1716 BC.）創「～」相似符號，「≅」全等符號。

四、分解因式 x^2-x-6

(1) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(2) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(3) $ab=1(-6)$ $\qquad a+b=1+(-6)=-5$

$=(-1)6$ $\qquad a+b=(-1)+6=5$

$=(-2)\cdot 3$ $\qquad a+b=-2+3=1$

$=2(-3)$ $\qquad a+b=2+(-3)=-1$

(4)
$$1\left\langle\begin{array}{cc}1 & 2\\ 1 & -3\end{array}\right\rangle -6 \qquad \left(x^2\left\langle\begin{array}{cc}x & +2\\ x & -3\end{array}\right\rangle -6\right)$$
$$\begin{array}{c}2+(-3)\\ \parallel\\ -1\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}2x-3x\\ \parallel\\ -x\end{array}$$

(5) $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

附1：$ab>0 \quad a+b>0 \quad \Rightarrow \quad a>0\ ,\ b>0$

$ab>0 \quad a+b<0 \quad \Rightarrow \quad a<0\ ,\ b<0$

$ab<0 \qquad a+b>0\text{，}a<b \quad \Rightarrow \quad a<0\text{，}b>0$

$ab<0 \qquad a+b<0\text{，}a<|b| \quad \Rightarrow \quad a>0\text{，}b<0$

附2：$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$

$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$a>0$，$c>0$，

$bd=\cdots\cdots \qquad\qquad bc+ad=\cdots\cdots$

$$\begin{array}{cccc} & a & b & \\ ac & & & bd \\ & c & d & \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{bc+ad} & \end{array}$$

五、配方法

$ax^2+bx+c=0 \qquad a>0$

$ax^2+bx=-c$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

…………

1° $(x+m)^2=x^2+2mx+m^2$

$x^2+2mx+m^2=(x+m)^2$

2° $$x^2+2\cdot\frac{\frac{b}{2}}{a}x+\left(\frac{\frac{b}{2}}{a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{\frac{b}{2}}{a}\right)^2$$ （b偶數）

附1：$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

（b奇數）　　　　（b偶數）

附2：$5x^2-6x-8=0$

$$x^2-\frac{6}{5}x=\frac{8}{5}$$

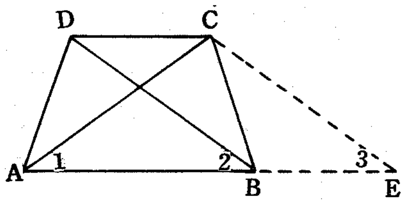
$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{8}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

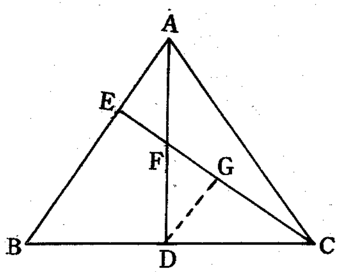
………

附 3 ： $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{9+40}}{5} = \cdots\cdots$

六、作平行線

(1) 對角線相等的梯形是等腰梯形

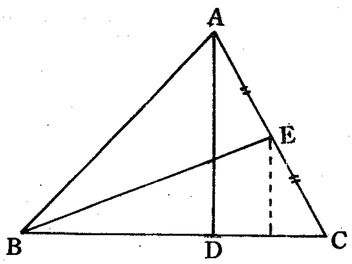




(2) $\triangle ABC$中$\overline{AB} = \overline{AC}$（如上右圖）$\overline{AE} = \dfrac{1}{3}\overline{AB}$，作$\overline{AD} \perp \overline{BC}$交$\overline{BC}$於$D$，連$\overline{CE}$交$\overline{AD}$於$F$，則$\overline{AF} = \overline{FD}$。

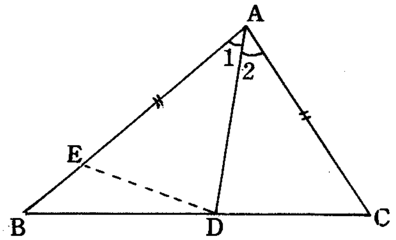
七、作垂直

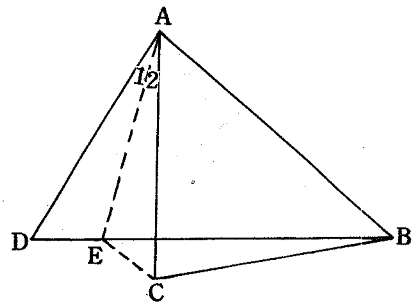
(3) $\triangle ABC$中$\overline{AD}$是$\overline{BC}$上的高，E是$\overline{AC}$的中點，如圖$\angle EBC = 30°$ 則$\overline{AD} = \overline{BE}$



八、作全等三角形

(4)　$\triangle ABC$中$\overline{AB}>\overline{AC}$，$\angle A$的平分線交$\overline{BC}$於$D$，求證$\overline{BD}>\overline{DC}$。

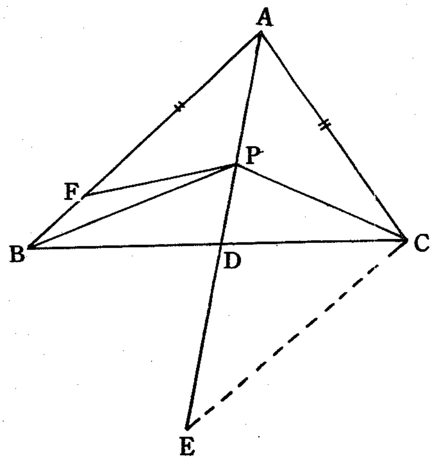




(5)　$\triangle ABC$，$\triangle ABD$中，$\overline{AD}=\overline{AC}$如圖，$\angle DAB>\angle CAB$，則$\overline{DB}>\overline{CB}$。

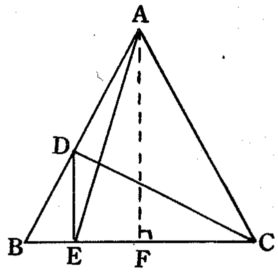
九、延長中線

(6)　$\triangle ABC$中$\overline{AB}>\overline{AC}$，$P$為中線$\overline{AD}$上任意一點，連$\overline{PB}$，$\overline{PC}$，則$\overline{AB}-\overline{AC}>\overline{PB}-\overline{PC}$。



十、利用勾股定理

(7)　$\triangle ABC$中$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$於$D$，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$於$E$，則$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{DE}^2$



$$
\begin{aligned}
\overline{AB}^2 &= \overline{AF}^2+\overline{BF}^2\\
&= \overline{AE}^2-\overline{EF}^2+\overline{BF}^2\\
&= \overline{AE}^2+(\overline{BF}+\overline{EF})\\
&\quad (\overline{BF}-\overline{EF})\\
&= \overline{AE}^2+\overline{EC}\cdot\overline{BE}\\
&= \overline{AE}^2+\overline{DE}^2
\end{aligned}
$$

$\overline{AB}=\overline{AC}$　　$\overline{AF}\perp\overline{BC}$

$\overline{BF}=\overline{FC}$

由以上十例，我們可以體會到解題方法，係完全的或部分的符合杜威的策略：先有疑難，再尋求條件，蒐集資料，擬定假設，進而研究評鑑，最後加以修正，而獲得結論。尚請讀者參攷指正。